EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 26-3
9 771665 243002 02603

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 26, Núm. 3, noviembre 2023

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 26, Núm. 3, 2023

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2023 Impresa en México

Volumen 26 – Número 3 – 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2023

Volumen 26 Número 3 Noviembre de 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

EDITORIAL

COMUNICACIÓN Y DIÁLOGO DISCIPLINAR, UNA ESTRATEGIA PARA APORTAR, CRECER Y AVANZAR EN EL CAMPO

COMMUNICATION AND DISCIPLINARY DIALOG, A STRATEGY TO CONTRIBUTE, GROW AND ADVANCE IN THE FIELD

GISELA MONTIEL-ESPINOSA
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

La Relime nació como un proyecto con una visión clara: "… se dirige ambiciosamente hacia la construcción de la Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa cuyos componentes esenciales radiquen en los elementos propios de nuestra cultura en beneficio de nuestros sistemas educativos" (Relime, s.f.), reconociendo desde el inicio la relevancia de posicionar a la región en una disciplina encargada del estudio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático, desde múltiples paradigmas, enfoques y perspectivas teórico-metodológicas.

Para lograr que esta visión sea una realidad se han llevado a cabo diversas tareas, tanto al seno de la región como en el diálogo con la comunidad académica internacional. A través de la retroalimentación y los resultados que se van obteniendo es que se (re)orienta el rumbo, se fortalecen decisiones y se actualiza el posicionamiento de la Relime como un espacio para comunicar nuevo conocimiento disciplinar en nuestra región.

En esta editorial quiero hacer una breve reflexión en torno a la comunicación y el diálogo disciplinar, porque en este periodo en el que he dirigido la Relime en conjunto con el equipo editorial hemos visto que muchos manuscritos no entran al proceso de evaluación formal por no ser consideradas comunicaciones situadas en nuestra disciplina, es decir, si bien están abordando casos en o del aula de matemáticas, no lo están haciendo desde el quehacer disciplinar.

Montiel-Espinosa, G. (2023). Comunicación y diálogo disciplinar, una estrategia para aportar, crecer y avanzar en el campo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(3), 267-271. https://doi.org/10.12802/relime.23.2630

En la semana Virtual del Consorcio Nacional de Recursos de Información Científica y Tecnológica (CONRICYT) de México, celebrada en 2020, Mireya Márquez Ramírez, profesora investigadora de la Universidad Iberoamericana, dio la conferencia titulada “¿Cómo publicar en Ciencias Sociales?” (CONRICYT, 2020). Ese fue el título oficial, pero en su diapositiva inicial colocó entre paréntesis “y no morir en el intento”. La conferencia se orientó a la publicación en revistas (que ella denominó) *top*, en inglés; sin embargo, considero que las orientaciones que dio son y deben ser parte de la cultura científica en la comunicación de nuestro quehacer, independientemente de la revista donde se busque publicar:

1. Ten claras tus motivaciones.
2. Ten claro quién eres y qué quieres como investigador(a).
3. *Conoce e identifica la revista que te interesa.*
4. *Vuélvete lector asiduo y experto en tu campo.*
5. Ten claridad sobre la fortaleza y originalidad de tu artículo.
6. Usa las desventajas a tu favor: vende la importancia de tu caso.

Dos de estas orientaciones me ayudaron en el desarrollo de la presente reflexión. Conocer la Relime antes de enviar un manuscrito significa leer con cuidado todas las secciones de nuestro sitio web: primero, para entender con qué criterios son seleccionados los manuscritos que entran a un proceso editorial formal, tanto técnicos como disciplinares; segundo, para conocer la investigación que comunicamos, tanto la que se relaciona directamente con la investigación del manuscrito como la que da cuenta del campo donde se lleva a cabo. Nos proponemos el desarrollo de una escuela, el avance de una disciplina y el fortalecimiento del trabajo de nuestra comunidad, sin diálogo, no vamos a conseguirlo.

Claramente la revisión de literatura que se solicita en nuestras *Normas de Publicación* –como toda norma de calidad en una revista científica– no se limita a la propia Relime, así sea para artículos científicos o para ensayos, solicitamos que ésta se apoye de literatura relevante, actualizada y diversa en regiones geográficas. Lo que sí es fundamental es partir de investigación *en nuestra disciplina*, incluso para identificar que hay problemas y preguntas que no se han resuelto y, entonces, proponer nuevas rutas para abordarlos.

Este sentido de diálogo es uno de los primeros criterios que utilizamos para integrar un manuscrito al proceso editorial formal de la Relime, reconociendo que éste puede estar en diversas etapas de un proceso de investigación; y en este número tenemos ejemplos de cómo investigaciones desde perspectivas teórico-metodológicas diversas y en diferentes etapas de desarrollo realizan este diálogo y aportan a nuestra disciplina.

En el artículo “Interação não-verbal e o envolvimento visual dos estudantes nas aulas de matemática: um estudo da organização do espaço na comunicação linguística”, Adriana Breda –de España–, Danyal Farsani –de Noruega– y Gemma Sala-Sebastià –de España– comunican el estudio de una dimensión poco abordada de la interacción en el salón de clase: el compromiso visual de los estudiantes, a través de la atención visual que genera la organización del espacio en el aula y los mensajes verbales y no verbales que transmite un profesor. Si bien el referente teórico más relevante, la proxêmica, proviene de otras disciplinas, en esta investigación se destaca el estudio de los gestos y de las interacciones en el aula ya realizado en nuestra disciplina. Más aún, con este estudio se está dando continuidad a la comunicación del trabajo de Danyal Farsani en otros espacios de comunicación académica en nuestra disciplina, tales como los *Proceedings* de la *Conference of European Society for Research in Mathematics Education*, la *REDIMAT* o el *Acta Scientiae*. En ese sentido, con este artículo esperamos que el diálogo se amplíe y esta investigación aporte a su consolidación en el campo.

Valéria Espíndola Lessa y Adriano Canabarro Teixeira –de Brasil– presentan el artículo “Espiral da Conceituação: um estudo sobre o Campo Conceitual das Funções Afim e a Programação de Computadores”, para comunicar una investigación con dos componentes teóricos *clásicos* en nuestra disciplina: la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud y la teoría construccionista de Seymour Papert. El componente novedoso de la investigación es que estas herramientas teóricas van a ser utilizadas para analizar la actividad matemática que se genera en Scratch, un ambiente de programación modular, esto es, un ambiente que genera interacciones distintas a las que se podían tener en los ambientes (incluso tecnológicos) de aprendizaje que teníamos cuando ambas teorías surgieron en nuestra disciplina. Valéria y Adriano integran a su teorización en torno al proceso de conceptualización un componente propio del aprendizaje en ambientes tecnológicos: la espiral de conceptualización, con lo que amplían y robustecen la explicación que inicialmente permitían las herramientas clásicas utilizadas en nuestra disciplina.

Alessandro Jacques Ribeiro, Marcia Aguiar, André Luis Trevisan y Henrique Rizek Elias –de Brasil–, reportan en el artículo “Exploring learning opportunities for primary teachers: the case of knowledge for teaching early algebra”, una investigación que se fundamenta en herramientas teóricas consolidadas en la disciplina –del desarrollo profesional docente, del álgebra temprana y sus articulaciones–, y en el modelo Oportunidades de Aprendizaje Profesional para Profesores (PLOT, por sus siglas en inglés), en cuya organización participa el propio Alessandro Ribeiro en un trabajo previo. Esta investigación es parte de un Programa más amplio que busca entender y explicar problemáticas en torno al conocimiento docente dando respuesta a problemáticas de la práctica, y con ello nos dan muestra respecto a cómo hacer avanzar el conocimiento con evidencia producto de investigación rigurosa y fundamentada.

Finalmente, el artículo “Enseñanza del Cálculo diferencial e integral asistido por el software GeoGebra” de Edison Laderas Huillcahuari, Vladimir Acori Flores y Luis Villa Pérez –de Perú–, reporta una investigación cuantitativa que, partiendo de problemáticas reportadas en la disciplina sobre la enseñanza de la matemática universitaria, orientada en particular a los aspectos gráficos, así como de resultados de investigación en torno al campo del uso de la tecnología; analiza el impacto del programa de geometría dinámica GeoGebra en las dimensiones del pensamiento matemático: autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y lógica; considerando variables de la enseñanza del cálculo que la disciplina ha señalado como significativas.

La naturaleza cuantitativa de esta investigación es lo que le permite analizar todas estas dimensiones que la literatura encuentra relevante para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, profundizar en la naturaleza de cada una, desde una perspectiva de la Matemática Educativa, requiere de investigación cualitativa, por lo que ésta resultaría una fase inicial que oriente decisiones y futuros diálogos para hacer avanzar este estudio.

Con estos cuatro artículos ejemplificamos que nuestro campo disciplinar está creciendo en muchas formas y direcciones, continuamos integrando otros campos disciplinares, más no como una mera yuxtaposición de estos a los problemas relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas –como ya lo habían discutido Sierpinska y Kilpatrick (1998) en un momento en el que se reflexionaba sobre la identidad de nuestro campo disciplinar–, sino como un proyecto interdisciplinar –como plantearon recientemente Wagner et al. (2023) en su reflexión en torno a las fronteras de nuestra disciplina–, para atender nuevos problemas o nuevas variables de interés educativo relacionadas con las matemáticas que pueden acontecer dentro pero también fuera de la escuela.

De ahí que, reconocer el trabajo de investigación antecedente y dialogar con las aportaciones de nuestro campo disciplinar, la Matemática Educativa, es una condición *sine qua non* se podría participar en un proceso editorial formal en la Relime. Quizá con esta breve reflexión y la continua actualización y ampliación de las normas editoriales podemos fortalecer la cultura de la comunicación y el diálogo disciplinar que buscamos en la Relime. De lo que no tenemos duda es que con cada uno de sus escritos, de sus lecturas y de sus intercambios podemos ir sembrando una idea para esa Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa que nos propusimos hacer crecer.

Referencias

CONRICYT [@CONRICYT] (21 de octubre de 2020). SVC EBSCO - Dra. Mireya Marquez Ramírez. [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=czSMusrOeCc

Relime (s.f.). Enfoque y Alcance. Recuperado el 1 de octubre, 2024, de https://relime.org/index.php/relime/enfoque-y-alcance

Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (1998). Foreword. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5190-0

Wagner, D., Prediger, S., Artigue, M., Bikner-Ahsbahs, A., Fitzsimons, G., Meaney, T., Mesa, V., Pitta-Pantazi, D., Radford, L., y Tabach, M. (2023). The field of mathematics education research and its boundaries. *Educational Studies in Mathematics* 114(3), 367–369. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10270-9

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Adriana Breda, Danyal Farsani, Gemma Sala-Sebastià

INTERAÇÃO NÃO-VERBAL E O ENVOLVIMENTO VISUAL DOS ESTUDANTES NAS AULAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DA ORGANIZAÇÃO DO ESPAÇO NA COMUNICAÇÃO LINGUÍSTICA

Non-verbal interaction and students' visual involvement in Math classes: a study of the organization of space in linguistic communication

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo examinar a qué distancia específica los estudiantes están más o menos comprometidos visualmente con el maestro y en qué medida las instrucciones dadas por él, a través de gestos de señalar, afectan la participación del alumnado en la clase de matemáticas. Para ello, se seleccionaron aleatoriamente 50 alumnos, 25 chicos y 25 chicas, quienes utilizaron una mini cámara acoplada a unos lentes que grabaron 75 horas de video. Los resultados muestran que el alumnado está más involucrado visualmente con las instrucciones del maestro en un rango proxémico de 1,20 a 3,70 metros. Además, se describen las diferencias entre chicos y chicas en cuanto a la forma que tienen de involucrarse visualmente en las clases de matemáticas. Finalmente, se concluye que los gestos de señalar realizados por los docentes pueden servir como herramienta para recuperar la atención visual de los estudiantes en las clases de matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Interacción no verbal*
- *Atención visual*
- *Proxémica*
- *Clases de matemáticas*
- *Mini cámara de vídeo*

ABSTRACT

This study aims to examine where in the classroom and at what specific distance students are more or less visually engaged with the teacher and to what extent the instructions given by teachers, through gestures of pointing, affect students' engagement in class of math. 50 students (25 boys and 25 girls) were randomly selected, put a mini camera that was mounted on an eyeglass in their mathematics and English lessons. Approximately 75 hours of video recording were made from these cameras (the first person's perspectives) to analyze and compare the nonverbal interaction in mathematics lessons. Results show that students are more visually engaged in their

KEY WORDS:

- *Non-verbal interaction*
- *Visual attention*
- *Proxemic*
- *Math classes*
- *Mini camera*

Breda, A., Farsani D. y Sala-Sebastià G. (2023). Interação não-verbal e o envolvimento visual dos estudantes nas aulas de matemática: um estudo da organização do espaço na comunicação linguística. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(3), 273 - 294. https://doi.org/10.12802/relime.23.2631. Recepción: Abril 10, 2020 / Aceptación: Enero 30, 2024.

teachers' instruction at a particular distance in the classroom (from 120 cm to 370 cm). Furthermore, we report differences between boys and girls and how they are visually engaged in their mathematics classrooms. Finally, we report how teachers pointing gestures can serve as a tool to recapture student's visual attention in mathematics classrooms.

RESUMO

Este estudo objetiva examinar com que distância específica os alunos estão visualmente mais ou menos envolvidos com o professor nas aulas de matemática. Também busca analisar em que medida, as instruções feitas pelo professor, através de gestos de apontar, afetam o envolvimento visual dos alunos nas aulas dessa disciplina. Para isso foram selecionados, aleatoriamente, 50 alunos, 25 alunos do sexo masculino e 25 do sexo feminino, os quais, usavam uma minicâmara acoplada em óculos de lente que gravou 75 horas de videoaula. Os resultados mostram que os alunos estão mais envolvidos visualmente com as instruções do professor a uma proxêmica de 1,20 a 3,70 metros. Além disso, relata-se diferenças entre meninos e meninas e como eles estão visualmente envolvidos nas aulas de matemática. Por fim, conclui-se que os gestos de apontar realizados pelos professores podem servir como uma ferramenta para recuperar a atenção visual dos alunos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Interação não-verbal*
- *Atenção visual*
- *Proxêmica*
- *Aulas de matemática*
- *Minicâmara de vídeo*

RÉSUMÉ

Cette étude vise à examiner à quelle distance spécifique les étudiants sont plus ou moins visuellement engagés avec l'enseignant et dans quelle mesure les instructions données par l'enseignant, par le biais de gestes de pointage, affectent la participation des étudiants en classe de mathématiques. À cette fin, 50 élèves ont été sélectionnés au hasard, 25 garçons et 25 filles, qui ont utilisé une mini-caméra fixée à des lunettes qui ont enregistré 75 heures de vidéo. Les résultats montrent que les élèves sont plus visuellement impliqués dans les instructions de l'enseignant dans une plage proxémique de 1,20 à 3,70 mètres. En outre, les différences entre les garçons et les filles dans la manière dont ils sont visuellement impliqués dans leurs leçons de mathématiques sont décrites. Finalement, il est conclu que les gestes de pointage des enseignants peuvent servir d'outil pour récupérer l'attention visuelle des élèves pendant les leçons de mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Interaction non verbale*
- *Attention visuelle*
- *Proxémique*
- *Leçons de mathématiques*
- *Mini caméra vidéo*

1. Introdução

As interações em sala de aula são de particular interesse, especialmente no ensino e aprendizagem de disciplinas como Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) (O'Halloran, 2005; Farsani, 2015a). Estudos realizados em Planas e Iranzo (2009) e Falsetti e Rodríguez (2005) buscam analisar, em particular, como ocorre os processos interativos nas aulas de matemática. Neste artigo, examinamos diferentes dimensões de interação, particularmente aquelas de natureza não-verbal, como as proxêmicas, que tradicionalmente recebem menos atenção, tanto nas pesquisas relacionadas à área de Educação, como à área de Educação Matemática. Albert Mehrabian, um iraniano-americano de ascendência armênia, foi o primeiro teórico a estudar o significado das características não-verbais da comunicação em um processo interativo. Durante as décadas de 1960 e 1970, Mehrabian examinou a comunicação verbal (o que é dito), vocal (como algo é dito) e visual (gestos, espaço e outras características não-verbais) e como cada um desses aspectos contribuiu para o processo de criação de significado entre interlocutores.

Nas últimas duas décadas, os pesquisadores concentraram-se nas interações em sala de aula, com foco particular nos modos semióticos sociais, como a escrita, o desenho (Kress e van Leeuwen, 1996) e a cor (Kress e van Leeuwen, 2002). Atenção particular foi dada aos aspectos não-verbais da comunicação nos processos de criação de significado. Isso inclui os processos multimodais de visão (Farsani et al., 2022), gestos e movimentos (Radford et al., 2009; Farsani, 2015b; Kress et al., 2001), postura (Brey e Shutts, 2015; Inagaki et al., 2018; Zahry e Besley, 2019), olhar (Holsanova et al., 2006; Farsani et al., 2021), aceno com a cabeça (Smith-Hanen, 1977) e orientação com os ombros (LaCrosse, 1975).

No campo da Educação Matemática, muitas pesquisas, tanto às relacionadas com a semiótica ciência que estuda o sistema de signos usados na comunicação, como as que conjugam a semiótica com outros marcos teóricos do campo (p.e, Teoria da Objetivação em Radford (2006a) e Abordagem Ontossemiótica em Godino et al. (2019)), preocuparam-se em estudar como os alunos aprendem os conceitos matemáticos a partir do uso de diferentes signos e da interrelação entre eles (Radford, 2006b). Algumas destas pesquisas, preocuparam-se em mostrar como os alunos se envolvem e aprendem matemática através do uso de analogias (Espinoza-Vásquez et al., 2018), metáforas (Font e Nanclares, 2003; Khatin-Zadeh et al., 2023; Scheiner et al., 2022; Soto-Andrade, 2007) e gestos (Arzarello et al., 2009; Manghi Haquin, 2010; Farsani et al., 2020; Radford, 2003; 2009; Salinas-Hernández e Miranda, 2020; Sandoval-Troncoso e Ledezma, 2021; Sinclair, 2005;). No entanto, poucos estudos se concentraram na noção de proxêmica ciência, parte da semiótica, dedicada ao estudo da organização do espaço na comunicação linguística na pesquisa em sala de aula (Collier, 1983), particularmente nas aulas de matemática (Farsani, 2015a). Além disso, poucas ferramentas metodológicas foram desenvolvidas para medir a atenção visual de forma objetiva, no intuito de mensurar e avaliar o envolvimento visual de estudantes. Nesta pesquisa, prestaremos atenção especial à importância da atenção visual desde a perspectiva da primeira pessoa. Por meio da instalação de micro câmeras nos óculos dos alunos, dispositivo que funciona como rastreador ocular, podemos obter e, até mesmo, calcular uma melhor perspectiva da interação na sala de aula, conforme observado diretamente pelo próprio aluno.

Neste artigo, nos propomos examinar com que distância específica os alunos estão visualmente mais ou menos envolvidos com o professor nas aulas de matemática. Além disso, queremos explorar as diferenças entre essas variáveis entre meninos e meninas. Finalmente, examinamos em que medida as instruções feitas pelos professores, através de gestos de apontar, afetam o envolvimento dos alunos nas aulas de matemática. Até onde sabemos, existe uma lacuna na literatura e, como Zahry e Besley (2019) observaram recentemente, as pesquisas futuras precisam responder à identificação de indicadores visuais (por exemplo, olhar e espaço) que mais atraem a atenção dos alunos.

2. Marco teórico

Nas próximas subseções tratamos de apresentar o que a literatura nos traz em relação aos gestos, em particular, o gesto de apontar e em relação a noção de proxêmica.

2.1. *Gesto de apontar*

Os gestos dêiticos, são uma das categorias básicas definidas por McNeill (1992) que se manifestam pelos movimentos espaço-temporais do corpo. Gestos de apontar são usados quando interlocutores conectam o verbal ao visual, indicando objetos, locais ou imagens que estão presentes ou não no ambiente. Esses gestos não transmitem informações perceptivas ou de ação e podem ser produzidos independentemente de sua unidade de fala (Norris, 2011). A ação de apontar pode ser realizada de diferentes formas e usando diferentes tipos de materiais. Por exemplo, os gestos de apontar são feitos com mais frequência usando um dedo indicador estendido, ao passo que, por vezes, podem ser feitos por meio do uso de um objeto (por exemplo, uma caneta ou um *laser*). Curiosamente, diferentes partes do corpo também podem ser usadas para apontar, como a cabeça, os lábios (Enfield, 2001) e os olhos (Wilkins, 1999). O gesto de apontar também pode ser feito usando um gesto de mão aberta, com as mãos para cima ou com a palma da mão na posição vertical. Em todos os casos, cada gesto tem um significado distinto no discurso (Kendon e Versante, 2003; Kendon, 2004). O gesto de mão aberta e *palm-up* é percebido como não ameaçador (Givens, 2016), enquanto o gesto de apontar é frequentemente considerado ameaçador e visto como algo que se gostaria de destacar (Andersen, 1999). Os dedos usados como gestos de apontar costumam ser usados para comandar ou acusar, enquanto que o gesto de mão aberta, com palma da mão para cima, constitui uma superfície em vez de uma linha, a qual poderia significar um presente ou uma oferta, demonstrando designações educadas e não imperativas (Calbris, 1990, p. 128).

Os gestos de apontar também são usados pelos professores em sala de aula como uma ferramenta pedagógica. Em um estudo, Azaoui (2015) relatou o uso de gestos de apontar por dois professores franceses para organizar o ambiente da sala de aula. Em outro estudo, Farsani (2015b) examinou e comparou as respostas verbais dos alunos quando um professor utilizou gestos de apontar com quando o professor usou gestos de mão aberta com as mãos para cima. As respostas dos alunos foram mais longas quando o professor usou o gesto de mão aberta, já, as respostas dos alunos foram mais reduzidas a um simples “sim” ou “não” (ou mesmo um encolher de ombros) quando o professor usou gestos de apontar com o dedo.

Nos últimos anos, houve uma atenção crescente entre os gestos dêiticos em relação à sua linguagem falada, tanto fora das salas de aula (Norris, 2011) quanto dentro das salas de aula (Farsani, 2015b). Por exemplo, no campo do ensino e aprendizagem da matemática, Farsani (2015a) estudou dois professores de matemática trabalhando com a primeira e a segunda geração de britânicos-iranianos no Reino Unido. Ele observou como os interlocutores estavam atribuindo sentido matemático em salas de aula multilíngues, por meio do uso de gestos dêiticos. Por exemplo, ao transmitir o conceito matemático de triângulos isósceles para estudantes com proficiência limitada em inglês, os professores usaram os dois dedos indicadores apontando para os olhos enquanto diziam “isósceles”. Portanto, seus gestos de apontar serviram como um dispositivo mnemônico, não apenas para ajudar a lembrar um termo técnico matemático “isósceles”, mas também para reforçar o conceito de que existem dois lados iguais e dois ângulos idênticos (exatamente como nossos olhos) em um triângulo isósceles. Outra pesquisa, realizada por Manghi Haquin (2010), com estudantes do ensino médio no Chile, conclui que a fala e os gestos dêiticos constroem conjuntamente ou semioticamente o conhecimento matemático.

Devido ao fato de os gestos de apontar serem tão onipresentes e os interpretarmos com tanta facilidade, apontar pode ser visto como um fenômeno trivial (Kita, 2003). Neste artigo, queremos prestar atenção especial aos gestos apontados pelos professores. Em particular, veremos como os alunos reagem a essas mensagens não verbais. Até onde sabemos, nenhum estudo anterior relatou como os gestos de apontar de um professor de matemática podem afetar a atenção visual dos alunos. Portanto, este estudo explorará o emprego de gestos de apontar realizado por professores em diferentes categorias proxêmicas. Passaremos agora a discutir o que é a proxêmica e suas quatro categorias.

2.2. *Proxêmica*

Proxêmica, o estudo silencioso da comunicação, é frequentemente referido como “a ciência da utilização do espaço humano” (Hockings, 1995, p. 509) ou como “as pessoas se regulam no espaço e como se movem no espaço” (Collier, 1995, p. 235). O campo da proxêmica abrange a percepção, uso e enquadramento do espaço. Historicamente, E. T. Hall (1963; 1966; 1973) e Sommer (1959; 1961) foram os primeiros a estudar proxêmicas (E. T. Hall) e espaço pessoal (Sommer), e suas ideias refletem seus antecedentes teóricos. Esse conceito atraiu muitos antropólogos, psicólogos e educadores contemporâneos. O termo proxêmica foi cunhado pelo antropólogo americano Edward que examinou as proxêmicas da comunicação interpessoal em diferentes culturas. Ele classificou o uso do espaço pelas pessoas e a distância que elas mantêm com os outros em quatro categorias: espaço íntimo (até 45 cm), espaço pessoal (até 1,20 m), espaço social (até 3,70 m) e espaço público (mais de 3,70 m). Farsani e Mendes (2021) renomearam essas categorias como espaços privados, pessoais, profissionais e públicos, pois se referem a interações nos contextos educacionais profissionais.

No espaço íntimo (mães e bebês; amantes) costumam habitar a distância íntima apresentada por Hall (1966), de zero a 30 centímetros, onde o toque, o cheiro, o calor corporal e até sons fracos são percebidos, porém a visão é distorcida. Em relação ao espaço pessoal, profissional e público, Hall (1966) fez uma observação interessante. Ele percebeu não apenas que o ‘espaço fala’, mas também que pessoas de diferentes culturas usam o espaço de maneiras diferentes em seus encontros comunicativos sociais. Como a linguagem verbal varia de cultura para cultura, o uso do espaço entre díades sociais também muda. Por exemplo, um dos autores deste artigo viveu em três países muito diferentes, cada um em um continente diferente (Irã, Reino Unido e Chile), com normas e mentalidades socioculturais diametralmente opostas. Ele imediatamente percebeu que os ingleses, iranianos e chilenos têm sistemas fundamentalmente diferentes de proxêmicas em seus encontros sociais e comunicativos. O que é considerado uma distância pessoal socialmente aceitável entre díades sociais no Reino Unido pode ser vista como rude ou até ofensivo no Chile.

Na Inglaterra, por exemplo, é socialmente aceitável ficar a aproximadamente um metro (90 cm ou, aproximadamente, o comprimento de um braço) de outros interlocutores. No Irã, essa distância é um pouco menor (Mehrabian, 1972), enquanto no Chile os interlocutores ficam ainda mais próximos durante sua comunicação interpessoal. Na Inglaterra, a proximidade entre interlocutores e a realização de qualquer gesto, desde o cruzamento de braços até a expressão verbal "afaste seu rosto do meu" pode fazer com que os indivíduos mostrem sinais de desconforto. É possível afirmar que a norma sociocultural do comportamento das proxêmicas varia consideravelmente no Irã e no Chile, quando comparada ao Reino Unido. No Irã, à medida que o espaço interpessoal entre as díades sociais aumenta, muitos iranianos expressam seu desconforto através de frases como "não sinto cheiro" ou "não sinto o seu cheiro". Isso significa simplesmente "eu não sinto o cheiro e você também não, então vamos ficar mais próximos". No Chile, devido às normas socioculturais e à calorosa cultura latino-americana, o espaço pessoal é ainda mais próximo do que no Irã. No Chile, é socialmente rude e uma má prática ficar à distância entre díades sociais. Em tais circunstâncias, os chilenos tornam-se mais conscientes e demonstram desconforto ao dizer "*no muerdo*!", que se traduz em "eu não mordo". Essa frase provavelmente reflete o quão próximos os interlocutores chilenos esperariam um do outro nas interações sociais. É interessante notar que a noção de proxêmica varia não apenas entre culturas, mas também entre indivíduos e situações. Por exemplo, pessoas em todo o mundo tendem a manter uma maior proximidade em trens subterrâneos ou em elevadores. Além disso, os interlocutores tendem a se aproximar mais que o normal quando se encontram em ambientes barulhentos.

Atenção particular tem sido dada, não apenas ao papel da comunicação transcultural, mas também à maneira como a proxêmica é usada em diversos ambientes públicos: terminais de transporte (Remland et al., 1995), bancos ao ar livre (Leibman, 1970), *playgrounds* (Scherer, 1974), calçadas (Sobel e Lillith, 1975), filas de cinema e bancos (Kaya e Erkíp, 1999) e shopping centers (Brown, 1981). No entanto, existem poucos estudos sobre a noção de proxêmica no ambiente escolar, a qual pode levantar questões importantes para se pensar nas interações professor/aluno, bem como o papel dessas interações nos processos de ensino e aprendizagem. A proxêmica pode ser vista como um recurso que os professores podem utilizar como forma de observações disciplinares de comportamento inconsciente e não verbal. Outros pesquisadores examinaram os efeitos das diferentes línguas faladas por alunos bilíngues e as subsequentes mudanças em sua proxêmica e comportamento não-verbal (Collier 1983; Farsani, 2015a). Por exemplo, Collier (1983) mostrou um estudo proxêmico demonstrando que a distância interpessoal é um fator significativo na interação em sala de aula. Sua análise detalhada de uma gravação de vídeo de uma aula chinesa-americana mostrou que o meio de instrução determinava padrões particulares de proxêmicas e espaço interpessoal. O cantonês não apenas provocou um espaço proxêmico mais próximo entre os interlocutores, mas também possibilitou significativamente mais ângulos de virada (orientação corporal) entre os alunos e o professor. Isso criou uma atmosfera mais envolvente e aumentou a atenção dos alunos. Além disso, os alunos eram mais propensos a se comunicar sobre tópicos relacionados à aula. Farsani (2015b) deu um passo adiante nessa ideia e analisou o comportamento proxêmico entre meninos e meninas de descendentes persas no Reino Unido. Ele olhou para as mensagens matemáticas multimodais que os alunos britânico-iranianos subconscientemente enviam e recebem. Além disso, ele examinou as maneiras pelas quais diferentes idiomas (inglês e persa) afetavam a orientação corporal dos alunos e o comportamento proxêmico em uma interação na sala de aula. O inglês era frequentemente empregado para avançar na tarefa, enquanto o persa era usado para fazer piadas, gerenciamento de comportamento e envolvimento emocional. Portanto, o persa foi um gatilho verbal para aumentar o ângulo de giro entre os alunos. É possível pensar em como as proxêmicas variam de acordo com os diferentes papéis da linguagem na interação. Essa proxêmica também pode ser observada em relação às diferenças culturais entre os sexos. Nesse sentido, Farsani (2015b) observou que as meninas mantinham uma distância mais próxima, com um maior ângulo de giro uma com a outra, enquanto discutiam ideias/tarefas. Por outro lado, os meninos mantinham uma distância pessoal maior, menos ângulo de giro e menos contato visual entre si. Embora estudos anteriores tenham mostrado os diferentes efeitos da linguagem não-verbal, até o momento, nenhum estudo examinou quais categorias de espaço, provavelmente, apresentam influência e maiores efeitos no envolvimento visual dos alunos nas salas de aula de matemática. Além disso, neste artigo, queremos explorar as diferenças entre essas variáveis entre meninos e meninas e comparar a maneira pela qual eles estão visualmente envolvidos em suas aulas de matemática.

3. Metodologia

Embora o uso de gravações de vídeo em pesquisas seja relativamente novo, os métodos visuais fazem parte da pesquisa há muito tempo. Darwin (1872) foi um dos primeiros pesquisadores a incorporar métodos visuais para explorar áreas de comunicação não-verbal. Ele usou uma câmera fotográfica como ferramenta e método para registrar expressões faciais em homens e animais. Enquanto um vídeo (uma coleção de imagens em movimento) é uma extensão de imagens estáticas, os dados capturados pela gravação de vídeo oferecem ao pesquisador uma oportunidade única de entender eventos dinâmicos em um contexto espaço-temporal. A reprodução do que foi capturado em uma gravação de vídeo tem a vantagem de revisar os materiais, diminuindo a velocidade das observações que podem aprimorar o foco em uma variedade de eventos dinâmicos (Webber, 2008). Isso pode incluir o estudo de proxêmicas (Collier, 1983; 2001), cinésico (o estudo da comunicação e linguagem corporal) (Hockings, 1995) e análise de conversas (Goodwin, 2001).

Pesquisas recentes mostraram atenção especial em novos métodos para estudar a comunicação visual e a integração multimodal (Holsanova, 2012). Por exemplo, o emprego de dispositivos de rastreamento ocular a partir da interação real dos leitores com um jornal (Holsanova et al., 2006). No entanto, existem desvantagens no emprego de dispositivos de rastreamento ocular. Para realizar amostras de tamanho médio-grande, os dispositivos de rastreamento ocular podem ser caros. Neste estudo, participaram 50 alunos (25 do sexo masculino e 25 do sexo feminino) estudantes de uma turma de primeiro ano e uma turma de segundo ano da Educação Básica chilena. Os dados que surgem vêm das aulas de matemática, nas quais atuava um único professor (polivalente). Os formulários de consentimento foram obtidos dos alunos, pais dos alunos e professores envolvidos neste estudo. Para a pesquisa, os estudantes usavam uma mini câmera de vídeo montada em óculos nas aulas de matemática. No total, obtivemos 75 horas de gravações interacionais. Vale ressaltar que essa mini câmera de vídeo, montada nos óculos dos alunos, não tem o mesmo efeito que o rastreamento ocular (Holsanova, 2012). Esses óculos são baratos, amplamente acessíveis e ideais para implementações de pesquisa, especialmente para amostras de tamanho médio-grande.

Esses alunos já haviam usado as câmeras como teste para garantir que o experimento não lhes parecesse estranho e ocorresse de forma natural. A idade média dos participantes era de 10,5 anos. Capturar as interações ao vivo, através da minicâmara montada nos óculos dos alunos, permitiu capturar interações diárias e práticas de criação de significado desde a perspectiva dos próprios alunos participantes. As lentes originais foram removidas para minimizar o peso e facilitar a visão original. Cada aula durou 90 minutos e cada aluno teve que usar os óculos durante toda a duração da aula.

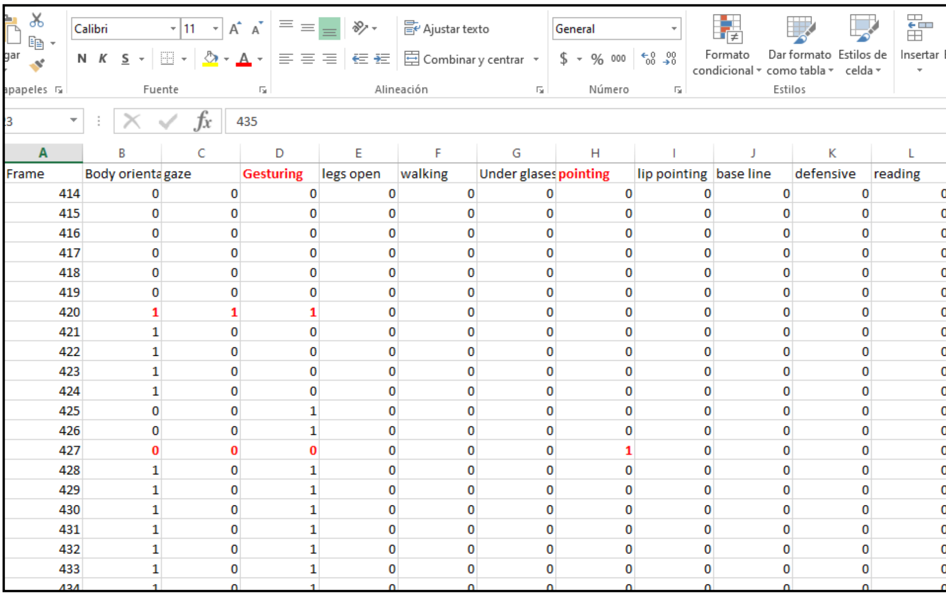
A ideia de usar o olhar como um meio para analisar os processos de aprendizagem é de interesse de muitos pesquisadores (Farsani et al., 2021). Em particular, estudos anteriores analisaram a importância de tal método quando se trata de criar significados em diferentes interações sociais, contextos culturais e práticas de sala de aula. A atenção visual é um dos aspectos mais importantes da comunicação não verbal e desempenha um papel extremamente significativo no engajamento e no aprendizado dos alunos (Farsani et al., 2022). No entanto, até o momento, poucas ferramentas metodológicas foram desenvolvidas para medir, objetiva e automaticamente, a atenção visual, no intuito de medir e avaliar o envolvimento visual dos estudantes. Neste artigo, prestaremos atenção especial à importância do ponto de vista da primeira pessoa, algo que tradicionalmente não é trabalhado. Montando câmeras nos óculos dos alunos, conseguimos calcular e obter uma melhor perspectiva da aula, e tal perspectiva é obtida pelo próprio aluno participante.

No final de cada dia, as gravações eram baixadas manualmente em um computador. As câmeras de vídeo tinham uma qualidade de gravação de trinta quadros por segundo (30 fps); para cada vídeo, um quadro era amostrado a cada segundo e processado para detectar a presença dos rostos dos professores. No total, foram obtidos 270000 quadros dos 50 alunos. Neste artigo, cada quadro representa um segundo. Em outras palavras, cada quadro representa uma foto, "impressão da realidade" (Jewitt, 1999, p. 21), que nos permite participar em momentos específicos da perspectiva dos próprios alunos em sua interação na sala de aula de matemática. Dos 270000 quadros, apenas 9521 continham o rosto/proximidade dos professores nos quadros. Alguns quadros foram descartados devido à má qualidade, mas principalmente devido ao fato de que esses quadros não continham o rosto dos professores (como queríamos explorar quem está olhando para o professor e está envolvido visualmente). Neste artigo, consideramos apenas 6278 quadros para a análise.

Todos os quadros amostrados (cada quadro representando um segundo) foram enviados pelo *software Google Images*. As fotos do *Google* foram usadas para detectar a presença de rostos. Inserimos fotos do professor da sala de aula e o *Google Image* identificou de maneira automática e objetiva todos os quadros em que uma imagem de um professor apareceu em cada quadro capturado pelos alunos.

Estávamos interessados principalmente em casos em que os alunos mantinham sua atenção visual no professor. Houve momentos em que mais de dois rostos estavam presentes no mesmo quadro, por exemplo, o professor e algum aluno que acabara de chegar atrasada à aula. Nesses casos, decidimos descartar o quadro, pois a atenção visual do aluno pode ter sido fixada no aluno que chegou atrasado e não no professor. Houve outros momentos em que descartamos deliberadamente os quadros e não os contamos na análise. Isso incluía casos em que a nitidez dos quadros era baixa ou desfocada e, portanto, não era possível discernir se o professor estava ou não olhando para o aluno. A implementação de todas essas medidas rigorosas tornou nossa interpretação da análise dos quadros mais eficaz.

Depois que o *Google Image* detectou o rosto de um professor em um quadro (capturado pelos óculos dos alunos), esse quadro recebeu um número de identificação exclusivo e foi examinado de forma manual, com auxílio do Excel, com a finalidade de observar algumas variáveis não verbais. (Figura 1).



Frame	Body orienta	gaze	Gesturing	legs open	walking	Under glases	pointing	lip pointing	base line	defensive	reading
414	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
415	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
416	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
417	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
418	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
419	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
420	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
421	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
422	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
423	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
424	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
425	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
426	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
427	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
428	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
429	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
430	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
431	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
432	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
433	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 1. Examinando variáveis não verbais com auxílio do Excel.
Fonte: os autores.

Esse processo manual foi realizado no Excel, inserindo 0 e 1 (não aconteceu, *versus* aconteceu) e, em seguida, uma análise estatística foi realizada para medir sua importância. Além das variáveis não verbais mencionadas no parágrafo anterior, outras variáveis não verbais também foram consideradas, como a se um professor estava usando a mesa como uma barreira entre ele e os alunos, escrevendo no quadro, ou se o professor estava andando ou estava parado em uma determinada posição. Por exemplo, examinamos os números de quadro 420 e 427, respectivamente. Esses dois quadros (cada um representa um segundo) capturados por um aluno. A Figura 2 representa a descrição quantitativa do quadro 420 e a Figura 3 é a descrição quantitativa do quadro 427. No quadro 420, percebe-se que o professor: a) orienta seu corpo em relação a um aluno em particular; b) olha para o aluno; c) faz gestos. No quadro 427, o professor não parece estar olhando diretamente para o aluno ou inclinando o corpo para ele, mas parece estar apontando. Esses relatos descritivos quantitativos foram feitos manualmente e, neste artigo, analisamos 6278 quadros. Vale ressaltar que os dados que emergem neste artigo são principalmente da perspectiva da primeira pessoa e não um relato descritivo da perspectiva de uma terceira pessoa.

Figura 2. Alunos observando o professor enquanto ele gesticula. Fonte: os autores.

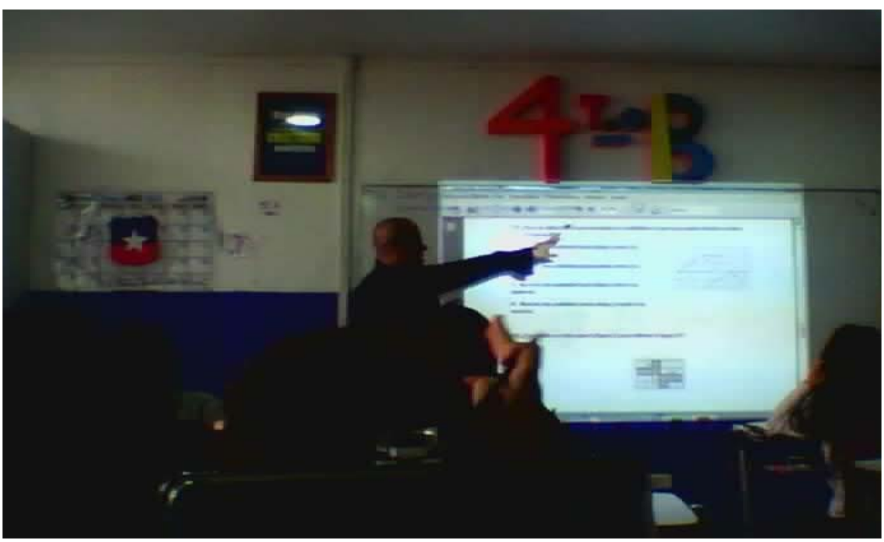


Figura 3. Alunos observando o professor enquanto ele aponta. Fonte: os autores.

Concluímos a análise pesquisando esses quadros específicos para identificar o agente (qual aluno estava olhando para o professor), a proximidade (distância do aluno em relação ao professor) e o período (o minuto em que ocorreu durante a aula). Todos esses dados, com base no olhar dos alunos para o professor, foram, então, colocados (em formato binário) no Excel para análise quantitativa.

3.1. *Medindo o espaço proxêmico da sala de aula*

No estudo das proxêmicas, tradicionalmente, usam-se as escalas proxêmicas de Hall para estimar distâncias entre interlocutores em diferentes espaços sociais. Por exemplo, para medir distância entre participantes em ambientes, como *playgrounds* (Aiello e Jones, 1971) ou em consultórios médicos (Noesjirwan, 1977). Os registros gravados em vídeo permitem maior precisão na medição da distância usando cálculos predeterminados, como por exemplo, a distância entre as cabeças e os torsos dos participantes foi estimada em intervalos de três polegadas (Remland et al., 1995). Outros métodos, como grades calibradas, têm sido utilizados em vários estudos para codificar o estabelecimento de distâncias (Madden, 1999). Da mesma forma, as fotografias feitas em ambientes como shopping centers e calçadas foram projetadas em uma grade calibrada para estimar a distância entre pessoas (Burgess, 1983). Embora as gravações de vídeo, com câmera lenta e contadores digitais, ofereçam estimativas de distância mais precisas do que os registros de papel e lápis, outros problemas podem ocorrer quando se tenta medir distâncias (por exemplo, ângulo dos participantes em relação à câmera). Scherer (1974) desenvolveu a fotogrametria, uma fórmula matemática para explicar os erros de codificação em relação a medida da distância, resultantes do ângulo dos participantes em relação à câmera. Recentemente, estudos proxêmicos foram realizados com robôs (Mumm e Mutlu, 2011) e em ambientes virtuais (Llobera et al., 2010).

Até onde sabemos, não há relatos de nenhum estudo empírico que medisse proxêmicas em contextos de sala de aula em tempo real. Na análise das proxêmicas, medimos a que distância o professor estava em pé ou sentado do observador (aluno participante). Nossa abordagem foi voltar para a sala de aula e medir fisicamente a distância entre as mesas lateral e sagital (da esquerda para a direita e de frente para trás, respectivamente). Como resultado, observamos que as mesas estavam a um metro de distância (esquerda para a direita) e com 90 centímetros entre cada fila (de frente para trás). Sentados em suas mesas, cada aluno usou aproximadamente 1,10 metros de espaço no total (de frente para trás). Portanto, se o observador (aluno) estivesse sentado na segunda fila, na mesma coluna que o professor, a distância entre o observador e o professor seria de aproximadamente 2,20 metros. O teorema de Pitágoras foi usado para identificar a distância entre o observador (aluno) e o professor e se o professor estava em pé (ou sentado) em uma coluna diferente de onde o observador (aluno) estava sentado. Tendo obtido uma estimativa aproximada de quão distante o observador estava do professor, classificamos cada quadro em termos das proxêmicas: espaço privado, pessoal, profissional e público (Figura 4).

Figura 4. Medindo proxêmicas em sala de aula.

4. Resultados e Discussão

A Figura 4, apresentada na seção anterior, mostra a atenção visual dos alunos em diferentes categorias de espaço. Embora, esperava-se que os alunos pudessem se envolver mais na aula, desde a perspectiva visual, quando estão mais próximos do professor, os resultados que encontramos são bem diferentes. Como Farsani e Mendes (2021) observaram, os alunos prestam mais atenção visual no espaço profissional (P3), seguidos pelo espaço público (P4), logo pelo espaço pessoal (P2) e espaço privado (P1), respectivamente. Pode não ser surpreendente que a atenção visual dos alunos tenda a diminuir devido ao fato de que eles podem se sentir desconfortáveis em relação ao lugar que se encontram localizados no ambiente da sala de aula. Dos 9521 quadros, 5762 quadros surgiram do P3, o que representa 60,5% do total dos quadros. Posteriormente, surgiram 2872 quadros em P4, que representam 30,2% do total de quadros. P2 e P1 foram responsáveis por 636 e 251 quadros, que constituíram 6,7% e 2,6% do envolvimento visual, respectivamente (Figura 5).

Embora a capacidade de atenção dos alunos melhore com a idade, pouco se sabe sobre os fatores e estratégias para desenvolver a competência dos alunos de prestar atenção no transcorrer de uma aula (Merritt et al., 2007). Além do resultado apresentado na Figura 5, também estávamos interessados em examinar, em que medida, o sexo do aluno influenciou sua atenção visual em todas as categorias de espaço. A Figura 6 mostra um padrão interessante da atenção visual desses 50 alunos. Parece que, independentemente do sexo dos alunos, meninos e meninas são igualmente e ativamente envolvidos, prestando atenção visual ao professor nos espaços profissional (P3) e público (P4). É interessante notar que, no espaço profissional (P3), conforme evidenciado em 13 quadros, os meninos prestavam mais atenção visual que as meninas. Curiosamente, este gráfico também mostra que as meninas estavam mais envolvidas em espaços proxêmicos mais próximos com seus professores do que os meninos. Os meninos parecem estar melhor envolvidos visualmente em espaços com mais de 1,2 metros.

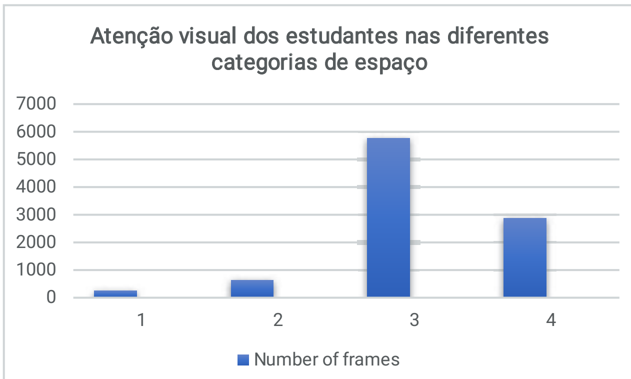


Figura 5. Número de quadros (*number of frames*) relacionados à atenção visual dos estudantes nas diferentes categorias de espaço.

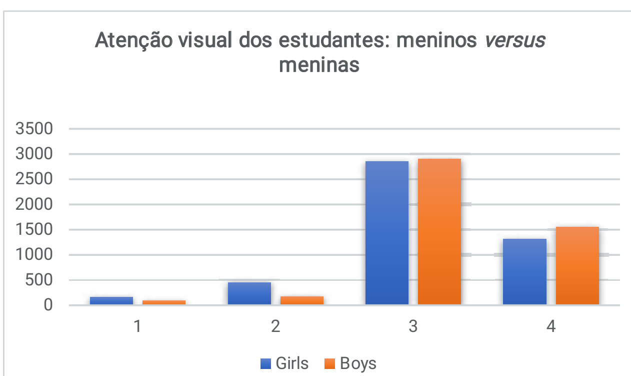


Figura 6. Diferenças entre a atenção visual de meninos (boys) e meninas (girls). Fonte: os autores.

Há muito debate sobre as diferenças de sexo nas habilidades de atenção visual, com as mulheres mostrando menos atenção visual em comparação aos homens (Merritt et al., 2007). Na pesquisa atual, as diferenças de sexo na atenção visual mostraram estar relacionadas às diferenças cognitivas de sexo entre mulheres e homens, em disciplinas como a Matemática (Good et al., 2008), mas nossos resultados não mostram uma diferença significativa relacionada à atenção visual entre meninos e meninas.

Um último resultado, trata-se sobre a execução do gesto de apontar o dedo dos professores em diferentes categorias proxêmicas. No espaço P1, foram observados 78 quadros em que há gestos de apontar nas aulas de matemática. No P2, identificaram-se 334 quadros que mostram que o professor está apontando. No espaço P3, 4012 gestos de apontar capturaram a atenção visual dos alunos em suas aulas de matemática. Finalmente, no espaço P4, um total de 2305 gestos de apontar capturaram a atenção visual dos alunos em suas aulas de matemática. Percebe-se que os gestos de apontar dos professores podem ser usados como um instrumento para aumentar a atenção visual dos alunos nas aulas de matemática, particularmente a uma distância maior de 1,20 metros (espaço P3 e P4).

5. Conclusões

Este artigo relata um estudo realizado com alunos de primeiro e segundo anos da Educação Básica chilena, onde uma amostra de 50 estudantes (25 meninas e 25 meninos) usavam uma minicâmara de vídeo acoplada em óculos. Nossos resultados mostram que a maneira pela qual os alunos estavam visualmente envolvidos com o professor dependia de um conjunto de proxêmicas. Além disso, encontramos diferenças na atenção visual dos alunos quanto às diferentes proxêmicas do aluno em relação ao professor. Conclui-se que há padrões proeminentes que envolvem engajamento visual, em particular os relacionados à distâncias entre alunos, seja menina ou menino, e professor igual ou maiores de 1,20 metros. Além disso, analisamos até que ponto os gestos de apontar dos professores poderiam afetar o envolvimento visual dos alunos. Conclui-se que, nas aulas de matemática, os alunos prestam maior atenção com os gestos de apontar realizados pelos professores, principalmente no espaço proxêmico profissional (P3) e no espaço proxêmico público (P4).

Com esse estudo é possível concluir que se deveria dar uma maior importância à distribuição dos alunos em sala de aula, atentando às distâncias que estes estarão com relação ao professor, caso queiramos que eles tenham uma maior atenção visual nas aulas de matemática. Além disso, acreditamos que, independentemente da experiência de um professor, sempre vale a pena questionar as formas, os estilos e a qualidade das mensagens que são transmitidas verbal e não verbalmente durante as aulas de matemática. Acreditamos que a otimização dessas mensagens não-verbais, muito sutis e silenciosas, pode ter um impacto positivo direto, não apenas envolvendo os alunos de forma visual, mas também, de forma geral, no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Uma perspectiva futura deste estudo é analisar se os alunos, que mostraram maior atenção visual nos gestos de apontar do professor, durante as aulas de matemática, obtém maior nível de aprendizagem nessa disciplina. Uma recomendação e aplicação prática desta pesquisa é incorporar o uso da linguagem não-verbal nos cursos de capacitação de professores de matemática, tanto para professores em formação inicial quanto em serviço, a fim de aumentar o conhecimento e a conscientização sobre a função comunicativa da linguagem não-verbal.

Este estudo tem uma limitação. Devido ao tamanho médio da amostra (50 alunos) em um contexto particular, alunos do primeiro e segundo anos da Educação Básica em uma escola de Santiago do Chile, entendemos que são necessárias mais pesquisas interculturais sobre interação não-verbal multimodal (Sandoval-Troncoso e Ledezma, 2021) nas aulas de matemática. Pesquisas dessa natureza podem nos ajudar a examinar, mais detalhadamente, as trocas visuais e não-verbais multimodais que ocorrem, não apenas na sala de aula da Educação Básica chilena, mas em outros contextos culturais e, também, em outros níveis educativos.

Agradecimentos

Esta investigación se desarrolló dentro del Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU / AEI / 10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referências

Aiello, J. R. e Jones, S. E. (1971). Field study of the proxemic behavior of young children in three subcultural groups. *Journal of Personality and Social Psychology, 19*, 351–356. http://dx.doi.org/10.1037/h0031433

Andersen, P. A. (1999). *Nonverbal communication: Forms and functions*. Mayfield Pub.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., e Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 97–109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Azaoui, B. (2015). Polyfocal classroom interactions and teaching gestures. An analysis of nonverbal orchestration. *Proceedings "Gestures and speech in interaction (GESPIN)"*, Nantes, 2–4 september 2015.
Brey, E., e Shutts, K. (2015). Children use nonverbal cues to make inferences about social power. *Child Development, 86*(1), 276–286. http://dx.doi.org/10.1111/cdev.12334
Brown, C. E. (1981). Shared space invasion and race. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 7, 103–108. http://dx.doi.org/10.1177/014616728171016
Burgess, W. J. (1983). Developmental trends in proxemic spacing behavior between surrounding companions and strangers in casual groups. *Journal of Nonverbal Behavior,* 7, 158–169. http://dx.doi.org/10.1007/BF00986946
Calbris, G. (1990). *Semiotics of French Gesture*. Indiana University Press.
Collier, J. (1995). Photography and visual anthropology. In P. Hockings (ed.), *Principles of Visual Anthropology*, second edition (pp. 235–254). Mouton.
Collier, M. (1983). *Nonverbal Factors in the Education of Chinese American Children: A Film Study.* Asian American Studies, SFSU.
Collier, M. (2001) Approaches to analysis in visual anthropology. In T. van Leeuwen, e C. Jewitt, (Eds.), *Handbook of visual analysis*, (pp. 35–60). Sage publications London. Thousands Oaks. New Delhi.
Darwin, C. (1872). *The expression of the emotions in man and animals.* John Murray.
Enfield, N. J. (2001). Lip-pointing: A discussion of form and function with reference to data from Laos. *Gesture, 1*, 185–211. http://dx.doi.org/10.1075/gest.1.2.06enf
Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., e Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(3), 301–324. http://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2133
Falsetti, M. C., e Rodríguez, M. A. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 319–338. Available at: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508305
Farsani, D. (2015a). Deictic gestures as amplifiers in conveying aspects of mathematics register. *In Proceedings of the 9th Conference of European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1382–1384). Prague, Czech.
Farsani, D. (2015b). *Making Multi-Modal Mathematical Meaning in Multilingual Classrooms.* [Unpublished PhD thesis]. University of Birmingham.
Farsani, D., Breda, A., e Sala-Sebastià, G. (2020). ¿Cómo los gestos de los maestros afectan a la atención visual de las estudiantes durante el discurso matemático? *REDIMAT, 9*(3), 220–242. https://doi.org/10.17583/redimat.2020.5185
Farsani, D., Breda, A., e Sala-Sebastià, G. (2022). Non-verbal interaction and students' visual engagement in Mathematics and English classes. *Acta Scientiae, 24*(5), 1–26. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6721
Farsani, D., e Mendes., J. (2021). Proxêmica e comunicação não verbal na interação em sala de aula. *Psicologia Escolar e Educacional, 25*, e229866. https://doi.org/10.1590/2175-35392021229866
Farsani, D., Radmehr, F., Alizadeh, M., e Zakariya, Y. F. (2021) Unpacking the black-box of students' visual attention in mathematics and English classrooms: Empirical evidence using mini-video recording gadgets. *Journal of Computer Assisted Learning, 37*(3), 773–781. https://doi.org/10.1111/jcal.12522

Font, V., e Nanclares, J. I. A. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 21*(3), 405–418. Available at: https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21947

Givens, D. B. (2016). Reading palm-up signs: neurosemiotic overview of a common hand gesture. *Semiotica*, 235–250. https://doi.org/10.1515/sem-2016-0053

Godino, J. D., Batanero, C., e Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of mathematics*, *39*(1), 38–43. Available at: https://flm-journal.org/Articles/7BF8C2BCB810897D52601E7BD7A1A7.pdf

Goodwin, C. (2001). Practices of seeing: Visual analysis: An ethnomethodological approach. In T. van Leeuwen, e C. Jewitt (Eds.), *Handbook of visual analysis*, (pp. 157–182). Sage Publications London. Thousands Oaks. New Delhi.

Good, C., Aronson, J., e Harder, J. A. (2008). Problems in the pipeline: Stereotype threat and women's achievement in high-level math courses. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *29*(1), 17–28. http://dx.doi.org/10.1016/j.appdev.2007.10.004

Hall, E. T. (1963). A system for notation of proxemic behavior. *American Anthropologist,* 65, 1003–1026. http://dx.doi.org/10.1525/aa.1963.65.5.02a00020

Hall, E. T. (1966). *The Hidden Dimension*. Doubleday.

Hall, E. T. (1973). Handbook for Proxemic Research. Society for the Anthropology of Visual Communication.

Hockings, P. (ed.) (1995). *Principles of visual anthropology* [2nd edition]. Mouton.

Holsanova J. (2012). New methods for studying visual communication and multimodal integration. *Visual Communication*, *11*(3), 251–257. http://dx.doi.org/10.1177/1470412912446558

Holsanova, J., Rahm, H., e Holmqvist, K. (2006). Entry Points and Reading Paths on Newspaper Spreads: Comparing a Semiotic Analysis with Eye-Tracking Measurements. *Visual Communication*, *5*(1), 65–93. http://dx.doi.org/10.1177/1470357206061005

Inagaki, K., Shimizu, T., e Sakairi, Y. (2018). Effects of posture regulation on mood states, heart rate and test performance in children. *Educational Psychology*, *38*(9), 1129–1146. http://dx.doi.org/10.1080/01443410.2018.1504003

Jewitt, C. (1999). A social semiotic analysis of male heterosexuality in sexual health resources: The case of images. *International Journal of Social Research Methodology: Theory and Practice*, *1*(4), 263–280. http://dx.doi.org/10.1080/13645579.1998.10846880

Kaya, N. e Erkíp, F. (1999). Invasion of personal space under the condition of short-term crowding: A case study on an automatic teller machine. *Journal of Environmental Psychology, 19*, 183–189. http://dx.doi.org/10.1006/jevp.1999.0125

Kendon, A. (2004). *Gesture: Visible action as utterance*. Cambridge University Press.

Kendon, A., e Versante, L. (2003). Pointing by hand in Neapolitan. In S. Kita (ed.), *Pointing: Where Language Culture and Cognition Meet (*pp. 109–138). Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Khatin-Zadeh, O., Farsani, D., e Breda, A. (2023). How can transforming representation of mathematical entities help us employ more cognitive resources?. *Frontiers in Psychology*, 14, 1091678. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1091678

Kita, S. (ed.) (2003). *Pointing: Where language, culture, and cognition meet*. Erlbaum Associates.

Kress, G., Jewitt, C., Ogborn, J., e Tsatsarelis, C. (2001). *Multimodal teaching and learning: The Rhetorics of Science Classroom*. Continuum.

Kress, G., e van Leeuwen T. (1996). *Reading Images: The Grammar of Visual Design*. Routledge.

Kress, G., e van Leeuwen T. (2002). Colour as a semiotic mode: notes for a grammar of colours. *Visual Communication*, *1*(3), 343–68. http://dx.doi.org/10.1177/147035720200100306

LaCrosse, M. B. (1975). Nonverbal behaviour and perceived counselor attractiveness and persuasiveness. *Journal of Counseling Psychology, 22,* 563–566. https://doi.org/10.1037/0022-0167.22.6.563

Leibman, M. (1970). The effects of sex and race norms on personal space. *Environment and Behavior,* 2, 208–246. http://dx.doi.org/10.1177/001391657000200205

Llobera, J., Spanlang, B., Ruffini, G., e Mel Slater, I. (2010). Proxemics with multiple dynamic characters in an immersive virtual environment. *ACM Transactions on Applied Perception 8*(1), article 3. http://dx.doi.org/10.1145/1857893.1857896

Madden, S. J. (1999). Proxemics and gender: Where's the spatial gap? *North Dakota Journal of Speech and Theater, 12,* 1–8.

Manghi Haquin, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios pedagógicos, 36*(2), 99-115. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052010000200006

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* The University of Chicago Press.

Mehrabian, A. (1972) *Nonverbal communication.* Aldine-Atherton.

Merritt, P., Hirshman, E., Wharton, W., Stangl, B., Devlin, J., e Lenz, A. (2007). Evidence for gender differences in visual selective attention. *Personality and Individual Differences, 43*(3), 597–609. http://dx.doi.org/10.1016/j.paid.2007.01.016

Mumm, J. e Mutlu, B. (2011). Human-Robot Proxemics: Physical and Psychological Distancing in Human-Robot Interaction. *In: Proceedings of the 6th ACM/IEEE Conference on Human-Robot Interaction.* Lausanne, Switzerland.

Noesjirwan, J. (1977). Contrasting cultural patterns on interpersonal closeness in doctors: Waiting rooms in Sydney and Jakarta. *Journal of Cross-Cultural Psychology, 8,* 357–368. http://dx.doi.org/10.1177/002202217783008

Norris, S. (2011). Three hierarchical positions of deictic gesture in relation to spoken language: a multimodal interaction analysis. *Visual Communication, 10*(2),129–147. https://doi.org/10.1177/1470357211398439

O'Halloran, K. L. (2005) *Mathematical Discourse: Language, Symbolism and Visual Images.* Continuum.

Planas, N., e Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 179–213.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning, 5*(1), 37–70. http://dx.doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Extraordinario 1), 103–129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(Extraordinario 1), 7–21.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 111–126. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L., Edwards, L., e Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91–95. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Remland, M. S., Jones, T. S., e Brinkman, H. (1995). Interpersonal distance, body orientation and touch: Effects of culture, gender, and age. *The Journal of Social Psychology, 135*, 281–297. http://dx.doi.org/10.1080/00224545.1995.9713958

Salinas-Hernández, U., e Miranda, I. (2020). La teoría de la objetivación en el análisis de los modos de enseñanza: el caso de un profesor novato. *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, *5*(2), 83–91. Recuperado a partir de http://www.ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/361

Sandoval-Troncoso, L., e Ledezma, C. (2021). Los gestos, una manera de comunicar matemática: el caso particular de las funciones. *Educación matemática, 33*(2), 205–226. http://dx.doi.org/10.24844/EM3302.08

Scheiner, T., Godino, J. D., Montes, M. A., Pino-Fan, L. R., e Climent, N. (2022). On metaphors in thinking about preparing mathematics for teaching: In memory of José ("Pepe") Carrillo Yáñez (1959–2021). *Educational Studies in Mathematics, 111*(2), 253–270. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10154-4

Scherer, S. E. (1974). Proxemic behavior of primary school children as a function of their socioeconomic class and subculture. *Journal of Personality and Social Psychology*, 26, 800– 805. http://dx.doi.org/10.1037/h0036190

Sinclair, A. (2005). Mathematics and imitation from age one to three. *Journal for the Study of Education and Development*, *28*(4), 377–392. https://doi.org10.1174/021037005774518983

Smith-Hanen, S. S. (1977). Effects of nonverbal behaviors on judged levels of counselor warmth and empathy. *Journal of Counseling Psychology, 24*(2), 87–91. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0167.24.2.87

Sobel, R. S. e Lillith, N. (1975). Determinants of non-stationary personal space invasion. *Journal of Social Psychology, 97*, 39–45. https://doi-org.sire.ub.edu/10.1080/00224545.1975.9923310

Sommer, R. (1959). Studies in personal space. *Sociometry*, *22*, 247–260.

Sommer, R. (1961). Leadership and group geography. *Sociometry*, *24*, 99–110.

Soto-Andrade, J. (2007). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas. En A. Ibáñez e D. Cosmelli (Eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica, la intención y la intersubjetividad* (pp. 71–90). Universidad Diego Portales.

Webber, S. (2008). Visual images in research. In L. G. Knowles, e A. Cole (Eds.), *Handbook of Arts in Qualitative Research* (pp. 41–53). Sage.

Wilkins, D. (1999). *What's 'The Point'? The significance of gestures of orientation in Arrernte*. Presented to the Central Australian Linguistics Circle, Alice Springs. Nijmegen.

Zahry, N. R., e Besley, J. C. (2019). Warmth Portrayals to Recruit Students into Science Majors. *Visual Communication*, *20*(4), 470–500. https://doi.org/10.1177/1470357219871696

Autores

Adriana Breda. Facultad de Educación, Universitat de Barcelona, España. adriana.breda@ub.edu

https://orcid.org/0000-0002-7764-0511

Danyal Farsani. Facultad de Educación, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Noruega. danyal.farsani@ntnu.no

https://orcid.org/0000-0002-9412-3161

Gemma Sala-Sebastià. Facultad de Educación, Universitat de Barcelona, Barcelona, España. gsala@ub.edu

https://orcid.org/0000-0001-9830-312X

Valéria Espíndola Lessa, Adriano Canabarro Teixeira

ESPIRAL DA CONCEITUAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE O CAMPO CONCEITUAL DAS FUNÇÕES AFIM E A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES

Spiral of Conceptualization: a study on the Conceptual Field of Affine Functions and Computer Programming

RESUMEN

En este artículo presentamos un estudio que ha objetivado averiguar los procesos de representaciones y la comprensión de invariables operatorias del Campo Conceptual de las Funciones Afines de dos estudiantes de la Carrera Técnica en Informática del IFRS, Campus Erechim, por medio de la programación de computadoras. Los refenciales teóricos están puestos en la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud y en la Teoría Construccionista de Seymour Papert y sus aportadores. Los datos de esta investigación han sido producidos a través de la realización, por los estudiantes, de situaciones sobre Funciones Afines con el ambiente Scratch, junto al método de observación interactiva. Como resultados, la investigación ha apuntado hacia la concretización y dinamización del concepto de la tasa de variación constante, además de aportar en la elaboración de la Espiral Conceptual.

PALABRAS CLAVE:

- *Funciones afines*
- *Programación de computadoras*
- *Invariables operatorias*
- *Representaciones*
- *Comprensiones*

ABSTRACT

In this article we present a study that aimed to investigate the processes of representation and understanding of operative invariants of the Conceptual Field of Affine Functions of two students of the Technical Course in Informatics of IFRS, Campus Erechim, through computer programming. The theoretical framework was based on the Conceptual Fields Theory of Gérard Vergnaud and the Constructionist Theory of Seymour Papert and collaborators. The research data were produced through the realization, by the students, of situations about Affine Functions with the Scratch environment, associated with the interactive observation method. As results, the research pointed to the concretization and dynamization of the concept of constant rate of change, besides enabling the elaboration of the Spiral of Conceptualization.

KEY WORDS:

- *Affine functions*
- *Computer programming*
- *Operative invariants*
- *Representations*
- *Comprehensions*

Espíndola Lessa, V. y Canabarro Teixeira, A. (2023). Espiral da conceituação: um estudo sobre o campo conceitual das funções afim e a programação de computadores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(3), 295 - 326. https://doi.org/10.12802/relime.23.2632. Recepción: Abril 19, 2022 / Aceptación: Septiembre 6, 2024.

RESUMO

Neste artigo apresentamos um estudo que objetivou investigar os processos de representação e de compreensão de invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim de dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS, Campus Erechim, por meio da programação de computadores. O referencial teórico foi embasado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e na Teoria Construcionista de Seymour Papert e colaboradores. Os dados da pesquisa foram produzidos mediante a realização, pelos estudantes, de situações sobre Funções Afim com o ambiente Scratch, associado ao método da observação interativa. Como resultados, a pesquisa apontou para a concretização e dinamização do conceito de taxa de variação constante, além de possibilitar a elaboração da Espiral da Conceituação.

PALAVRAS CHAVE:
- *Funções afim*
- *Programação de computadores*
- *Invariantes operatórios*
- *Representações*
- *Compreensões*

RÉSUMÉ

Dans cet article nous présentons une étude qui avait pour but d’investiguer les processus de représentation et de compréhension des invariants opératoires du Champ Conceptuel des Fonctions Affines de deux étudiants du Cours Technique d’Informatique de l’IFRS, Campus Erechim, à travers la programmation informatique. Le cadre théorique était basé sur la Théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud et la Théorie Constructiviste de Seymour Papert et collaborateurs. Les données de recherche ont été produites par la réalisation, par les élèves, de situations sur les fonctions affines avec l’environnement Scratch, associé à la méthode d’observation interactive. Comme résultats, la recherche a indiqué la concrétisation et la dynamisation du concept de taux constant de changement, en plus de permettre l’élaboration de la Spirale de Conceptualisation.

MOTS CLÉS:
- *Fonctions affines*
- *Programmation informatique*
- *Invariants opératoires*
- *Représentations*
- *Compréhensions*

1. Introdução

O presente artigo é fruto de uma investigação desenvolvida no Grupo de Pesquisa em Cultura Digital na Educação (GEPID) da Universidade de Passo Fundo (UPF) que, em linhas gerais, tem preocupações com os processos pedagógicos no contexto da cultura digital e da informática educativa. O objeto de investigação foi produzido a partir da articulação da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), do conteúdo matemático das Funções Afim, da importância e relevância dos conceitos e raciocínios à formação matemática do estudante da escola básica e da programação de computadores como recurso tecnológico e pedagógico do processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, temos o interesse em conhecer as possibilidades que a programação de computadores pode trazer ao professor de Matemática da escola básica em relação às manifestações conceituais dos estudantes, não apenas como um recurso avaliativo no sentido de verificação (se conseguiu fazer a programação correta), mas no sentido de mediação que visa a troca de ideias entre e com seus estudantes, num movimento de construção do conhecimento.

Para a construção do problema de pesquisa, realizamos uma revisão de literatura a partir do mapeamento de teses e dissertações, produzidas entre os anos de 2006 e 2017, que abordassem a TCC como referencial teórico, associada ao conteúdo matemático de Funções e que envolvessem o recurso tecnológico da programação de computadores. Nesse estudo, encontramos apenas um trabalho, a dissertação de mestrado de Ventorini (2015), que além de trazer importantes contribuições para a área, possibilitou encontrarmos lacunas e possibilidades para novas investigações (os detalhes metodológicos da revisão de literatura podem ser encontrados em Lessa (2017)).

Diante disso, o problema de pesquisa constitui-se da seguinte forma: Como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *campus* Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores?

Para tanto, objetivamos investigar os teoremas em ação manifestados pelos estudantes no ambiente de programação de modo a reconhecer os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios. Nos tópicos que seguem, apresentamos o referencial teórico, a metodologia empregada e os resultados obtidos.

2. O Campo Conceitual das Funções Afim

Um campo conceitual, segundo a TCC de Gérard Vergnaud, constitui-se a partir de um conjunto de *situações* que o sujeito é confrontado em sua vida, um conjunto de *invariantes operatórios*, conhecimentos em ação (conceitos em ação e teoremas em ação) que permitem a compreensão das situações e a resolução destas e um conjunto de *representações*, que permitem dar formas simbólicas às ideias.

Invariantes operatórios, são os conhecimentos que os sujeitos põem em ação durante a atividade e podem ser conceitos em ação ou teoremas em ação. Os teoremas em ação, para Vergnaud (2014), são invariantes operatórios de tipo lógico das proposições, no sentido de descreverem uma ideia, uma premissa, uma relação entre objetos e propriedades, passíveis de serem verdadeiros e falsos para a situação real dada. Já os conceitos em ação são invariantes operatórios do tipo lógico das funções proposicionais, que não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas "constituem tijolos indispensáveis à construção das proposições" (Vergnaud, 1996, p. 162).

Para exemplificar, trazemos a resolução de uma equação do 1º grau. É possível supor que, ao realizar equações do tipo $ax + b = c$, a criança tenha criado um teorema em ação na qual, numa linguagem coloquial usada por ela, pode ser traduzido como: "sempre que um número trocar de membro, troca de sinal". Para elaborar este teorema, a criança associou conceitos e argumentos: adições, subtrações e igualdade constituem os conceitos e os valores numéricos atribuídos a "a", "b" e "c" são os argumentos. No entanto, há teoremas em ação que constituem proposições verdadeiras para algumas situações e que, se forem usados em outras situações, falham. Para a equação $x + 2 = 3$, vai funcionar o teorema em ação descrito acima, pois, quando o 2 mudar de membro, trocará de sinal; já para situações do tipo $2x + 3 = 5$, funciona para o número 3 e não funciona para o número 2, pois o 2 não passa com sinal trocado, e sim com sua operação inversa. Logo, o teorema em ação é falso para esta segunda situação. Com isso, percebe-se o caráter local e não universal do teorema em ação, o que constitui a sua principal diferença se comparado aos teoremas matemáticos cientificamente comprovados e aceitos. Um teorema em ação não é, necessariamente, um teorema, entretanto, pode ser modificado e evoluir para tal. Ajudar nesta transformação é um dos papéis do ensino.

Em outro exemplo, em que crianças precisavam comparar volumes de objetos, Vergnaud (1996, pp. 160-161) diz que "o primeiro esquema mobilizado foi o da comparação das alturas", e elas concluíram que "quanto mais alto, maior o volume". Na situação foi utilizado o conceito de altura e, portanto, é um conceito em ação; a hipótese das crianças, de que quanto mais alto o objeto maior é o seu volume, é um teorema em ação. Este teorema é verdadeiro para as situações em que os objetos possuam a mesma base e falso para situações mais gerais, em que a base não é sempre a mesma, pois daí desconsidera que a área da base do objeto influencia no seu volume. Neste sentido, para a criança reformular e ampliar seu teorema em ação, precisará de outras situações envolvendo volume, altura e base, a fim de compreender a relação de proporcionalidade ali envolvida: o volume é proporcional à altura e à área da base do objeto.

Conceituar ou conceitualizar, na perspectiva da TCC, significa aceder ao porquê dos esquemas e dos invariantes operatórios com o qual se enfrenta a situação (Grossi, 2017). Isso requer saber operar com tais esquemas e invariantes ao mesmo tempo que requer saber falar sobre eles. Neste sentido, a conceituação, para Vergnaud (1996, 2017), significa desenvolver duas formas distintas de conhecimento, porém complementares: a forma operatória, que permite agir em situação, que é o saber-fazer; e a forma predicativa, que permite enunciar, falar sobre os objetos e suas propriedades, que é o saber-explicar.

Uma pessoa, por exemplo, executa muito bem uma função, uma tarefa, em seu trabalho, mas, quando precisa comunicar suas ações a um colega que irá auxiliá-lo, pode não "[...] estar em condições de formular completamente o que considera verdadeiro ou razoável, da mesma forma que as palavras lhe faltam [...]" (Vergnaud, 2009, p. 18). Ainda, é possível dizer que a forma predicativa não atinge sua forma operatória e, por isso, fracassa em transmitir o seu saber-fazer.

Vergnaud (1996) apresenta a metáfora do *iceberg* da conceituação para explicar as formas com que os invariantes operatórios podem se apresentar na conceituação. Para o autor, conhecimentos explícitos constituem apenas a parte visível do *iceberg* e, na parte escondida, está a maior parte dos conhecimentos, que, por sua vez, são implícitos. No entanto, uma parte não existe sem a outra. Neste sentido, sendo o *iceberg* a representação dos invariantes "operatórios", a operacionalidade dos conhecimentos (forma operatória) está em todo o *iceberg*, desde sua base, onde o "fazer tem prioridade sobre o dizer" (Grossi, 2017, p.9), até a parte visível e explícita, enquanto o saber-explicar (forma predicativa) só é possível a partir dos conhecimentos que já estão explícitos.

Ademais, acreditamos que nem todos os conhecimentos explícitos, representados por meio de gestos, ações, linguagens e símbolos, estão na sua forma predicativa. No exemplo que apresentei da pessoa que faz com eficiência seu trabalho, mas não consegue comunicá-lo com a mesma competência, é possível perceber explicitações de seus conhecimentos acompanhando sua atividade, pois na ação há manifestação de conhecimentos, mesmo sem uma elaboração discursiva. Assim, acreditamos que a forma predicativa é mais do que explicitar, é saber-explicar o que fez e o porquê fez quando atuou em situação. A partir dessas ideias, formulamos a Figura 1, que representa nosso entendimento deste processo de conceituação.

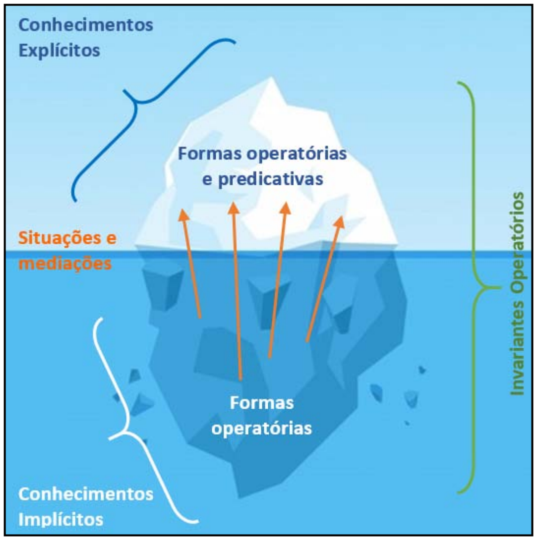


Figura 1. Iceberg da conceituação

Com efeito, a conceituação não é uma simples passagem de conhecimentos implícitos a explícitos ou da forma operatória à predicativa. Ela está no movimento, no processo que envolve situações a serem vividas, resolvidas e superadas e mediações, principalmente no âmbito escolar, porque há diferentes níveis de compreensão nos conhecimentos operatórios dos sujeitos em atividade, os quais levam a diferentes níveis de compreensão dos conhecimentos predicativos. Na experiência, no enfrentamento das situações, os níveis de compreensão se complexificam.

Para explicar o raciocínio, um sujeito pode operar com determinados conceitos, ter sucesso e explicar o que fez e como fez. Há, portanto, uma manifestação do saber-fazer e do saber-explicar. Numa próxima situação do mesmo campo conceitual, a operação realizada anteriormente pode não servir e, então, precisará encontrar outros meios de resolver ou reformular as ideias anteriores. A partir disso, haverá também a manifestação do saber-fazer e do saber-explicar com algumas diferenças, porque houve modificações nas operações empregadas e nas suas compreensões sobre o que fez.

Em síntese, há que se considerar os diferentes níveis de complexidade do conhecimento operatório e do predicativo no processo de conceituação. Segundo Muniz (2009, p. 50), o "pensar como eu pensei", o "tomar consciência dos caminhos e descaminhos que percorreu", são fundamentais na produção dos esquemas e dos invariantes operatórios. E é essa compreensão conceitual, no movimento da manifestação dos invariantes operatórios do campo conceitual das Funções, que interessa a essa pesquisa.

Neste sentido, consideramos que a conceituação científica de sujeitos em escolarização se dá mediante a construção de campos conceituais em que cada conceito deste campo passa por um processo de complexificação a partir dos conhecimentos operatórios e predicativos. E isso não acontece do dia para a noite. É um movimento intelectual gradativo, que depende das mediações, dos incentivos que recebe, das situações com as quais se depara e das interações que estabelece.

Para Vergnaud, na Matemática há dois campos conceituais a serem considerados: os campos das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. No entanto, não são os únicos que existem. Em uma de suas obras, o autor traz como exemplo a eletricidade que a partir de um conjunto de situações como a iluminação de uma sala, a ligação de uma lâmpada à pilha, exigem a compreensão de um conjunto de conceitos como circuito elétrico, tensão, resistência elétrica e etc. (Vergnaud, 1996).

Dessa maneira, pensamos que é possível falar em Campo Conceitual das Funções Matemáticas dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas, ou seja, um conjunto de situações, cujo tratamento implica no uso de relações de correspondência e dependência entre variáveis, ao mesmo tempo que diversos outros conceitos são envolvidos: proporcionalidade, taxa de variação, taxa fixa, regularidade, generalização, continuidade, entre outros.

Ainda, é possível delimitarmos um conjunto de situações, cujo tratamento implica, especificamente, no uso de relações de correspondência biunívoca e de taxa de variação constante. Assim, tal conjunto pode ser compreendido como o Campo Conceitual das Funções Afim. Nesse sentido, podemos pensar no Campo Conceitual das Funções Afim como parte de um campo maior, o das Funções Polinomiais, que, por sua vez, fazem parte do Campo Conceitual das Funções.

Como já dito anteriormente, consideramos que o Campo das Funções está dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas. Além disso, dentro do Campo das Funções Afim, temos seus diferentes tipos, como por exemplo, Função Identidade, Função Constante e Função Linear, que requerem, cada uma, um conjunto de situações específicas. Esse exercício de delimitar as Funções Afim como um campo conceitual ajuda-nos a identificar as situações que dão sentido ao conceito e, consequentemente, os invariantes operatórios e as representações que os estudantes deverão desenvolver nesse campo conceitual.

Independentemente do campo conceitual de interesse, a ser ensinado e aprendido, é fundamental considerar as diferentes formas de estabelecer uma situação didática, os diferentes contextos em que estas situações estão inseridas e as principais noções conceituais envolvidas. Para Vergnaud (2014), quanto mais diversificadas forem as situações, mais condições os estudantes terão de compreender o respectivo campo conceitual. Neste sentido, foi importante sistematizar os principais invariantes operatórios que constituem o campo conceitual em questão, no sentido de servirem como categorias de análises do estudo. Isso se mostra indispensável para a pesquisa, que visa investigar as manifestações das representações e das compreensões destes elementos pelos estudantes, pois nos permite ter clareza do que olhar nas mobilizações conceituais deles durante a ação de resolver um problema.

A partir de uma análise das situações apresentadas em livros didáticos foi possível categorizar os principais invariantes operatórios associados à compreensão do conceito de Função Afim. Tais invariantes categorizados são do tipo conceitos em ação, pois não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos na situação, podendo ser úteis ou não para sua resolução e, fundamentalmente, são os conceitos que dão sustentação aos teoremas em ação elaborados pelos estudantes. Essa categorização se mostrou indispensável para a pesquisa, que visa investigar as manifestações das representações e das compreensões destes elementos pelos estudantes, pois nos permite ter clareza do que olhar nas mobilizações conceituais deles durante a ação de resolver um problema. No Quadro I apresentamos com mais detalhes os quatro invariantes operatórios categorizados.

QUADRO I
Invariantes operatórios categorizados

Invariante Operatório	*Observações*
Variável	Representação simbólica para grandezas que variam de acordo com a situação. Possibilitam a generalização da relação estabelecida entre as grandezas.
Taxa de variação constante	Seja a Função $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$. Dados x, $x + h \in R$, sendo $h \neq 0$ o acréscimo (ou decréscimo) em x, o número $a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos x, $x + h$ (LIMA et al, 2002).
Taxa fixa	Seja a Função $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$. O coeficiente b é o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja $f(0) = b$, sendo às vezes, chamado de valor inicial da função f ou taxa fixa (LIMA et al, 2002).
Correspondência biunívoca	A Função $f : A \rightarrow B$ é bijetora quando, para todo elemento $y \in B$, pode-se encontrar um único elemento $x \in A$, ou quando todo elemento $y \in B$ é imagem de apenas um elemento de $x \in A$ (DANTE, 2014).

É por meio da observação das representações que podemos inferir sobre as capacidades operatórias do estudante. No entanto, para sabermos sobre sua compreensão das noções que está operando será preciso perguntar para ele. E será por meio de suas explicações e argumentos que nós, professores e pesquisadores, teremos condições de conhecer mais sobre seus conhecimentos, portanto, investigar as mobilizações conceituais, suas representações e compreensões requer olharmos para a ação do estudante na resolução das situações propostas, nas justificativas e explicações que dá sobre suas ações. Requer identificarmos os invariantes operatórios, a fim de detectar os esquemas ineficazes e tentar auxiliar os estudantes na tarefa de transformá-los em esquemas aplicáveis. Assim, passamos, no próximo item, à discussão dos recursos tecnológicos por meio do qual o estudante pode estar manifestando suas ideias.

3. A programação de computadores e o processo de conceituação

Considerando os diversos ambientes tecnológicos disponíveis para o planejamento e execução das situações didáticas, principalmente em relação à Matemática, há que se pensar sobre o recurso tecnológico utilizado na pesquisa desenvolvida. Se nossa escolha é trabalhar com as Funções Afim, poderíamos utilizar softwares como o Geogebra, o *Winplot*, o *GraphEq*, o *Graphmatica*, entre outros, que se constituem ferramentas interessantes e capazes de dinamizar os objetos matemáticos pertinentes ao conteúdo.

No entanto, nos aproximamos das ideias de que o ato de escrever um algoritmo é associado à ação de “ensinar” o computador a fazer algo, seja um desenho, um cálculo, o movimento de um objeto na tela do computador ou outra coisa. E para “ensinar” é necessário dispor de conhecimentos tanto da ferramenta computacional quanto do conteúdo envolvido. Um ambiente de programação proporciona o *feedback* contínuo entre a ação do programador e resposta do *software*, e a profusão de representações dinâmicas com as quais o aluno interage e expressa suas ideias (Papert, 1985, 2008).

Para Papert (1985, 2008), programar permite a construção de micromundos, onde a criança pode criar e recriar objetos e movimentos, aplicando seus conhecimentos tanto cotidianos como científicos. Se ela deseja programar o movimento de um ponto para que desenhe um quadrado, por exemplo, precisará mobilizar conhecimentos reais sobre a figura geométrica e sobre os movimentos necessários para este ponto realizar o desenho. Na tela do computador, a criança passa a ver o que ela mesma projetou, o que ela sabe sobre aquilo que fez e se seu programa desenhou um quadrado ou não. Isso possibilita reformular suas ideias até conseguir alcançar seu objetivo.

O processo sequencial, utilizado na elaboração de algoritmos, permite que a criança, ao testar suas hipóteses sobre a realização de um procedimento na forma de linguagem de programação, confronte imediatamente os resultados a partir do *feedback*. Este retorno imediato na tela do computador, permite a reflexão sobre a ação e, se necessário, a reformulação das hipóteses iniciais para testá-las novamente. É um processo em espiral (Valente, 2005), em que podemos perceber nas representações dos códigos, as descrições do pensamento e os diversos conhecimentos em ação.

A partir de influências piagetianas, Papert e Vergnaud associam-se à perspectiva da epistemologia genética, na qual o desenvolvimento cognitivo acontece no desequilíbrio constante das estruturas mentais dos sujeitos na interação destes com os objetos. Para Papert, o desequilíbrio se dá no processo de criação dos "micromundos" pela criança com a programação de computadores e, para Vergnaud, acontece na necessidade de resolver as situações na sua vida. Em ambos os casos, por meio de micromundos ou situações, a criança mobiliza-se em busca dos elementos que lhe faltam e, assim, aprende.

A realização de uma tarefa desafiadora por meio da programação de computadores dá indícios, a princípio, que os esquemas do estudante são desequilibrados pela situação proposta e a busca pelo reequilíbrio propicia o desenvolvimento de uma espiral de aprendizagem, na qual denominamos espiral da conceituação. Assim, elaboramos uma ilustração, representada pela Figura 2 a fim de representar a aproximação que estamos fazendo. A partir da situação (micromundo) no centro da imagem, vão se desenvolvendo os elementos da espiral em níveis de compreensão diferenciada, o que caracteriza o enriquecimento dos esquemas e dos invariantes operatórios.

Para tanto, qualquer ambiente de programação poderia ser utilizado para a realização deste estudo, desde que permita o trabalho com variáveis, a interação com o usuário e que faça cálculos matemáticos. Diante de várias opções, algumas razões nos levaram a escolha do ambiente Scratch, lançado em 2007 pelo *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Primeiramente, porque é um ambiente gratuito, de fácil acesso aos estudantes e professores de escola pública e possui um *website* com muitas informações relevantes, tutoriais, compartilhamento das criações e a possibilidade de usar o ambiente de forma *online* ou *offline*.

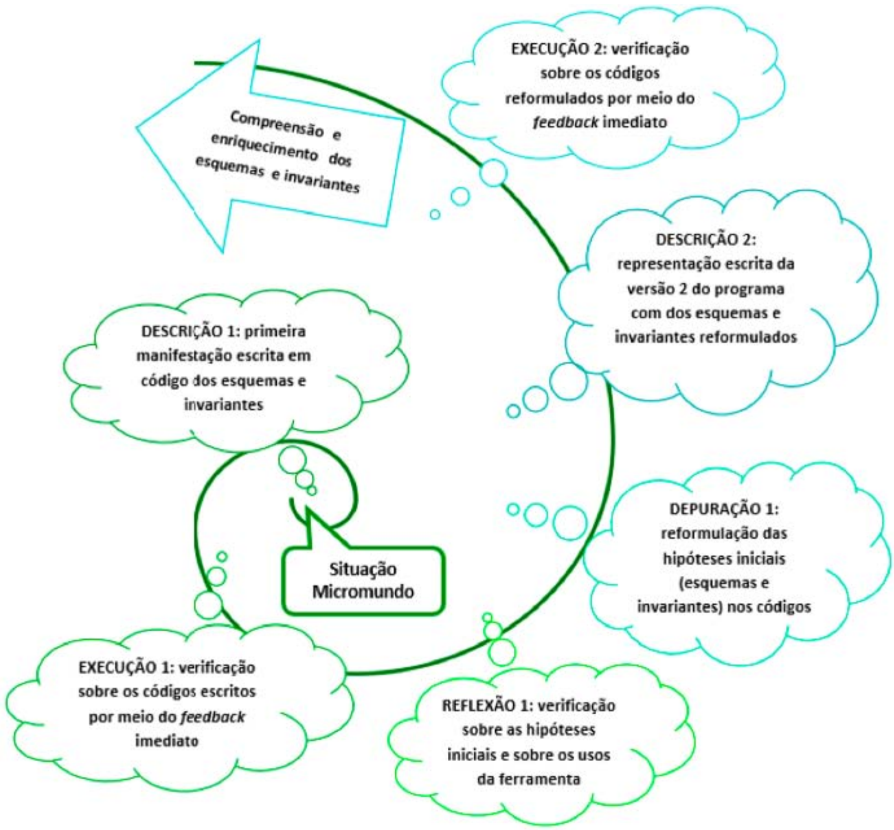


Figura 2. Espiral da Conceituação

Depois, ao comparar programações simples em alguns ambientes, percebemos que a linguagem em blocos avança no sentido da aplicabilidade para a educação em relação às linguagens de programação em texto. Segundo Marji, para se programar com as linguagens em texto, "[...] você deve dar comandos ao computador no que parece ser uma forma enigmática de inglês" (2014, p. 21), possuindo regras próprias de sintaxe, que a princípio são desafiadoras aos estudantes.

Neste sentido, programação em blocos parece favorecer a utilização da lógica de programação quando comparado a ambientes que possuem a programação baseada em texto, uma vez que os comandos estão todos visualmente disponíveis aos usuários bastando apenas "arrastar" os blocos e "montar" o algoritmo, evitando erros de sintaxe. Além disso, são ambientes cujos comandos têm tradução para a língua portuguesa, facilitando de forma considerável o trabalho com estudantes da escola básica.

A partir das características específicas dos ambientes de programação, e mais especificamente, das peculiaridades do Scratch, vemos uma grande potencialidade nas elaborações conceituais dos estudantes, quando noções são postas em ação, testadas e reformuladas. Neste sentido, nos interessamos em saber como estes processos de elaborações acontecem, como os conceitos em ação e os teoremas em ação se desenvolvem, como são representados nos códigos de programação e como são compreendidos pelos estudantes.

4. Metodologia

Esta pesquisa insere-se numa perspectiva que se preocupa com o universo dos significados e com um nível de realidade que não pode ser quantificada (Minayo, 2013). Ao assumir a postura epistemológica construtivista de que o conhecimento não está nos sujeitos e nem fora deles, mas é construído nas interações estabelecidas, preocupamo-nos com o processo, com o como, o porquê e os meios com os quais os sujeitos compreendem o mundo, culminando, portanto, numa pesquisa qualitativa.

O estudo empírico da pesquisa aconteceu em três momentos, conforme sistematizado na Figura 3. Primeiramente, realizamos uma ambientação (três encontros de duas horas cada) com a turma de estudantes do terceiro semestre do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus Erechim*, ingressantes em 2017, que cursavam concomitantemente a 2ª série do Ensino Médio em escola pública do município de Erechim/RS. No segundo momento, aplicamos um instrumento de diagnóstico com toda a turma que objetivou selecionar os estudantes (Alan e João, 16 anos de idade) e servir como diagnóstico dos conhecimentos destes para a próxima etapa.

O terceiro e último momento foi a etapa empírica mais importante desta pesquisa, pois a partir dela foi possível produzir o material de análise. Esse momento aconteceu em um encontro de 3h30min com cada estudante, na qual realizamos, primeiramente, uma entrevista sobre suas respostas no instrumento de diagnóstico aplicado com a turma toda na etapa anterior. O objetivo foi estabelecer um panorama do que eles sabiam sobre os conceitos matemáticos. Em seguida, realizamos a atividade no ambiente de programação, em que o estudante solucionou as situações com o Scratch e nós fizemos as intervenções sob o método da observação interativa. A transcrição desse momento gerou o protocolo diagnóstico e o protocolo Scratch que foram nossos materiais de análises.

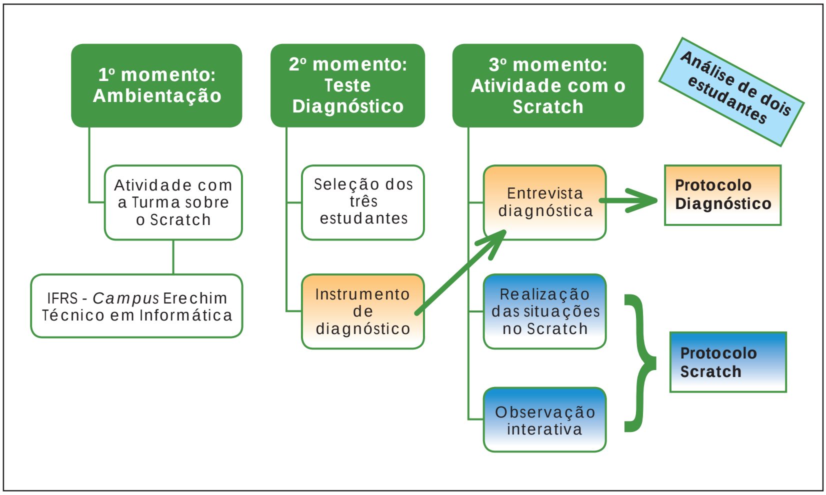


Figura 3. Etapas do método

O instrumento de diagnóstico foi constituído de três questões sobre Funções Afim e uma sobre a programação em Scratch. A primeira era uma situação de deslocamento de um corpo em função do tempo, em que a lei da função foi dada. A segunda solicitava a modelagem da Função Afim que relacionava o valor pago ao se frequentar um parque de diversões em função do número de brinquedos usados. A terceira questão informava o gráfico de uma Função Afim, os dois pontos de interseção com os eixos ordenados e solicitava a modelagem dessa função. E, por último, a questão com o Scratch solicitava que o estudante realizasse um programa de livre escolha, mas que contivesse os seguintes comandos: variáveis, o sensor pergunte e espere a resposta, operadores, movimentos e aparência.

Na entrevista diagnóstica, elaboramos roteiros de entrevista individualizados para cada estudante de modo a compreendermos melhor os seus entendimentos sobre os invariantes operatórios presentes em suas respostas. Questionamos sobre o modo de resolução apresentado, sobre o significado dos elementos matemáticos presentes nas resoluções, sobre as relações entre as questões, entre outras. O roteiro serviu como orientação para nossa intervenção, possibilitando que outras questões surgissem durante a conversa.

As situações com o Scratch foram elaboradas com o objetivo de proporcionar a manifestação dos teoremas em ação relacionados ao Campo Conceitual das Funções Afim através da programação de computadores. No Quadro II apresentamos os enunciados das situações.

QUADRO II

Situações com Scratch

SITUAÇÃO 1 (S1) - ANDANDO DE TAXI

Numa certa cidade, o cálculo para saber quanto custará uma corrida de taxi é feito a partir da fórmula P = 2,50 + 1,40q, em que q é a quantidade de quilômetros e P é o preço final da corrida.

a) Crie um programa no Scratch no qual um usuário qualquer deste programa possa inserir as quilometragens percorridas em suas viagens e obter o vaIor gasto em cada uma.

b) Vamos supor agora que uma pessoa tenha um certo valor em Reais, por exemplo, R$ 80,00 e deseja saber quantos quilômetros ela poderia percorrer nesta cidade. Como o Scratch poderia ajudar estas pessoas que querem saber a quilometragem que poderá ser percorrida a partir do dinheiro que elas possuem?

SITUAÇÃO 2 (S2) - SALÁRIO

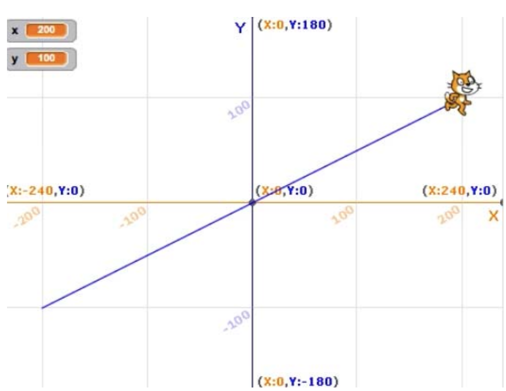
A remuneração mensal dos funcionários em diversos estabelecimentos comerciais do estado do Rio Grande do Sul é composta de duas partes. Uma parte fixa, referente ao piso regional do comércio (salário base) de R$ 1.150,00, e uma parte variável, que se constitui de 20% do valor total das vendas do mês anterior deste funcionário.

a) Elabore no Scratch, um programa para que os funcionários destas lojas possam simular seu salário mensal a partir da inserção do total das suas vendas no mês. Teste para uma venda de R$ 50.000,00 no mês.

b) Um funcionário precisa receber no mês de junho um salário mínimo de R$ 7.500,00 para conseguir pagar suas contas. Dessa forma, quanto precisará ser o seu total de venda no mês anterior? Faça um progama no Scratch que responda a essa pergunta e que possibilite calcular o valor de vendas mensais a partir do salário desejado.

SITUAÇÃO 3 (S3) - QUAL É O SEGREDO

A imagem abaixo, produzida no Scratch, representa uma trajetória retilínea que o personagem desenha no plano cartesiano. Visualize a execução do programa no vídeo disponibilizado em <https://goo.gl/z2Ht89> e, a partir disso:



a) Encontre o modelo matemático por trás do movimento.
b) Reproduza esta construção no Scratch, considerando as modificações nas variáveis *x* e *y* a cada movimento do personagem. Sugestão: inicie em (-200, -100).

SITUAÇÃO 4 (S4) - RESTAURANTE
Em certos restaurantes, há duas modalidades de serviços prestados para o almoço: I - Buffet Livre: em que é cobrada uma taxa por pessoa, independente do seu consumo. 2 - Buffet a quilo: em que é estipulado um preço por quilograma e o valor cobrado será proporcional ao consumo. a) Elabore um programa no Scratch que auxilie um usuário a saber quanto custou seu prato de comida, em qualquer restaurante desse tipo, e qual modalidade foi usada. b) Elabore outro programa no Scratch que nos ajude a descobrir o valor máximo a ser consumido para ser vantajoso o Buffet a Quilo, em qualquer restaurante desse tipo.
SITUAÇÃO 5 (S5) - LIVRE
Crie um programa no Scratch que represente uma situação matemática que envolva as Funções Afim, ou seja, uma situação que estabeleça uma certa relação do tipo $f(x) = ax + b$ entre duas variáveis. Use sua criatividade.

A observação interativa caracterizou-se como um método de intervenção, baseado nas estratégias de entrevistas que Piaget (1977, 1978) e seus colaboradores (Inhelder e Caprona, 1996) desenvolveram em seus trabalhos sobre epistemologia genética, notadamente as diversas modificações realizadas ao longo dos anos em virtude de adaptações às questões de interesse.

Nesta nova abordagem, chamada de observação interativa, “[...] as intervenções do observador são controladas de forma a não interferir na compreensão do funcionamento de seus próprios conhecimentos por parte do sujeito” (Saad-Robert, 1996, p. 129). Quando ocorrem, as perguntas não devem direcionar, mas esclarecer para o observador os processos, as condutas, as ações empregadas na atividade de resolução.

Considerando que o objetivo desta pesquisa é investigar as manifestações conceituais no ambiente de programação, ou seja, investigar os invariantes operatórios que estão sendo postos em ação, suas representações e compreensões pelos estudantes, nos aproximamos mais dos estudos de Inhelder e seus colaboradores sobre os aspectos funcionais do conhecimento. Assim, constituímos o método de intervenção com os estudantes durante a atividade empírica, a qual chamamos também de observação interativa, com o objetivo de explorar as formas predicativas dos conhecimentos em ação dos estudantes sem pretender, entretanto, influenciar e direcionar os raciocínios. Neste sentido, estabelecemos também um roteiro de orientação, que serviu como norte para as perguntas feitas aos estudantes sem, entretanto, pretender engessar a conversa, pois outras perguntas surgiram no decorrer da atividade, assim como algumas previstas não foram feitas.

Na descrição dos resultados, apresentamos quadros com imagens dos programas realizados pelos estudantes no Scratch e excertos de suas falas. Para a organização dos diálogos nesses quadros, usamos a letra P para pesquisadores, A para Alan e J para João.

5. Resultados

A partir da análise dos dados, foi possível perceber as manifestações conceituais dos dois estudantes sobre os quatro invariantes operatórios categorizados por meio das representações feitas tanto nos códigos de programação (na sua forma operatória) quanto nas falas (na sua forma predicativa). No entanto, foi essa última forma que nos permitiu saber sobre sua compreensão do invariante, pois, conforme já discutido, a forma operatória nem sempre vem acompanhada de compreensões explícitas. Neste sentido, é possível afirmar que os estudantes conseguiram operacionalizar o conceito matemático na programação de computadores e que compreenderam o que estavam fazendo.

A terceira situação proposta nas atividades com o Scratch mostrou-se mais desafiadora aos dois estudantes, pois associou movimento, variáveis e o conceito de variação constante, que, provavelmente, nunca tinham sido relacionados dessa forma antes. Isso proporcionou desequilíbrios nos conhecimentos prévios deles, tanto de matemática quanto de programação, levando-os a apostar mais em estratégias de tentativas e erros. Neste sentido, é possível dizer que seus esquemas e teoremas foram testados e reformulados a fim de adaptarem-se à nova situação. Com isso, iremos limitar a discussão dos resultados ao invariante operatório *taxa de variação constante*, que possibilitou respondermos ao problema de pesquisa.

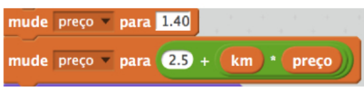
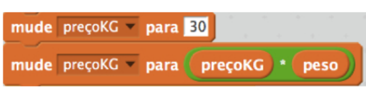
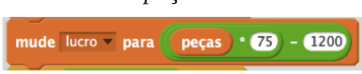
5.1. *Análise de Alan*

No diagnóstico de Alan, a partir da atividade feita no papel, a taxa de variação constante aparece como a ideia de que o coeficiente “*a*” da função multiplica pela variável independente. É o que aparece na forma operatória do invariante, quando se está fazendo cálculos. No entanto, quando questionado, Alan manifesta na forma predicativa a noção de variação constante, ou seja, o coeficiente “*a*” representa o quanto varia “*y*” a cada unidade de variação de “*x*”.

Nas situações com Scratch, a noção de variação constante aparece, tal como antes, na forma operatória quando usa o comando multiplicação das operações do Scratch e na forma predicativa a partir das suas falas. Neste sentido, o mesmo teorema em ação se manifesta na qual interpretamos da seguinte forma: *numa função do tipo f*(x) *= ax + b, a cada unidade de variação de x, há uma variação constante em f*(x) *determinado pelo coeficiente "a"*. No Quadro III, apresento recortes dos programas que Alan criou para S1, S2, S4 e S5 apenas das partes que correspondem à operação de multiplicação e, também, trago excertos que corroboram com as ideias apresentadas.

QUADRO III

Manifestações na S1, S2, S4 e S5, por Alan

S	*FO*	*FP*
S1(a)	$P = 1{,}40q + 2{,}50$ 	- P: O que é o 1,40? - A: *É o preço pela quilometragem.* - P: Para cada quilômetro que passa, quanto se paga na corrida? - A: *1,40 a cada quilômetro.*
S2(a)	$f(x) = 0{,}2x + 1150$ 	- A: [...] os 20% do total das vendas, que seria 0,2 vezes o preço de vendas.
S4(a)	*Preço* = 30 * *peso* 	- P: O que significa os 30? - A: É o *peso por quilo.* - P: O que ele faz no cálculo? - A: Ele multiplica pelo peso da comida que a pessoa comer.
S5	*Lucro* = 75 * *peças* - 1200 	- A: ... agora para cada peça, o preço de venda de cada uma é... vamos botar 75.

Outro aspecto importante a considerar é sua resolução na S3 (*b*), na qual apenas obteve sucesso após várias descrições, execuções, reflexões e depurações do código. Primeiramente, na letra (*a*), Alan aplicou sua estratégia de modelagem da Função a partir de dois pontos do gráfico, mas cometeu um pequeno erro e encontrou a função $y = 0{,}25x + 0{,}5$ ao invés de $y = 0{,}5x$. No item (*b*), sem usar o modelo gerado no item (*a*), usou uma estratégia inicial de tentar criar um movimento do ator a partir de um ângulo de inclinação com a horizontal. Fez várias tentativas, mas não conseguiu estabelecer a relação do ângulo necessário de inclinação do ator e a trajetória solicitada na questão.

Depois disso, passou a usar outra estratégia e estabeleceu a seguinte relação entre as coordenadas *x* e *y*: “quando *x* anda 20, y anda 10”. Após realizar algumas tentativas e erros com os comandos do Scratch, a fim de fazer o ator andar e marcar suas coordenadas nas variáveis criadas, elabora seu programa final. No término de sua programação, questionamos sobre a relação deste programa com a função modelada no item (*a*) e ele percebe que há algo errado no seu modelo. Após arrumar o modelo para $y = 0{,}5x$, questionamos novamente sobre a relação e ele manifesta compreender, então, a relação existente entre o coeficiente “*a*” da função e o movimento das coordenadas do ator do programa no Scratch. O que se percebe, portanto, é a operacionalização de duas noções a respeito da Função Afim da S3, que é a variação constante da $f(x)$ em relação a *x* dada pelo coeficiente 0,5 e a ideia de proporcionalidade com os valores das coordenadas *x* e *y*, tendo em vista ser uma Função Linear.

A ideia da variação foi, portanto, mais uma vez manifestada quando relacionou tais variações com uma progressão aritmética, ao dizer “andava 2 e andava 1”, e a ideia de proporcionalidade fica clara na sua resposta à pergunta sobre o que fazer se a função fosse $y = x/3$, no final da conversa sobre essa situação. Assim, é possível descrever essas ideias a partir do seguinte teorema em ação: *i) na função* $f(x) = 0{,}5x$*, a cada unidade de variação em x, há meia unidade de variação em y e, também, os valores da ordenada são sempre a metade dos valores da abscissa; ii) na função* $f(x) = x/3$*, os valores da ordenada são sempre um terço dos valores da abscissa.* No Quadro IV, é exposta a forma operatória e predicativa que ilustram o que acabamos de mostrar.

QUADRO IV

Manifestação na S3, por Alan

FO	*FP*
Primeira relação estabelecida:  	Enquanto assistimos ao vídeo novamente: - A: O *y vai ser o metade de x.* - P: Sempre? - A: Sim. [...] Quando faz sua primeira elaboração no Scratch: - P: Por que tu mandaste andar *x* + 20 e *y* + 10? - A: Para ele fazer isso aqui, *para ele sempre adicionar 20 ao x e 10 ao y.*

Depois que termina o programa, perguntamos:

- P: A relação que tu estabeleceste foi *x* anda 20 e *y* anda 10...
- A: *Sempre a metade.*
- P: Ok. O que essa relação tem a ver com a tua função do modelo?
- A: Isso aqui, porque... (aponta para o 0,5)... pensando bem, não faz sentido.
- P: O que não faz sentido?
- A: O *x*... tem 0,25 e não 0,5...

Alan coloca um *x* ao lado do 0,5 na função, ficando $f(x) = 0.25x + 0{,}5x$.

- P: Tá, tu colocaste o *x* do lado do 0,50 e isso faz alguma diferença?
- A: Está sendo a metade.

Revisa os cálculos, acha o erro e arruma a função para $f(x) = 0{,}5x$.

- P: Nesta fórmula aí, se eu colocar *x* igual ao 40, o que vai sair no *y*?
- A: 20.
- P: Por quê?
- A: Porque aqui é 0,5.
- P: E o 0,5 faz o quê?
- A: Ah... é isso ele deixa pela metade. Como aqui não tá somando nada (não tem o b), fica só esse valor aqui. Se colocar 20 no *x*, fica *y* igual a 10. Entendi agora.

Questionamos sobre o fato de ele não ter usado a resposta da letra (a) para fazer a letra (b) e ter estabelecido uma relação.

- A: Eu usei as marcações aqui, ele andava 2 e andava 1, conforme a PA.
- P: Se eu pedisse para fazer o movimento para $y = \frac{1}{3}x$, como tu faria?
- A: Colocaria $x = 21$ e $y = 7$, porque daí ficaria um terço.

Vemos, portanto, que o estudante Alan não utiliza de seus conhecimentos prévios já evidenciados no diagnóstico para resolver o item (*b*) da S3. Quando não consegue fazer o seu ator andar na direção que precisava por meio do ângulo de inclinação, desiste da estratégia (que não era ruim, porém faltavam-lhe elementos conceituais) e passa a estabelecer a relação de variação entre *x* e *y*, ou seja, "*x* anda 20 e *y* anda 10". Com as etapas de descrição, execução, reflexão e depuração, Alan encontra o caminho para fazer o ator andar e descrever a reta conforme o vídeo[1] da situação. No entanto, foram necessárias intervenções no sentido de fazer com que ele relacionasse seu programa com seu modelo matemático equivocado do item (*a*) da situação e que percebesse a relação entre o coeficiente "*a*" e a variação do y em relação a *x* no movimento do ator. A partir disso, percebe também a relação proporcional entre os valores das coordenadas *x* e *y*. Sobre os teoremas em ação, podemos ver uma ampliação da noção do conceito incluindo, a partir do Scratch, a ideia de proporcionalidade. No entanto, consideramos teoremas locais, pois estão centrados na situação específica das Funções $f(x) = 0{,}5x$ e $f(x) = x/3$. Para ter certeza de uma generalização da ideia, seria preciso ter proposto a realização da tarefa para outros tipos de funções, variando os valores dos coeficientes "*a*" e "*b*".

5.2. *Análise de João*

No diagnóstico, João manifesta a forma operatória do invariante da mesma forma que Alan manifestou, a partir da multiplicação do coeficiente "*a*" pela variável independente. E é possível perceber sua noção de variação constante, por meio da forma predicativa.

No ambiente de programação, João manifesta sua noção do invariante na forma operatória por meio dos códigos do Scratch e na forma predicativa por meio de suas explicações. O teorema em ação manifestado no diagnóstico é novamente percebido: *numa função do tipo* $f(x) = ax + b$*, a cada unidade de variação em x, há uma variação constante em* $f(x)$ *determinado pelo coeficiente "a"*. No Quadro V, apresentamos as ideias representadas por João sobre a S1, S2, S4 e S5.

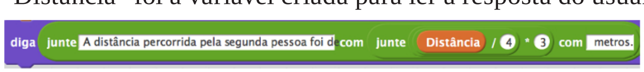
Assim como Alan fez na S3, João também utilizou o teorema em ação nas suas várias descrições, execuções, reflexões e depurações do programa. Na S3(a), que não necessitava o uso do Scratch, mas solicitava a descoberta do modelo matemático do movimento do ator no vídeo, João procurou descrever matematicamente a relação entre as variáveis por meio de raciocínio. Tendo em

[1] Vídeo disponibilizado em <https://goo.gl/z2Ht89>.

vista que o estudante não havia resolvido uma das situações do diagnóstico que solicitava a modelagem da lei da função a partir do gráfico e que na entrevista não soube falar sobre a questão, podemos dizer que, no momento da pesquisa, ele não tinha esquemas relacionados a procedimentos formais da Matemática para encontrar a lei da função dados dois de seus pontos.

QUADRO V

Manifestações na S1, S2, S4 e S5, por João

S1(a)	*FO*	Associa: Valor 1 = 1,40 e Valor 2 = 2,50 
	FP	- P: Ótimo. A cada um km que passa quanto que eu tenho que pagar a mais? - J: *A cada km seria 1,40 reais.* - P: Ok. Tentando relacionair com a situação 1 do diagnóstico, daria para dizer que o 1,40 tem a mesma função que o 3? Por quê? - J: Sim, por causa que no caso só mudando o conceito, que seria a questão da aceleração, *seria um multiplicador da variável recebida*.
S2(a)	*FO*	Associa: Porcentagem = 0,2- e Salário base = 1150 
	FP	- P: Qual é a diferença entre o 1150 e os 20%? - J: A aplicação dele. - P: Como assim? - J: Um seria um fixo e o outro *uma fração do valor.* - P: Um é uma constante fixa e outro é uma constante que muliplica pela variável1, é isso? - J: Sim.
S5	*FO*	"Distância" foi a variável criada para ler a resposta do usuário. 
	FP	- P: O que significa o 3/4 da tua função? - J: O quanto a segunda pessoa correu em relação a primeira.

Neste sentido, sua elaboração da S3(a) aconteceu mediante a estratégia de estabelecer uma lógica e fazer testes. Primeiramente, percebeu a relação "*x* anda

10 e y anda 5" e estabeleceu o modelo $y = (x + 10)/2$. Ao testar $x = -200$ fazendo contas no papel, não encontrou o correspondente $y = -100$ que ele observou ser o par ordenado de -200 no vídeo. Depois mudou para $y = (x + 10) * 2$ e ao testar $x = -200$ também não encontrou $y = -100$. Resolvemos intervir. Mostramos o vídeo novamente, fazendo pausas para que visse os valores das coordenadas até que ele chegou à função $y = x/2$. O que vemos, principalmente quando ele escreveu $x + 10$, é uma tentativa de estabelecer uma relação envolvendo os acréscimos que x e y recebem a cada movimento na tela. Isso indica que ele percebe a variação envolvida na função e que a variação de x influencia na variação de y, mas foi quando percebeu a relação proporcional existente entre as coordenadas dos pontos em que o ator do vídeo passava que conseguiu elaborar o modelo correto. Assim, explicita o seguinte teorema em ação: *se a cada passo em x é dado meio passo em y e a abcissa é o dobro da ordenada nos pontos, então, a Função que descreve o movimento é* $y = x/2$ *ou* $y = 0{,}5x$.

Na S3(b), em que precisava elaborar um programa, foi possível ver nos códigos a aplicação na forma operatória dessas ideias de "x anda 10 e y anda 5" quando João: criou as variáveis x e y, inseriu para cada uma os valores das coordenadas iniciais (-200, -100), usou um comando de movimento "vá para..." para que o ator se posicionasse nessas coordenadas no início do movimento e usou o mesmo comando de movimento para que ele adicionasse 10 ao x e 5 ao y dentro de um comando de controle, no caso, "repita até...". Mais adiante, após alguns testes sem sucesso, percebeu que o programa que elaborou não estava mudando o valor contido nas variáveis, assim, inseriu um comando de "muda x para $x + 10$" e "mude y para $y + 5$".

Ao final da atividade, fazemos um questionamento para João, que não foi feito para Alan, sobre o que aconteceria com a função $f(x) = 2x$ e $f(x) = 0{,}5x + 50$. Para a primeira função sugerida, percebeu rapidamente a relação proporcional entre os valores de x e y. Para a segunda, inicialmente João tentou projetar onde a nova função passaria, então, mudou os pontos iniciais do programa e o valor associado à variável y, colocando "$y + 25$". Fez o teste e percebeu que não deu certo. Voltou para "$y + 5$" e viu que deu certo. Assim, percebeu que as duas funções, $y = 0{,}5x$ e $y = 0{,}5x + 50$ possuem a mesma variação constante. No Quadro VI, apresentamos as ideias de João representadas nos códigos de programação e nas falas, o que nos possibilita interpretar os seguintes teoremas em ação: *i) nas funções* $f(x) = 0{,}5x$ *e* $f(x) = 2x$, *a relação entre x e y é proporcional ao valor do coeficiente "a"; ii) nas funções* $y = 0{,}5x$ *e* $y = 0{,}5x + 50$, *a relação de crescimento entre x e y é a mesma, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta meia unidade.*

QUADRO VI
Manifestação na S3(b), por João

<table>
<tr><th>FO</th><th>FP</th></tr>
<tr>
<td>

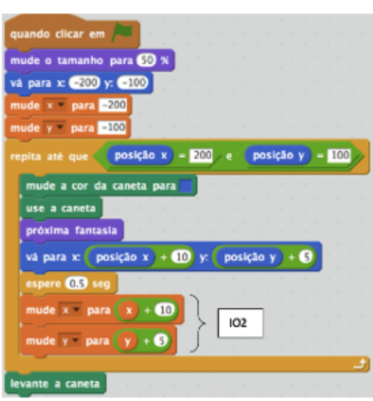
1) Faz um planejamento: criar variáveis, iniciar em x = -200 e y = -100, repetir o movimento até y = 100, com y + 5 e x + 10.

2) Primeira elaboração do programa:

O gato não sai do lugar.

3) Algumas modificações e elaborações intermediárias (tentativas e erros).

4) Última elaboração do programa:



</td>
<td>

- V: Me aplica a plano.
- J: *Criar as variáveis x e y, já atribuo o valor a elas de -200 e -100, e vai fazer uma repetição, y já tendo um valor de -100, até chegar no valor de 100, positivo, sendo que a cada repetição aumenta 5, e o x aumenta 10.*
- Depois de fazer a última elaboração do programa, pergunto:
- V: O que tem o ver esse 0,5 do teu modelo matemático com o movimento do gato?
- J: *Seria a multiplicação do x para resolver o y.*
- V: A cada variação do x, a cada unidade que o x aumenta, quanto aumenta no y?
- J: 0,5
[...]
- V: *Se eu tivesse um modelo que fosse y = 2x.* O que ia acontecer?
- J: ... o valor do x ia multiplicar com 2.
- V: Se iniciasse em x = -50 e y = -100, (aponto na tela com o mouse) o que ele ia fazer?
- J: Ia passar pela origem de novo, *daí vai dar um passo no x e o dobro no y e os pontos também ficam o dobro, quer dizer, x vai ser a metade agora*.
- V: E se fosse y = 0,5 x + 50, usando x = -200 e y = -50. Onde ele vai passar?
- J: Não vai passar mais pela origem.
- V: E será que essa relação do x e do y continua? Ou seja, x aumenta 10 e o outro 5?
- J: Não, acho que tem que mudar.
- Ele testa com o mesmo aumento, depois muda para y + 25 e não dá certo. Volta ao y + 5.
- V: O que está acontecendo? Qual a diferença entre essas duas construções (refiro-me a y = 0,5x e y = 0,5x + 50)?
- J: ... Ah, porque a lógica aqui aumenta o mesmo.
- V: Por que aumenta o mesmo? Mudamos a função, tem mais 50, mas a lógica de aumentar 10 e aumentar 5 continua a mesma. Por quê?
- J: Porque os valores são proporcionais ... e esse (50) só é um acréscimo ao valor anterior.

</td>
</tr>
</table>

Conforme pode ser visto, há também uma diversificação do teorema em ação do diagnóstico, aplicado aos casos específicos discutidos. Primeiramente, o estudante estabelece o modelo da Função por meio da observação à regularidade com que os pontos se modificavam no vídeo e estabelece a relação proporção: $f(x) = 0{,}5x$. No entanto, para criar seu programa no item (b) também não usa a lei modelada do item (a) e, assim como Alan, leva em conta a relação de variação "*x* anda 10 e *y* anda 5". Depois de tentativas e erros, de descrições, execuções, reflexões e depurações do código, João elabora seu programa. Quando questionado sobre a relação entre o 0,5 da função e o movimento do ator, percebe as duas noções do conceito, quando diz que "seria a multiplicação do *x* para resolver o *y*" e que, a cada unidade que o *x* aumenta, o *y* aumenta 0,5. Assim, foi possível perceber sua compreensão sobre a proporcionalidade e sobre a variação constante, estabelecer os teoremas em ação e verificar que a situação experimentada com a programação, juntamente com as perguntas, possibilitou a manifestação da ideia da taxa de variação num contexto de movimento.

Em síntese, percebemos que a aplicação de um teorema em ação prévio numa situação de contexto diferenciado pelo uso da programação não foi automática. Foi preciso um tempo para a realização de testes e conjecturas a fim de estabelecer as novas relações necessárias e perceber que se tratava da mesma ideia manifestada anteriormente sobre a variação constante de *y* em relação a *x*. Vergnaud (1996, 2009) se refere à necessidade de propor situações diferentes sobre um mesmo conceito matemático, nas quais o estudante se sinta desafiado o suficiente para, a partir do que sabe, construir ele próprio as novas relações, pois só assim haverá desequilíbrios que possibilitem novas assimilações, acomodações e adaptações. Pelo que pudemos perceber, a estratégia didática com o Scratch possibilitou isso.

Após a realização dessas análises, identificamos que diversas variações na elaboração da Situação 3 poderiam ser propostas a fim de explorar mais ainda o conceito de variação constante e, com isso, talvez seja possível que os estudantes generalizassem mais seus teoremas. Poderíamos ampliar as Funções para que tivessem valores dos coeficientes negativos, por exemplo, em que seja possível perceber a variação de decrescimento constante em certos contextos. Também, poderíamos aproveitar o recurso de movimento do ambiente de programação e propor uma situação que foque na relação do ângulo de inclinação do ator e as coordenadas dele, possibilitando uma aplicação da fórmula do coeficiente angular da Geometria Analítica. Portanto, é bem possível que outras relações pudessem, ainda, ser exploradas.

5.3. *A espiral da conceituação: concretização, dinamização, compreensão e reformulação dos invariantes operatórios*

Segundo a perspectiva de Papert (1985, 2008), a programação de computadores se constitui um meio para que as crianças externalizem expectativas intuitivas, tornando-as mais evidentes e acessíveis à reflexão. Por meio do estudo empírico, foi possível perceber as explicitações do pensamento dos estudantes através dos códigos, das reflexões e conjecturas que surgem na análise do que foi feito no programa e das reformulações de esquemas e teoremas em ação quando necessário. Neste sentido, consideramos que os invariantes operatórios das Funções Afim foram concretizados, dinamizados, compreendidos e reformulados por meio dos programas realizados.

Por concretização entendemos a possibilidade de criar alguma coisa, um objeto, um programa, um micromundo, que sirva para algo, mas que esta criação não está fisicamente ao alcance. Ela existe, só que pertence ao mundo digital proporcionado pelo computador. Por dinamização entendemos a possibilidade de criar movimentos e simulações na tela do computador que se utilizem de conceitos matemáticos, bem como a possibilidade de interagirmos com o que é criado.

Assim, na etapa de descrição da espiral da conceituação, há a concretização dos invariantes; na etapa da execução, há a dinamização do que foi pensado, com a realização do movimento ou a interação com o usuário por meio de perguntas e respostas; na etapa da reflexão, há a compreensão do que foi feito, se a ideia empregada foi eficaz ou não; e, finalmente, na etapa da depuração, há a reformulação, se for necessário, daquilo que foi percebido na reflexão. Na necessidade de melhorias no uso e na compreensão do conceito, há repetições das etapas da espiral.

Isso foi percebido nos dois estudantes e, como exemplo, cito a realização da S3(b) por Alan. Na Figura 4, mostramos quatro programas mais significativos. Nessa situação, o estudante elaborou uma hipótese inicial, no P1, de uso de ângulos de inclinação para fazer o ator andar e descrever o gráfico, executou o programa, percebeu erros, refletiu sobre tais erros e reformulou o programa mais algumas vezes com essa estratégia, até chegar no P2. Com a sucessão de erros usando ângulo de inclinação, mudou a estratégia. Passou a considerar a variação que as coordenadas da posição do ator do vídeo sofriam. Estabeleceu a ideia "*x* anda 20 e *y* anda 10" e foi testando comandos a fim de encontrar a melhor descrição. No P3, seu ator deu um passo e voltou à posição inicial (-200, -100). Com isso, percebeu que as variáveis *x* e *y* não mudavam, continuavam sendo sempre (-200, -100) e que a soma de 20 e 10 acontecia por apenas um instante.

Assim, reformulou algumas vezes até estabelecer uma mudança nas próprias variáveis, no P4, com os comandos “adicione a *x*: 20” e “adicione a *y*: 10”, chegando ao término da atividade.

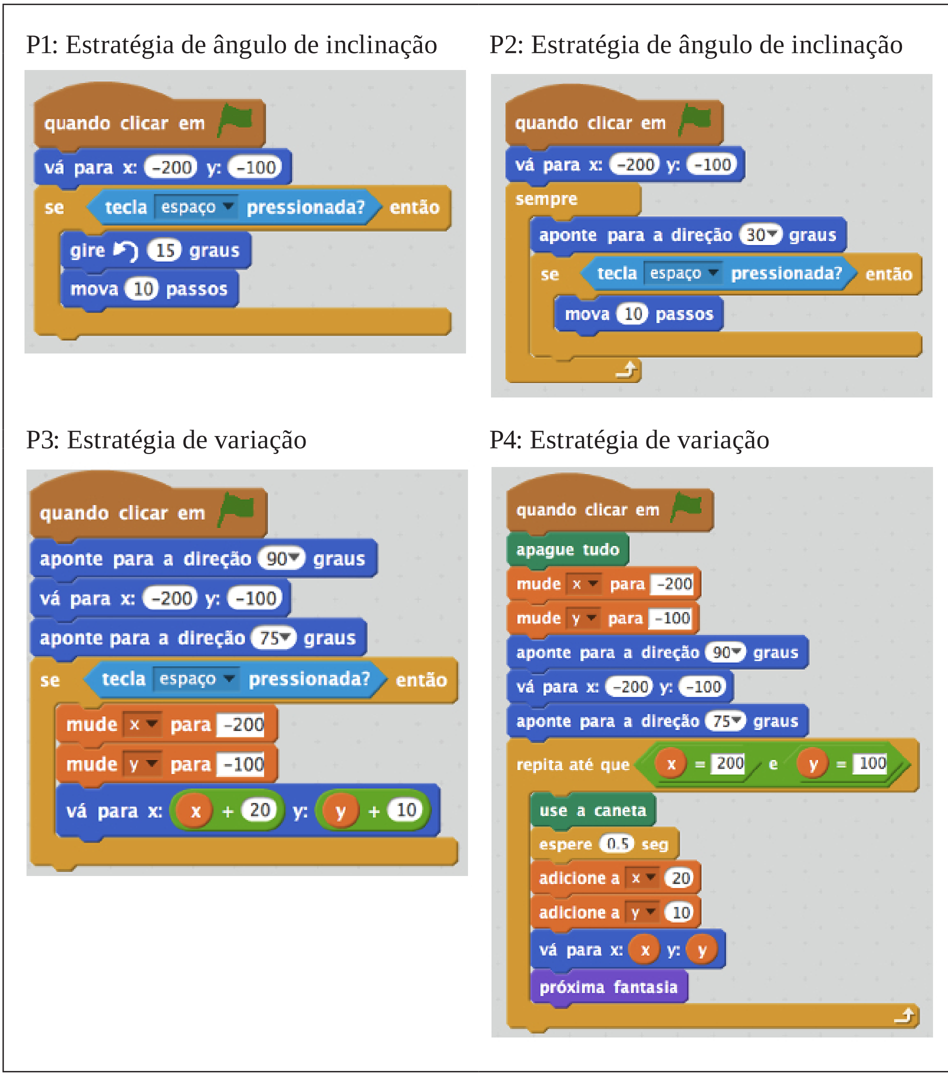


Figura 4. Estratégias do Alan

Dado o exemplo, consideramos que o invariante operatório *taxa de variação constante* foi mobilizado e operacionalizado dentro de cada uma das etapas da espiral. Isso significa que, na descrição do código, houve a concretização das ideias sobre o invariante; na execução do programa, houve a dinamização das ideias estabelecidas sobre esse invariante; na reflexão sobre o programa, houve a compreensão de aspectos que estavam errados e que poderiam ser melhorados; e, na depuração do programa, houve a possibilidade de reformulação das hipóteses anteriores e o estabelecimento de novas hipóteses sobre o uso do invariante. Isso permite complementar as etapas da espiral da conceituação com elementos relacionados aos invariantes. Na Figura 5, retomamos a ideia já delineada anteriormente, mas enfatizando as quatro etapas a partir das ações que descrevemos em relação aos invariantes.

Figura 5. Etapas da Espiral da Conceituação a partir das ações relativas aos invariantes operatórios

Em resposta ao problema de investigação, apontamos que essa pesquisa, a partir de todo estudo teórico e empírico realizado, permitiu mostrar que os processos de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, bem como a ampliação dos usos destes invariantes, aconteceram por meio das ações de concretização, dinamização, compreensão e reformulação proporcionados pelas etapas da espiral da conceituação a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores.

No Quadro VII, trazemos excertos das falas dos estudantes que sinalizam suas perspectivas sobre as situações realizadas com o ambiente de programação a partir de perguntas mais gerais. Estas perguntas ajudam no reconhecimento das possibilidades da programação de computadores para a identificação, desenvolvimento e manifestação de conhecimentos matemáticos.

QUADRO VII
Percepção dos estudantes sobre as situações no Scratch

Perguntas realizadas	*Respostas de Alan*	*Respostas de João*
O que tu achaste das atividades no Scratch?	Acho que ... fica mais dinâmico. [...] Acho que é mais visual e mais fácil de entender, porque tu estás vendo, aqui no papel não pode testar tanto sem usar o braço [...]. As questões bem simples são mais fáceis de fazer no papel, mas para quem não entende a matéria, aqui é melhor, assim, ah saquei!	Achei algumas até desafiadoras, que exigem usar um raciocínio lógico, não só na matemática, mas na forma como tem que construir [...]. Não chega a ser mais difícil, mas tem que ver a lógica de como vai montar, diferente do papel. Porque que tem uma ordem certa para montar...
- Tem alguma coisa específica que hoje tu passaste a entender melhor sobre matemática?	- Acho que tudo um pouco.	- Acho que a variação constante.

Dado o exposto, percebemos que os dois estudantes entenderam que as situações realizadas com a programação de computadores proporcionaram aspectos diferenciadores em relação às situações realizadas no papel. Para Alan, o Scratch foi mais dinâmico e visual, possibilitou vários testes rápidos e poderia proporcionar a compreensão de ideias e conceitos por quem ainda não havia compreendido o conteúdo. Para João, as Situações no Scratch exigiram o uso de conceitos matemáticos, que também são exigidas nas atividades no papel, mas, além disso, exigiu o uso de lógica de programação e a necessidade de estabelecer uma organização no pensamento para elaborar o algoritmo. Tais percepções, portanto, corroboram com os resultados dessa análise, em que entender, raciocinar, ver, testar, construir e montar (verbos trazidos pelos estudantes), são ações presentes nas etapas da Espiral da Conceituação.

Por último, consideramos que há vantagens evidentes no uso da programação de computadores para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos se comparado com atividades matemáticas que usam, exclusivamente, o recurso analógico do lápis e do papel. Conforme já foi dito, o uso de um ambiente de programação proporciona que as ideias e hipóteses sobre uma situação a ser resolvida sejam postas em ação nos códigos de uma forma organizada e seguindo uma lógica específica. Mas isso também pode ser realizado em atividades no papel, bem como em atividades mais práticas com material manipulável. No entanto, o feedback imediato entre a sequência de comandos e a execução da ação programada, a visualização do movimento, do cálculo ou da interação resultante, a facilidade de pensar sobre o resultado obtido que está visualmente acessível e, se necessário, a possibilidade de alterar as ideias iniciais e o código do programa, são aspectos que vão além do que os recursos analógicos oferecem. O que defendemos, portanto, é pensar a Educação Matemática no sentido de unir, mesclar, complementar metodologias e tecnologias analógicas e digitais, a fim de proporcionar mais e melhores situações aos estudantes.

6. Considerações finais

A análise dos dados produzidos na pesquisa teórica e empírica demonstra que, no processo de elaborar e descrever os códigos de programação, os invariantes operatórios foram manifestados, testados, reformulados e, de certa forma, ampliados a partir da estratégia didática com o Scratch. Também, suscitou pensar em diversas outras potencialidades que a programação poderia proporcionar ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos de um modo geral, quando permitiu explorar o invariante operatório *taxa de variação constante* por meio de um movimento do ator no *software*.

A partir disso, respondemos ao problema de pesquisa considerando que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores, aconteceu por meio das ações de *concretização*, na etapa de descrição, de *dinamização*, na etapa da execução, de *compreensão*, na etapa de reflexão, e de *reformulação*, na etapa de depuração da espiral da conceituação, conforme está representado pela Figura 5 já mostrada. Vale lembrar que, segundo Valente (2002), as etapas da espiral podem acontecer simultaneamente sem que possamos identificar na prática esse processo sequencial apresentado, por isso a conceituação é muito mais complexa do que é perceptível ao olhar do pesquisador e do professor. O observável é apenas a parte visível do *iceberg* da conceituação do estudante que, conforme Vergnaud (1996), sem a parte escondida nada seria.

Fazendo uma associação desse modelo da espiral com o modelo do *iceberg* da conceituação daria para dizer que, dentro do *iceberg*, para cada situação proposta, há uma espiral, cuja função estaria em levar os conhecimentos da forma operatória para sua forma predicativa, não de maneira linear, mas processual, respeitando o tempo, as condições, as potencialidades e os limites de cada sujeito. É possível pensar numa imagem que integrasse os dois modelos, mas, com receio de limitar a ideia apresentada, deixamos a criação de tal representação simbólica sobre o que falamos para o entendimento e a abstração do leitor.

Tendo em vista o exposto, a pesquisa se mostrou valiosa tanto na elaboração das situações com a programação de computadores quanto no estudo das manifestações conceituais dos estudantes, uma vez que valorizou tanto a operacionalidade dos esquemas e invariantes na atividade quanto as explicações e noções interpretativas que o estudante tem do que está fazendo. O diálogo de evidenciação dos teoremas em ação que estabelecemos com cada estudante pelo método da observação interativa mostra que assumir a verbalização dos estudantes sobre suas produções, além da análise sobre as ações, foi importante à pesquisa, bem como abre novas possibilidades para a práxis na sala de aula. Nas palavras de Muniz, “desilenciar a aula de Matemática é preciso” (2009, p. 51).

É importante retomar a ideia de que a pesquisa com dois estudantes, realizada de forma individual, foi importante para conseguir adentrar nas minúcias das elaborações conceituais e verificar os processos de representação e de compreensão de cada um. A partir de agora, é possível pensar em práticas para salas de aula reais, com um número maior de estudantes, tendo como base os resultados desta pesquisa. Além disso, acreditamos ser indispensável que tais práticas promovam uma cultura de colaboração, de partilha e de rede entre os pares, em que possam dialogar, discutir, concordar e discordar, construir juntos e, portanto, explicitar seus esquemas e invariantes operatórios em diversas formas de representação.

Além disso, durante a produção dos dados, em que as manifestações realizadas nas situações do diagnóstico e nas situações com o Scratch, tanto na forma operatória como na forma predicativa dos conhecimentos, evidenciaram diferenças significativas, possibilitou refletirmos sobre o papel das tecnologias digitais na educação, e o que elas trazem de diferente para aquilo que, há muito tempo, é mediado por tecnologias analógicas. Com base nos resultados já apontados na pesquisa, a tecnologia específica da programação de computadores apresenta a possibilidade de criar, concretizar, visualizar e dinamizar as ideias na tela do computador, ao mesmo tempo que possibilita pensar sobre o que se sabe, podendo reformular as ideias quando necessário. É a operacionalização das etapas da Espiral da Conceituação o diferencial em relação às tecnologias analógicas.

Referências

Grossi, E. P. (2017). Apresentando. Em E. P. Grossi (Org.), *O que é aprender? O Iceberg da conceitualização* (pp. 6-10). GEEMPA.

Inhelder, B. e Caprona, D. (1996). Rumo ao construtivismo psicológico: estruturas? Procedimentos? Os dois “indissociáveis”. Em B. Inhelder e G. Cellérier (Comps.), *O desenrolar das descobertas na criança: um estudo sobre as microgêneses cognitivas* (pp. 7-37). Artes Médicas.

Lessa, V. E. (2017). Teoria dos Campos Conceituais: um estado do conhecimento. Em *Anais da II Mostra de Pesquisa em Educação da Universidade de Passo Fundo* (pp. 1-13). Universidade de Passo Fundo. http://docs.upf.br/download/meduc/images/Anais2017/Valeria%20Espindola%20Lessa.pdf

Marji, M. (2014). *Aprenda a programar com scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática*. Novatec.

Minayo, M. C. de S. (2013). O desafio da pesquisa social. Em M. C. de S. Minayo (Org.), *Pesquisa social: teoria, método e criatividade* (33 ed., pp. 11-32). Vozes.

Muniz, C. (2009). O conceito de esquema para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. Em M. Bittar e C. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp. 37-52). Editora CRV.

Papert, S. (1985). *Logo: computadores e educação* (J. A. Valente, B. Bitelman e A. V. Ripper, Trad.). Editora Brasiliense.

Papert, S. (2008). *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática*. Artmed.

Piaget, J. (1977). *A tomada de consciência*. Melhoramentos.

Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. Melhoramentos.

Saad-Robert, M. (1996). Didier e as bonecas russas: análise de caso e conceituação. Em B. Inhelder e G. Cellérier (Comps.), *O desenrolar das descobertas na criança: um estudo sobre as microgêneses cognitivas* (pp. 127-168). Artes Médicas.

Valente, J. A. (2002). A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. Em M. C. R. A. Joly (Org.), *Tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem* (pp. 15-37). Casa do Psicólogo Editora.

Valente, J. A. (2005). *A espiral da espiral de aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação* [Tese de doutorado não publicada]. Universidade Estadual de Campinas.

Ventorini, A. E. (2015). *Construção de relações funcionais através do software Scratch*. [Tese de mestrado não publicada]. Universidade Federal de Santa Maria.

Verganud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. Em J. Brun (Org.), *Didáctica das matemáticas* (pp.155-191). Instituto Piaget.

Verganud, G. (2009). O que é aprender. Em M. Bittar e C. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp. 13-35). Editora CRV.

Verganud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade: problemas no ensino da matemática na escola elementar.* UFPR.

Verganud, G. (2017). Prenunciando a teoria dos campos conceituais. Em E. P. Grossi (Org.), *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: teoria dos campos conceituais* (pp. 63-70). GEEMPA.

Autores

Valéria Espíndola Lessa. Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. valeria.lessa@erechim.ifrs.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-0520-5721

Adriano Canabarro Teixeira. Universidade de Passo Fundo, Brasil. teixeira@upf.br

https://orcid.org/0000-0002-7941-3515

Alessandro Jacques Ribeiro, Marcia Aguiar,
André Luis Trevisan, Henrique Rizek Elias

EXPLORING LEARNING OPPORTUNITIES FOR PRIMARY TEACHERS: THE CASE OF KNOWLEDGE FOR TEACHING EARLY ALGEBRA

RESUMEN

Comprender cómo constituir y desarrollar oportunidades para que los maestros de primaria enseñen álgebra temprana a niños sigue siendo un importante vacío en la investigación. En este artículo presentamos los resultados de un programa de investigación desarrollado en Brasil durante los últimos cinco años. Nuestro objetivo es discutir cómo surgieron oportunidades de aprendizaje profesional cuando los maestros planificaron, discutieron y analizaron colectivamente lecciones que involucraban diferentes significados del símbolo de igualdad y el desarrollo del pensamiento funcional. Desarrollados desde la perspectiva de una investigación cualitativa-interpretativa, los datos analizados consisten en documentos curriculares, protocolos para la resolución de tareas formativas, audios y videos recopilados durante procesos de formación docente para docentes en servicio. Los resultados destacan que las tareas de aprendizaje profesional, combinadas con las acciones de los formadores de docentes durante las discusiones colectivas, favorecieron a los profesores en servicio para diferenciar y comprender el razonamiento de los estudiantes. Se discuten algunas implicaciones para la formación docente, así como el desarrollo profesional de los maestros de primaria, especialmente en relación con el pensamiento algebraico temprano, ya que los maestros normalmente no tienen la oportunidad de estudiar estos contenidos en sus propias experiencias en la escuela.

PALABRAS CLAVE:

- *Oportunidad de aprendizaje docente*
- *Formador de docentes*
- *Tareas de aprendizaje profesional*
- *Práctica docente de primaria*
- *Álgebra temprana*

ABSTRACT

Understanding how to constitute and develop opportunities for primary teachers teach early algebra to younger children is still an important research gap. In this paper, we bring results of a research program developed in Brazil over the past five years. We aim to discuss how professional learning opportunities emerged when teachers collectively planned, discussed, and analyzed lessons involving different meanings of the equality symbol and the development of functional thinking. Developed from the perspective of a qualitative-interpretative research, data analyzed consists of curriculum documents, protocols

KEY WORDS:

- *Teacher learning opportunity*
- *Teacher educator*
- *Professional learning tasks*
- *Primary teacher practice*
- *Early algebra*

Alessandro Jacques Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L. y Elias, H. R. (2023). Exploring learning opportunities for primary teachers: the case of knowledge for teaching early algebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* *26*(3), 327-356. https://doi.org/10.12802/relime.23.2633. Recepción: Junio 6, 2022 / Aceptación: Septiembre 6, 2024.

for the resolution of formative tasks, audios and videos collected during teacher education processes for in-service teachers. The results highlight that professional learning tasks, combined with the actions of teacher educators during collective discussions, favored in-service teachers to differentiate and understand the students' reasoning. Some implications for teacher education as well as the professional development of primary teachers are discussed, especially regarding early algebra thinking, because teachers do not normally have the opportunity to study these contents on their own experiences in school.

RESUMO

Compreender como constituir e desenvolver oportunidades para professores primários ensinarem álgebra precoce a crianças ainda é uma importante lacuna de pesquisa. Neste artigo, trazemos resultados de um programa de pesquisa desenvolvido no Brasil nos últimos cinco anos. Nosso objetivo é discutir como as oportunidades de aprendizagem profissional surgiram quando os professores planejaram, discutiram e analisaram coletivamente aulas envolvendo diferentes significados do símbolo da igualdade e o desenvolvimento do pensamento funcional. Desenvolvidos na perspectiva de uma pesquisa qualitativo-interpretativa, os dados analisados consistem em documentos curriculares, protocolos para a resolução de tarefas formativas, áudios e vídeos coletados durante os processos de formação de professores em serviço. Os resultados destacam que as tarefas de aprendizagem profissional, combinadas com as ações dos formadores de professores durante as discussões coletivas, favoreceram os professores em serviço para diferenciar e compreender o raciocínio dos alunos. São discutidas algumas implicações para a formação de professores, bem como para o desenvolvimento profissional dos professores primários, especialmente no que diz respeito ao pensamento inicial da álgebra, pois os professores normalmente não têm a oportunidade de estudar esses conteúdos em suas próprias experiências na escola.

PALAVRAS CHAVE:
- *Oportunidade de aprendizagem de professores*
- *Formador de professores*
- *Tarefas de aprendizagem profissional*
- *Prática de professores primários*
- *Álgebra precoce*

RÉSUMÉ

Comprendre comment constituer et développer des opportunités pour les enseignants du primaire d'enseigner l'algèbre précoce aux jeunes enfants reste une lacune importante dans la recherche. Dans cet article, nous apportons les résultats d'un programme de recherche développé au Brésil au cours des cinq dernières années. Nous visons à discuter de la façon dont les opportunités d'apprentissage professionnel ont émergé lorsque les enseignants ont collectivement planifié, discuté et analysé des leçons impliquant différentes significations du symbole d'égalité et le

MOTS CLÉS:
- *Opportunité d'apprentissage des enseignants*
- *Formateur d'enseignants*
- *Tâches d'apprentissage professionnel*
- *Pratique des enseignants du primaire*
- *Algèbre précoce*

développement de la pensée fonctionnelle. Développées dans la perspective d'une recherche qualitative-interprétative, les données analysées consistent en des documents curriculaires, des protocoles pour la résolution de tâches formatives, des audios et des vidéos collectés au cours des processus de formation des enseignants pour les enseignants en service. Les résultats mettent en évidence que les tâches d'apprentissage professionnel, combinées aux actions des formateurs d'enseignants lors de discussions collectives, ont favorisé les enseignants en poste pour différencier et comprendre le raisonnement des élèves. Certaines implications pour la formation des enseignants ainsi que le développement professionnel des enseignants du primaire sont discutées, en particulier en ce qui concerne la réflexion précoce sur l'algèbre, car les enseignants n'ont normalement pas la possibilité d'étudier ces contenus sur leurs propres expériences à l'école.

1. Introduction

Research findings have showing us the necessity to invest in the continuing education of teachers in order to establish connections and interlocutions between their professional knowledge (Ball & Cohen, 1999) and the teaching practices of these teachers. This stems from an understanding that teachers continue to learn while exercising their professional practices (Webster-Wright, 2009) and that there are ongoing possibilities of building a body of mathematical knowledge for teaching early algebra (Ball et al., 2008; Pincheira & Alsina, 2021).

Understanding how the teacher learning process takes place and how it develops throughout their career (Webster-Wright, 2009) is strongly linked to the learning opportunities that teachers experience. The term "learning opportunity" has been researched for a long time regarding primary school students (Heyd-Metzuyanim et al., 2016). However, in teacher education, these studies are more recent, whether related to pre-service (Tatto & Senk, 2011) or in-service education (Ribeiro & Ponte, 2019).

In terms of mathematical knowledge, developing students' algebraic thinking at the early stages of schooling is fundamentally important in order to open doors to the study of algebra in subsequent years (Kieran et al., 2016). Other researchers reveal that there is knowledge that teachers need to mobilize and (re)structure to be able to explore this theme in their classrooms (Ponte & Branco, 2013). Thus, our study is centered on understanding what mathematical knowledge teachers need to have to support student learning (Ribeiro et al., 2021) regarding early algebra. The approval of the Common National Curriculum Base - BNCC (Brasil, 2017), a document that indicates what should be taught in Basic Education in Brazil, introduces Algebra as a new thematic unit to be worked on in Mathematics. This recent inclusion of Algebra in the curriculum of early years follows an international trend based on the realization that young students are already able to think algebraically, and that leading them to this type of reasoning, in addition to being relevant, is essential if what is desired is that students go beyond performing operations and solving problem situations (Ferreira, 2017).

Although the Early Algebra movement has encouraged investigations into the learning of algebra by early-year students (Warren et al., 2016), there are few studies that address the issue from the point of view of teachers' professional practice approaching algebraic thinking (Jacobs et al., 2007) or to professional knowledge for teaching Early Algebra (Pincheira & Alsina, 2021). Some challenges can make it difficult for early-year students to think algebraically, among them is the fact that teachers generally did not have access to the necessary knowledge in order to teach algebra to younger students, whether in their initial or continuing education (Blanton, 2008).

From our point of view, one of the prominent paths may be through classroom situations that contribute to a reflective context for teachers (Silver et al., 2007), and that consider (i) the content addressed in teacher education (Desimone, 2009), (ii) the importance given to the elaboration of mathematical tasks and their development in the classroom (Christiansen & Walther, 1986), (iii) the possibilities for teachers to plan lessons collectively (Serrazina, 2017) and apply them through an exploratory teaching approach (Canavarro et al., 2012) and, finally, (iv) to reflect on what happened as well as think of new practices for their classes (Ponte, 2005).

In our study, we emphasize an approach that explores the different meanings of the equality symbol (Kieran 1981; Trivilin & Ribeiro, 2015) and the study of functional thinking (Carpenter et al., 2005; Zapatera Llinares, 2018) starting in the early years of elementary school. Therefore, this article aims to *understand how learning opportunities are constituted and developed so that Primary Mathematics Teachers (PMTs) can approach early algebra in the first years of elementary school*. To this end, we seek to answer the following research questions: (RQ1) *What professional learning opportunities arise when teachers collectively plan and analyze classes involving different meanings of the equality symbol and the development of functional thinking?* (RQ2) *What mathematical knowledge do teachers mobilize and build to teach early algebra when they experience collective opportunities for professional learning?*

2. Theoretical Framework

2.1. *Professional Learning Opportunities for Teachers*

In order to understand how opportunities for teachers to learn are constituted, we first need to understand how teachers learn. For this, we adopted in our study an understanding that teacher learning is located in their daily practice, including not only classroom moments, but also those that are focused on planning, evaluating and collaborating with colleagues and others (Davis & Krajcik, 2005), and also understand that teacher learning is distributed among individuals and artifacts, as is the case of tasks developed for their education (Putnam & Borko, 2000).

Based on these principles, Ribeiro & Ponte (2020) organized the Professional Learning Opportunities for Teachers (PLOT) model, which constitutes a theoretical-methodological model with the purpose of (i) organizing the design of formative processes that aim to promote learning for teachers and (ii) generate opportunities for teachers to learn during these formative processes. The model is organized from three interconnected domains: (a) Role and Actions of Teacher Educator (RATE), (b) Professional Learning Tasks for Teachers (PLTT), and (c) Discursive Interactions Among Participants (DIAP); that collectively contribute to the creation of PLOTs, from certain contexts (Figure 1).

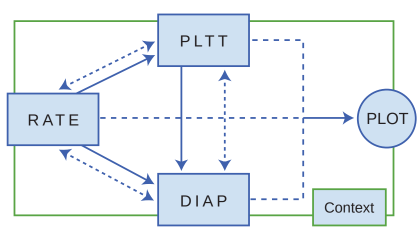


Figure 1. PLOT Model (Ribeiro & Ponte, 2020, p. 4).

When considering teacher learning situated and mediated by instruments, people and context, the PLOT model establishes that its domains are decisive in the design, implementation and evaluation of formative processes that aim to provide opportunities for teachers to learn from one another.

Regarding the *RATE domain* indicates the skills needed by teacher educators, such as selecting and using appropriate tools and resources for teaching (Zaslavsky, 2008), designing formative processes considering the characteristics of the local context (Desimone, 2009), considering mediation actions and conducting education in an exploratory teaching environment (Ponte, 2005), guaranteeing actions and questionings from the teacher educator that cause the teachers to reflect and establishing relationships between theory, experiences and these teachers' practice (Bransford et al., 2000).

The *PLTT domain* highlights that teachers need opportunities to learn collectively and through experiences related to their own teaching practices (Ball & Cohen, 1999). PLTTs are composed of situations based on the records of practice (Ball et al., 2014) which allow teachers, for example, formulate mathematical conjectures, validate and reformulate them (Silver et al., 2007), thus contributing to the mobilization and (re)construction of knowledge necessary for teaching (Ball et al., 2008). It is also understood that PLTTs provide opportunities for teachers to develop knowledge that is central to their teaching, as they engage in tasks and activities that are the core of their daily work (Smith, 2001), within a work cycle that involves the act of planning what to teach and which tasks could provide and elucidate the mathematical knowledge to be built (Serrazina, 2017).

Finally, the *DIAP domain* draws on studies that point to collective participation (Gibbons & Cobb, 2017) of teachers and assumes that professional learning opportunities are materialized at the time of exchanges between peers and through dialogue and professional communication (Craig & Morgan, 2015) between teachers and between them and teacher educators. One approach that favors such interactions is that of exploratory teaching, as it provides collective discussions and presupposes the circulation of ideas, experiences and mathematical and didactical knowledge among teachers (Stein et al., 2008). The DIAP domain is characterized by (i) promoting mathematical and didactical discussions as a means to promote professional learning for teachers (Heyd-Metzuyanim et at., 2016); (ii) involving teachers in an environment that promotes argumentation and justification (Mata-Pereira & Ponte, 2017) when discussing mathematical tasks for students; (iii) encouraging the use of correct and appropriate mathematical language for the students' educational level (Adler & Ronda, 2014); and (iv) assisting teachers to recognize the importance of dialogical communication between themselves and their students (Craig & Morgan, 2015).

2.2. *Mathematical Knowledge for Teaching Early Algebra*

Based on the Shulman's seminal work (1986), several researchers have been working to understand and characterize the mathematical knowledge that is specific to teaching. We highlight a theoretical framework that is widespread in Brazil and other countries, the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) by Ball et al. (2008), which involves the mathematical knowledge necessary for the teacher to exercise their teaching mathematics role, as it is a theory based on teaching practice (Figure 2).

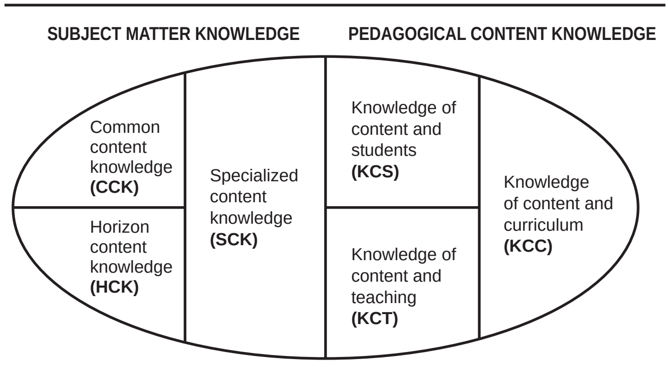


Figure 2. Domains of Mathematical Knowledge for Teaching (Ball et al., 2008, p. 403).

In these domains, KCT combines knowledge of mathematics content with knowledge regarding your teaching at school. Meanwhile, KCS combines knowledge of mathematical content and knowledge regarding students, a kind of knowledge that “highlights the importance of understanding students’ mathematics to be an effective teacher” (Sevinc & Galindo, 2022, p. 155). Finally, KCC refers to the knowledge that the teacher has regarding the presence of mathematics in the curriculum throughout the school years, and also a knowledge that allows evaluating the use of different materials/didactic resources suitable for each moment of the school period.

On the other hands, CCK is constituted by mathematical knowledge not restricted to teaching, such as, for example, recognizing a wrong answer and, SCK domain refers to mathematical knowledge that is normally not needed for purposes other than teaching. According to Ball et al. (2008), the demands of the job of teaching mathematics require a body of specialized mathematical knowledge for teaching, such as knowing different ways to solve a mathematical task. HCK is a knowledge of content that allows the teacher to have an awareness of how mathematical topics are related throughout the mathematics included in the curriculum.

Within the scope of Algebra, the works of Ball and her collaborators reverberate in the theoretical framework called Knowledge of Algebra for Teaching (KAT) (McCrory et al., 2012). McCrory et al. (2012) propose three categories for what they consider essential knowledge for an effective teaching of algebra, they are: school algebra (SA); advanced mathematics (AM); and algebra-for-teaching knowledge (ATK). SA is about mastery or proficiency in what they are going to teach; AM refers to the mathematical knowledge that teachers must have in addition to the mathematics that is directly related to teaching; and ATK, closely related to SCK, relates to the opportunities that teachers should have to learn mathematics in a way that broadens and deepens their knowledge and understanding of mathematics in a manner that specifically contributes to their teaching (McCrory et al., 2012).

McCrory et al. (2012) present three other categories, referring to the teaching practices of school algebra: *decompressing*, *trimming*, and *bridging*. *Decompressing* indicates the teacher's need to decompress their knowledge in teaching practice. For example, for elementary school teachers, the computational algorithms used in arithmetic operations, such as long division and division by a fraction, need to be unpacked. For secondary school algebra teachers, algorithms need to be decompressed to solve equations and systems of equations, to simplify expressions and to move between representations (textual, symbolic, graphic, tabular, etc.). *Trimming* means that the teacher must "trim" the mathematical content in a way that it is accessible to the student in the school year in which such content is being taught. *Bridging* means that the teacher needs to establish connections between mathematical ideas, including connections between ideas from school algebra, abstract algebra and real analysis, relating these different areas (McCrory et al., 2012).

In this way, the MKT domains proposed by Ball et al. (2008) and the three categories of teaching practices presented by McCrory et al. (2012) offer support for understanding and implementing the introduction of algebra in the first years of school. About this, studies such as those by Blanton and Kaput (2005) and Blanton (2008) point to the importance of introducing algebra in the early years of schooling, in order to develop algebraic thinking in students. Blanton and Kaput (2005) point to algebraic thinking as an important process in which students generalize mathematical ideas. Blanton (2008) highlights two key areas of algebraic thinking: (1) generalized arithmetic and (2) functional thinking. In addition, Carpenter et al. (2005) indicate the ability to look at expressions or equations in their broadest conception, revealing existing relationships and also highlighting the importance of developing in students a relational understanding of the equality symbol.

Kieran (1981) points out three different meanings for the equality symbol: operational, equivalence and relational. The operational meaning, the most worked with in elementary schools and often the only one taught in Brazilian schools (Trivilin & Ribeiro, 2015), gives the student the idea that, after the equality symbol, the result of an operation should always be included and, generally, only a single quantity is accepted as true. The second meaning of the equality symbol, that of equivalence, allows one to establish many ways of representing a number through numerical equalities, and still work the equivalence between the terms that make up numeric expressions. Finally, the last meaning of the equality symbol is the relational one, through which relationships between expressions are established, and the understanding and use of the properties of the operations (addition and multiplication) is also pointed out.

Another key area of early algebra, functional thinking is one of the major components of algebraic thinking (Cañadas et al., 2016). Para Cañadas et al. (2016, p. 4-5), "is that functions constitute a way to introduce students into algebra and should be dealt with longitudinally, beginning in the *early* elementary grades". Functional thinking "draws on a different skill set than does generalized arithmetic. It requires children to attend to change and growth" (Blanton, 2008, p. 5).

The promotion of functional thinking involves establishing a relationship between quantities, understanding how one varies from the other (Zapatera Llinares, 2018). Functional thinking "is about making elementary grades mathematics – including arithmetic – deeper and more meaningful for children" (p. 57). Thus, solving combinatorial problems, through the use of intermediate representations such as lists and possibilities tree, allow students, from early years, to develop mathematical patterns and structural relationships (Mulligan et al., 2020) and, gradually, the systematization of possibilities and the generalization from numerical expressions (such as the multiplicative principle) (Borba et al., 2021).

In Asquith et al. (2007) study, middle school teachers were asked to predict student responses to assessment items written with a focus on the equals sign. Although most knew that some students think the equals sign means "give the answer", the extent of this misconception was not accurately predicted, with teachers predicting that many more students would give a relational definition of the equals sign than would actually happened. Similarly, Vermeulen and Meyer's (2017) study on teachers' mathematical knowledge for teaching the equal sign indicated that, in general, they did not have the knowledge and skills to identify, prevent, reduce or correct conceptions students' mistakes about the equals sign.

Wilkie's (2014, 2016) studies on the professional learning of Upper Primary School teachers showed that, although a considerable part of the teachers interviewed show that they have content knowledge to develop their students' functional thinking, few have knowledge of pedagogical content. In the same direction, Pang & Sunwoo's (2022) study with elementary school teachers about their knowledge for teaching functional thinking showed a superficial understanding of its central ideas. Although many of them were able to develop mathematical tasks corresponding to simple relationships between two quantities, some of them had difficulties in developing tasks involving more complex relationships.

3. The study's methodology and context

The research was carried out in two similar Professional Development Program in Early Algebra (henceforward PD-EA1 and PD-EA2), based on the PLOT model (Ribeiro & Ponte, 2020). In both cases, the aim was to enable the participating teachers to expand their professional knowledge in order to teach Early Algebra, and had 14 face-to-face weekly work sessions of 2 hours each, around one semester. PD-EA1 performed with six PMTs (A, B, C, D, E, F) and a Teacher Educator (TE1) (Ribeiro) from the same municipal public school in São Paulo/Brazil. In PD-EA2, among the participants, one of them, teacher G, was a PMT, and four others (H, I, J, K) were prospective mathematics teachers, with experience in the elementary and high school, and a Teacher Educator (TE2) (Trevisan).

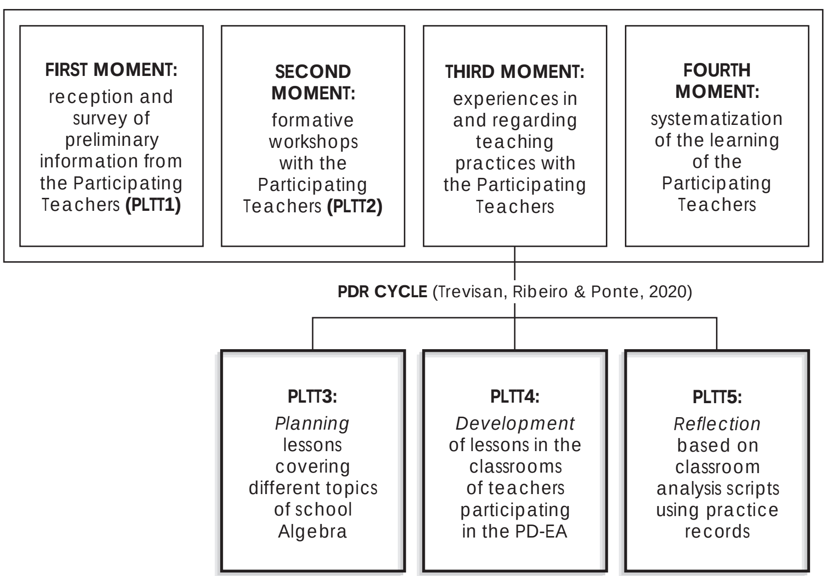


Figure 3. Structure of the Professional Development Program in Early Algebra

Each one of them was structured in four moments (Figure 3), which included the application of five PLTT. The first two of which (PLTT1 and PLTT2) were intended to survey the participating teachers' prior knowledge of Early Algebra. The last three aimed to give participating teachers the opportunity to experience an interactive cycle of planning (P), development (D) and reflection (R) of collectively prepared lessons, which covered different topics of school algebra

– PDR cycle (Trevisan et al., 2020). Stage P (PLTT3) involved the elaboration (in small groups) and collective discussion of lesson plans covering different topics of school algebra, with tasks chosen by the participating teachers themselves. Afterwards, stage D (PLTT4) took place in these teachers' classrooms. Finally, in stage R (PLTT5), the teacher educators organized analysis scripts for these classes using practice records produced in the classes held, focusing on two dimensions: the different resolution strategies used by the students, and the role and actions of the teachers in three moments of the development of the class (in the presentation of the task, in the monitoring of students' work in the groups and at the orchestrating collective discussions in the end of classes).

A characterization of PD-EA1 and PD-EA2 is presented in Figure 4.

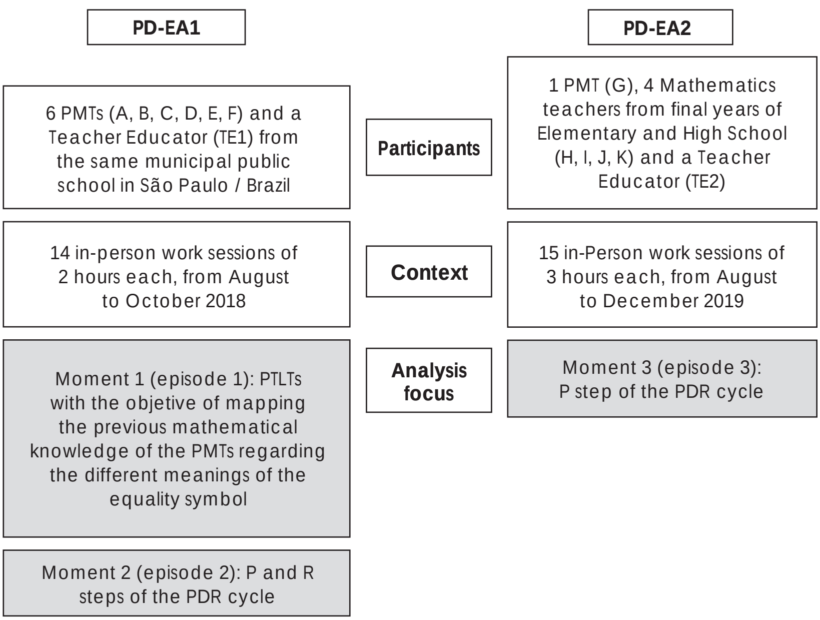


Figure 4. PD-EA Characteristics

In this paper we analyze three episodes, the first two being performed in Professional PD-EA1 and, the third, took place in PD-EA2. The first episode was enacted during the first eight sessions, when PLTT1 e PLTT2 were used in order to map the PMTs' previous mathematical knowledge about the different meanings of the equal sign. In the second episode, PLTT3, PLTT4 e PLTT5 were worked in sessions 9 to 12 in order to mobilize and (re)build mathematical and didactical knowledge of PMTs referring to Early Algebra. Specifically, this episode cover P and R stages of this cycle PDR, when discussions are presented regarding the planning of a collectively elaborated class and then, the moment in which the teacher educators transformed the practice records of the class developed in a PLTT5 of reflection on the role and action of the teacher. Finally, in the third, each participating teacher organized the lesson plan (PLTT3) that could be developed in their own class, involving functional thinking, from the choice of a mathematical task that could generate discussions among students. These teachers presented their initial version of the planning, which was discussed collaboratively with the other participants.

The methodological approach follows the principles of qualitative research in an interpretive theoretical perspective (Crotty, 1998). Data were collected through audio and video transcripts of sessions in which PLTTs were applied, as well as the written reports produced by the participating teachers. This information was grouped, creating an inventory organized by session and by data collection instrument. This procedure allowed information to be gathered, compared and analyzed. From this inventory, three moments were organized for analysis: (i) one that covers the mapping of previous mathematical knowledge of the PMTs on the meanings of the equality symbol, (ii) another that considers the planning and reflection of a lesson on the meanings of equality symbol, and (iii) one that involves planning a class encompassing functional thinking.

To carry out the analyses, special attention was given to the emergence of PLOTs when teachers collectively planned and analyzed lessons involving different meanings of the equality symbol and the development of functional thinking. More specifically, we sought to investigate the mathematical knowledge for teaching early algebra mobilized by teachers when they experience collective opportunities for professional learning. Professional learning opportunities were identified based on the PLTTs used, the DIAP and the RATE (Ribeiro & Ponte, 2020). On the other hand, the MKT domains (Ball et al., 2008) were identified from discussions regarding the different meanings of the equality symbol (Kieran, 1981) and the manifestations of development of functional thinking (Blanton & Kaput, 2008).

4. Findings

4.1. *Episode 1 – Exploring the Meanings of Equality*

In the meeting dedicated to survey the PMTs' prior knowledge regarding the different meanings of the equality symbol (equivalence and relationship), the two groups analyzed the mathematical task (Figure 5) and, subsequently, the students' resolutions about the task (Figure 6), focusing on students' challenges and resolution strategies.

Part of PLTT 1 - The Equality Symbol

Teacher Jane was analyzing her 4th grade student´s answers to the proposed task.

Arthur and his sister Cecilia received from their aunt the same amount of money. Arthur decided to save 20 reais in his piggy bank and to keep some money to take to school. Cecilia saved 16 reais in her piggy bank and put aside the rest to buy some stickers.

As the two children received the same amount of money, we can establish the equality:

20 + ___ = 16 + ___

i. Determine the amount of money each child put aside to be spent.
ii. Explain how you reached the result.

Figure 5. Mathematical task. Adapted from Barboza (2019, p. 88)

Resolution 1

Arthur took 10 reais to school and Cecilia put aside 14 reais to buy herself stickers. This is how we thought this through, if they received the same amount of money, then Cecilia spent 4 reais more than her brother and we think that he took 10 reais, because you can only take 10 reais maximum to school. So we save 20 + 10 + 30 and 16 + 14 = 30.

Resolution 2

Arthur took 36 reais to school and Cecilia spent the same 36 reais on stickers, because they had the same amount of money. We got to that answer adding up the two numbers that were in the calculation: 20 + 16.

Resolution 3

Arthur took 5 reais to school and his sister spent 9 reais on stickers. We think that, if the two of them received the same amount of money and he saved 4 reais more on his piggy bank, then Cecilia had 5 reais plus 4 reais to spent on stickers. We got to this answer by doing 20 + 5 = 16 + 9, because Arthur saved 4 reais more than his sister.

Figure 6. Real and Fictitious Student Resolutions. Adapted from Barboza (2019, p. 89)

In the group of PTMs A, B and C, they all managed to solve the task, but they could not expand the SCK and kept numbers restricted to the solution of the task [1.2], so TE1 encourages them to think about other possible solutions [1.3] in an attempt to extend the SCK. The PTMs, from the action of TE1 expand their SCK to other resolution possibilities [1.5], [1.6] and [1.7], but they do not expand the SCK in the sense of using the equality symbol with a meaning other than the operational one.

[1.1] TE1: You put 10 and 14; 4 and 8; ... what relationship exists between each pair of numbers?
[1.2] A: That we only work with even numbers?
[1.3] TE1: But can you only put an even number? What if I put 15?
[1.4] A: Possible too.
[1.5] B: 20+15 equals 35.
[1.6] A: So, there would have to be something on the other side to equal 35 too. 16 plus?
[1.7] B: 19.

TE1, realizing that the PMTs only used the equality symbol in the operational sense, began to be instigating them with questions, with the intention that they would perceive the relationship between their answers, noting the meaning of equivalence [1.8] and [1.10], thus expanding their SCK.

[1.8] TE1: Everything you calculated on one side of the symbol, you tried to find the balance by calculating on the other side.
[1.9] A: Yes, we added to find the balance on the other side.
[1.10] TE1: Yes, but is there a way for us to determine the value to be placed on the other side, without having to add each side separately? […] Notice, you did 20+10, and on the other side of the equality there would be 16 plus?
[1.11] B: 14.
[1.12] TE1: Here, they put 20 + 4, and on the other side there would be 16 plus?
[1.13] A: 8.
[1.14] TE1: And then?
[1.15] A: Oh, it's always adding 4!
[1.16] TE1: And why?
[1.17] B: Wow, I hadn't realized that.
[1.18] A: Only now I noticed that, and why?
[1.19] C: Oh, it's because between these two [20 and 16] there is this difference of 4.
[1.20] TE1: And if there is 4 less here... on the other side...
[1.21] C: On the other side there will be 4 more.

With this discussion, we realize that the PMTs recognize the regularity existing in the equality, thus moving from the operational meaning [1.5] and [1.6] and starting to also perceive the equivalence meaning of the equality symbol [1.15], [1.19], [1.21]. It is noteworthy how important the action of TE1 was, instigating the discussion to create opportunities for the expansion of SCK of the PMTs, who start to wonder if they could generalize the pattern found to any other tasks:

[1.22] A: And it will always be 4? In any task?
[1.23] TE1: In this task, yes. But what if the boy had saved 15 and the sister 10, would it be the same?
[1.24] A: 15 and 10... Then it would be 5. Is that it?
[1.25] TE1: Exactly.
[1.26] B: Oh. It's from here!
[1.27] TE1: Yes, it is the relationship that is established, since the two received the same values; so, if here there is 5 more and the other 5 less, to maintain the equivalence I have to consider this.
[1.28] B: Wow, look at this, if I put 15+5, just put 10+10, the difference really is 5.

Thus, TE1 leads them to conclude that one can look at the equality symbol with the meaning of equivalence and even relation. Thus, it can be seen, with the end of the discussion, that both the mathematical task and the action of TE1 during the discussions provided the PMTs with professional learning opportunities in order to identify the equivalence and relational meaning of the equality symbol, expanding their SCK.

Next, the PMTs began to analyze the students' resolutions (Figure 6), using the different meanings of the equality symbol that were mobilized previously, in order to reflect on the students' resolutions. The group formed by D, E and F made their first analyses and conjectures:

[1.29] D: But then in this case here they didn't notice [resolution 1].
[1.30] E: The equality.
[1.31] D: Yes. He ignored the equality symbol as equivalence.
[1.32] F: So, let's go back here [re-read resolution 1].
[1.33] E: They got it. Not only did they perceive equality, they also found the equivalence. And he also realizes that Cecilia has a difference of 4 reais.
[1.34] D: Different from this one then [resolution 2]?
[1.35] E: Very different, because this group [resolution 1] perceives equality, and this one adds everything up [resolution 2].
[1.36] M: Look, that's right [resolution 3]. They understand the reasoning and still discover the difference of 4 reais.

From the discussions, we see that the PMTs are using the equivalence meaning of the equality symbol to reflect on the students' resolutions [1.31], [1.33], [1.35] and [1.36]. Based on the discussions presented in this Episode, we can state that PLTT, together with the performance of TE1, allowed the teachers to mobilize and expand their mathematical knowledge to teach the different meanings of the equality symbol – in particular, by expanding their understanding of the meanings of the equality symbol, from operator to equivalence [1.19], [1.21], [1.31], [1.33], [1.35] and [1.36].

4.2. *Episode 2 – A lesson on the meanings of the equality symbol: from planning to reflection*

During the meeting dedicated to lesson planning, the two groups of PMTs began the work by analyzing mathematical task (Figure 7), focusing on the challenges and proposals for students and evaluating how they could work on them in the classroom.

THE BOWLING GAME

The 5th grade classroom A student were divided in 4 teams to play a game of bowling. Look at the scoreboard Teacher Valter kept of the rounds:

	ROUND 1	ROUND 2	ROUND 3	TOTAL
TEAM 1	12	13	15	
TEAM 2	15	7		35
TEAM 3		15	8	35
TEAM 4		10		

Some of the data was not written down by the Teacher. Answer the questions and help complete the scoreboard:

a) With how many points did Team 1 finish? Explain how you got to that result.
b) How many points did Team 2 have on round 3? Explain how you got to that result.
c) How many points did Team 3 have on round 1? Explain how you got to that result.
d) Team 4 had, in total, only half the points of Team 1. Determine the total of points Team 4 had in rounds 1 and 3.

Figure 7. Mathematical task chosen for lesson planning. Adapted from Barboza (2019, p. 91)

The groups A, B, and C initially anticipated possible resolutions that students might make use of, and difficulties they might face in carrying out the task:

[2.1] B: In item (d) they are the ones who will determine. Each one can have their possibilities.
[2.2] A: Yes, each one will distribute as they see fit, as long as they reach 20 in total.
[2.3] TE1: Are they used to having more than one right result?
[2.4] B: No.
[2.5] A: No, because they know they can have multiple strategies to achieve one answer, one result. But several right results...
[2.6] TE1: And do you think this is extra challenging?
[2.7] A: I think it's extra challenging, yes.

We can observe that the PMTs mobilized PCK, specifically in regard to KCS, when discussing the strategies that the students would possibly use [2.1] and [2.2], and KCT, especially because they reflected on the challenge that the task was posing [2.7]. Noting that the discussions of the PMTs focused on the knowledge of students and teaching, and with the aim of proposing reflections on the meaning of equivalence of the equality symbol, TE1 introduces a question:

[2.8] TE1: And do you think that, in this question or any other, they would be able to look and establish equivalence relations.
[2.9] B: Yes.
[2.10] TE1: And, why? Elaborate.
[2.11] B: Because they will realize that...
[2.12] A: You can add different digits and get the same result.

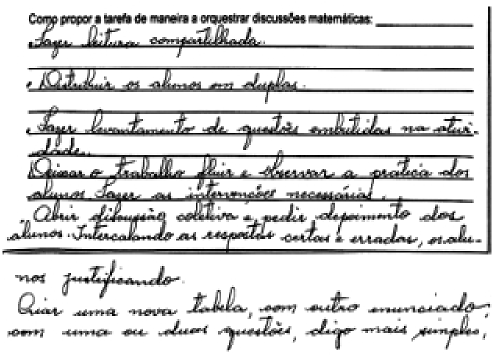
We recognize that the teachers expanded their meanings of the equality symbol, now perceiving it with the sense of equivalence [2.9]. This learning opportunity arises as a result of the intervention of TE1 [2.8], who proposed a question that would help the PMTs to move from discussions more focused on pedagogical knowledge to a discussion of a more mathematical nature. We can also observe that they mobilize knowledge related to SCK [2.11] and [2.12], by expanding their knowledge regarding the meanings of the equality symbol and relating them to teaching.

Still wanting to promote new reflections on the meaning of equivalence of the equality symbol, TE1 [2.13] introduced another question (bringing light to the possibilities of relationships that could be established between the missing data in the table – Figure 7):

[2.13] TE1: Look at Team 2 and Team 3, what do they have in common?
[2.14] A: The same result.
[2.15] TE1: And in the rounds, see if they have any relationship.
[2.16] A: Um, they're both 15.
[2.17] TE1: And in the other round, one has 7 and the other has 8. Could it be that observing this is a way of looking at what will be the relationship between these two spaces to complete?
[2.18] C: I don't think so, I think they'll just calculate it.
[2.19] A: I find it difficult to look at this. Because I think they will add up the installments, which is their practice, and then they will take the smaller portion from the larger one to find the unknown value.

The discussions made possible to the PMTs, because they are working in groups, together with the teacher educator's interventions, seem to us to generate learning opportunities so that they begin to indicate different possibilities for resolution [2.18] and begin to observe possibilities of establishing relationships in the task between the members of an equality [2.14] and [2.16].

Something else to be highlighted refers to the opportunities that the PMTs experienced regarding curricular knowledge and teaching of early algebra. In view of the agreement on the use of the mathematical task to be used in teacher A’s classroom, the six PMTs established which objectives can be developed in the lesson in question (Figure 8), and for that, they experienced the analysis, in group, of the BNCC, thus being able to know and explore more deeply the thematic unit “Algebra”, recently introduced in Brazil (Brasil, 2017). It can be seen from the rationales that the PTMs sought to create contexts for the classroom, which would allow interactions in regard to the content to be worked on (KCT) as well as allow students to advance in their learning (KCS).


Como propor a tarefa de maneira a orquestrar discussões matemáticas:
• Fazer leitura compartilhada.
• Distribuir os alunos em duplas.
• Fazer levantamento de questões embutidas na atividade.
Deixar o trabalho fluir e observar a prática dos alunos. Fazer as intervenções necessárias.
Abrir discussão coletiva e pedir depoimento dos alunos. Intercalando as respostas certas e erradas, e ale-
nos justificando.
Criar uma nova tabela, com outro enunciado, com uma ou duas questões, digo mais simples;

How to propose the task in order to orchestrate mathematical discussions:

- Share readings;
- Pair up the students;
- Raise questions embedded in the activity;
- Let the work flow and observe student practice. Make necessary interventions;
- Open collective discussion and ask for testimony from students, merging and explaining right and wrong answers, justifying them;
- Create a new table, with another question, with one or two questions, simpler.

Figure 8. Protocol used to justify the chosen mathematical task (Barboza, 2019, p. 109)

During the analyses, the PMTs were satisfied with the students’ involvement with the task and, especially, with the expression used by one of them, “it added up to the same equality”. They also signaled the importance of the teacher taking advantage of moments of discussion among students, to establish mathematical connections and systematize concepts [2.25], [2.26] and [2.28]:

[2.25] D: Wow, isn’t that when you can close the concept you want to work on?
[2.26] A: Ah, the one of equivalence!
[2.27] D: Yes.
[2.28] E: It is important to systematize it with the mathematical language.

The PLTT included records of practice containing students' mathematical strategies and reasoning about the equivalence meaning of the equality symbol. One of the students explained: "We realized that, in Team 2, it was 15 first. And then in Team 3, it was 15 too. And the difference is 1." Another added: "They both have the same result, and since you're saying here it's 35, they're equal. I could put 1 more here, like, we could have 13 here, but it's 12, and here it could be 12, but it's 13. It's just that in this one [pointing to 8], there's one more than this one [pointing to 7]."

Encouraged by the possibility of analyzing episodes that occurred during the lesson, one of the PMTs stated: "Wonderful, I liked it. They showed that they understood it, yes [the equivalence relation of the equality symbol]." If on the one hand it is possible to consider that the PMTs realized the mathematical strategies adopted by the students, on the other hand, it caught our attention that, during the lesson planning, the teachers believed that the students would not pay attention to the equivalence, or the relationship between the equalities that appeared in the mathematical task. Therefore, we understand that TE1's choices and actions, combined with the PLTT's design of reflection, ended up providing learning opportunities in which the PMTs (i) identified a non-trivial solution to the task, (ii) reorganized their professional knowledge to the use of unusual tasks and strategies, (iii) challenged students to engage in productive mathematical discussions.

4.3. *Episode 3 - Functional Thinking in Elementary School*

In the meeting dedicated to PTLT that involved the planning of the lesson, PMT G presented the mathematical task that she had prepared for her 4th grade class (Figure 9), as well as the anticipation of four possible ways to solve it (Figure 10). A discussion led by TE2 was then conducted, evaluating how the task could be worked in the classroom, as well as its potential for the development of students' functional thinking.

In a basketball tournament, the teams of the following states got to the final: Paraná (PR), Acre (AC), Paraiba (PB) and São Paulo (SP). In how many different ways can the podium be composed?

Figure 9. Mathematical task proposed in PMT G planning

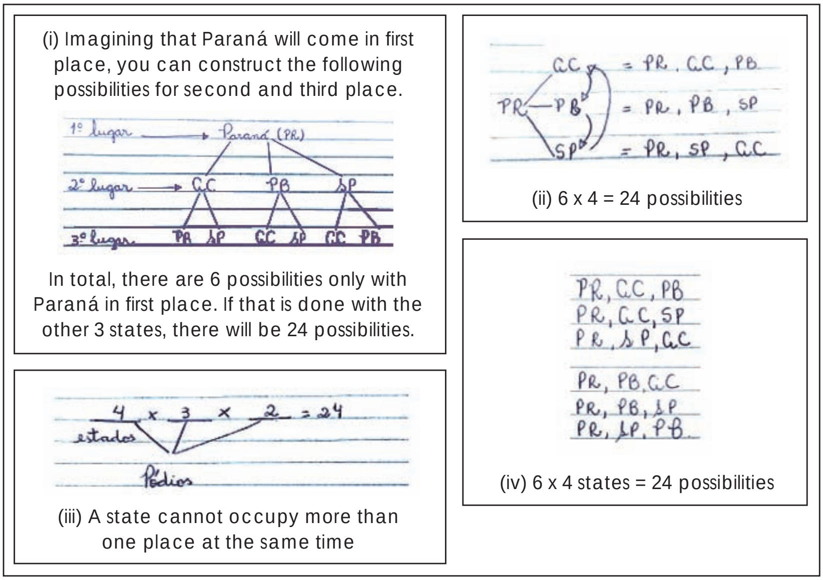


Figure 10. Anticipations of possible ways to solve the task made by PMT G

In a first interaction, TE2 asks G about her objective with the task.

[3.1] G: I want him to understand that it's a combination, but I don't know if it involves functional thinking. He has to make the pairs, find out who can be first, second and third. How many possibilities will he have in here? But I couldn't generalize a calculation.

In this excerpt, G manifests two aspects that permeated the discussion: the doubt whether the task allows the development of functional thinking, and the difficulty in seeing some kind of generalization, reaching an algebraic expression, which G calls "calculation". The teacher educator tries to highlight the presence of functional thinking.

[3.2] TE2: You can try to help the student figure out how to determine the total without writing them down one by one.

[3.3] G: So that's what I couldn't see. A calculation.

In order to mobilize some aspects of KCS, leading teachers to recognize the importance of communication between them and their students, in this case, for the development of functional thinking, the teacher educator points out the importance of helping the student to discover the total number of possibilities, without necessarily listing all cases [3.2]. G, in turn, explains once again that she was not able to “see a calculation” [3.3], as she cannot recognize the task’s potential for generalization, which suggests the need to deepen her SCK. The action of TE2 is, then, in the sense of helping her understand how to reach a generalization, based on a suggestion made by H, to reformulate the task starting with a smaller number of states.

[3.4] TE2: For three states, PR, AC and PB, in how many different ways can the podium be composed?
[3.5] I: Six ways.
[3.6] TE2: What would they be?
[3.7] I: 3 × 2 × 1.
[3.8] G: If it’s only three. Wait a minute... [G writes on the blackboard and fixes PR in first, followed by AC and PB. Then she writes PR, PB and AC]. It will give you two, only two possibilities only.

If, on the one hand, Teacher I, who knows and teaches the multiplicative principle for high school students, appears to have this notion in a mechanical way, as something memorized [3.5], [3.7], on the other hand, Teacher G goes to the blackboard and uses the possibilities tree as a resource to determine the number of possibilities [3.8]. Here, aspects of the SCK can be noted in terms of the difference in the understanding of the task by these two teachers, possibly due to the context in which each one works. HCK is also evidenced to the extent that, on the one hand, the PMT does not know how to deal with a possible generalization (which would be given, for example, by the idea of arrangement) and, on the other hand, high school teachers do not seem to recognize more “introductory” forms of teaching, preferring a more automated approaches (for example, making use of the possibilities tree and leading to a generalization). Other issues related to KCS and KCC are brought up during the discussion.

[3.9] J: Teacher G, do you think your students would reach this multiplication?
[3.10] G: I think so, with some help.
[3.11] J: Because I find it very difficult for them to recognize multiplication.
[3.12] I: This is a multiplicative principle, but it is only taught in the 2nd year of high school.
[3.13] TE2: No, it is already taught in 4th year.
[3.14] I: No, it’s in 7th grade that we teach this, actually. Matching clothes.
[3.15] G: No, in 4th grade you combine clothes, you combine juice with a snack.

Although Teacher G considers that her students are capable of solving the task (albeit with some intervention) [3.10], J still considers it very difficult for this level of education [3.11]. Furthermore, G [3.13] and TE2 [3.13] highlight that this content is already explored in earlier years, a fact unknown by I [3.14].

As mentioned by G [3.15], the BNCC indicates that for the 4th year, the student is expected to solve, with the support of images and/or manipulative material, simple counting problems, such as determining the number of clusters possible when combining each element of one collection with all the elements of another, using personal strategies and forms of recording (Brasil, 2017). PMT G mobilizes knowledge related to KCC and allows the other teachers in the group to learn about the elementary school curriculum, as they do not have experience at that school level.

Assuming the importance of knowing different ways to solve the mathematical task and understanding the mathematical connections that can be established from them, TE2 circles back to the original task proposed by G (Figure 10), seeking to help teachers recognize a generalization.

[3.16] TE2: With three Sates, there are 6 options. And with four States?
[3.17] I: It's 4 × 3 × 2, it's 24.
[3.18] G: It's 24.
[3.19] TE2: This result, teacher G, didn't you anticipate it?
[3.20] G: This one, look! [Figure 11]. But I couldn't see it on the calculation.

On the one hand, Teacher I refers again to the multiplicative principle, privileging the algorithm, demanding opportunities to give new meaning to their SCK, in particular expanding and deepening their knowledge and understanding of mathematics, in a way that serves to rethink the way they teach. On the other hand, G does not seem to understand why multiplication (although she had used it in one of the strategies she anticipated), an aspect of CCK, and needs to explore the knowledge necessary for teaching Algebra in early years, systematizing the possibilities and generalizing. In order to meet these demands and create new learning opportunities, TE2 again intervenes, and the discussion continues:

[3.17] TE2: With three states, putting PR first, what can I have in second?
[3.18] All: AC and PB.
[3.19] TE2: There are two options. And how many states can I put first?
[3.20] All: Three.
[3.21] TE2: So, the total is 2 + 2 + 2, or, 3 × 2. If there are 4 states, there are six podium options for each state, as there are four states, they will be 6 + 6 + 6 + 6 or 4 × 6.
[3.22] H: But you can do 4×3×2 too.
[3.23] TE2: I don't know if it's natural for students to multiply these numbers. What if there are five states?
[3.24] G: If he thinks the options for one, and then adds it up, he gets it.

[3.25] TE2: Anyway, if he's able to not need to write all the possibilities, even if he writes it for one state or two, he's already had some kind of generalization.

In this final part of the discussion, TE2 seeks to differentiate two resolution strategies that can be used to solve the task. One of them is the explicit use of the multiplicative principle, a possibility he understands to be difficult for students in early grades. Another is the use of one-to-many correspondence. In order to help the group to systematize some kind of generalization, and thus develop aspects of functional thinking, TE2 suggests that, in the case of five States, one can initially think about the number of possibilities for one of them fixed (by using a scheme, for example), and then add them up. From there, G [3.24] highlights that it is possible for students to reach the total of possibilities, if they are able to think of using one-to-many correspondence.

The interaction between TE2 and teachers allowed participants to refine and expand their SCK. In the specific case of PMT G, we understand that the actions of TE2, combined with the reflection design of PLTT3, provided learning opportunities when: (i) they offered the teacher a space to reflect on the "calculation" she had been searching for since the beginning [3.1 and 3.3]; (ii) made it possible to reflect on what a generalization could be, considering that it would not necessarily need to involve all possibilities (as repeated in I [3.7 and 3.17]) or involve a letter to characterize it as a generalization. As TE2 tried to discuss [3.21, 3.23 and 3.25], the "calculation" sought could involve a step before the idea of $4 \times 3 \times 2$ and, even so, the generalization would be present; (iii) it allowed her to reorganize her professional knowledge to use the task she proposed, deepening her understanding of the different strategies she anticipated (Figure 11).

5. Discussion of the results

In this section, we seek to highlight the results observed in each of the three episodes, relating them to each other and to the literature and theoretical framework chosen to support the identified results, especially regarding to *Opportunities to Learn about Mathematical Knowledge for Teaching Early Algebra*. To understand what knowledge teachers mobilized and built during formative processes, we consider reflections on the different meanings of the equality symbol, as well as manifestations of functional thinking development along PD-EA1 and PD-EA2.

The format chosen by TE1 and TE2 for the organization of the PLTTs made it possible to expand CK, with evidence identified throughout the three episodes, especially by the RATE (Ribeiro & Ponte 2020) that supported the PMTs to think of different strategies for solving the tasks (Silver et al., 2007), thus expanding the potential and possibilities of developing their own algebraic thinking (Blanton & Kaput, 2005), leading them to expand their SCK, more specifically ATK (McCrory et al., 2012).

In Episodes 1 and 2, both the mathematical tasks and the actions of TE1 during the discussions (Heyd-Metzuyanim et al., 2016) were to use the equality symbol with meanings other than the operational one (Kieran, 1981), enabling the teachers identify equivalence and relational meanings. In Episode 2, the teachers were given the opportunity to reflect on decompressing this knowledge in the teaching practice of teacher A (McCrory et al., 2012), reflecting on how students socialized their strategies, expanding their meanings of the equality symbol to include the key idea of equivalence (Kieran, 1981).

In Episode 3, the action of TE2 was intended to help teachers (Desimone, 2009), especially PMT G, to develop mathematical patterns and structural relationships from a combinatorial problem (Mulligan et al., 2020) and obtain a generalization from a numerical expression (Borba et al., 2021). This Episode evidenced HCK, with TE2 problematizing the different understandings of the task by the teachers (Mata-Pereira & Ponte, 2017), allowing G to reflect on a possible generalization (a “calculation” that she was looking for from the beginning) as a manifestation of functional thinking (Blanton & Kaput, 2005). For other teachers, the kind of discussions organized (Adler & Ronda, 2014) by TE2 offered opportunities of trimming the task (McCrory et al., 2012), reformulating them in more accessible ways, both for early grade students and for those of more advanced levels, articulating the use of the possibilities tree and carrying out a multiplication as a representation of the generalization of these possibilities (Borba et al., 2021).

Also in Episode 3, in order to expand CCK, more specifically SA (McCrory et al., 2012), TE2 sought to differentiate two resolution strategies that can be used to solve the combinatorial problem: one of them explicitly using the multiplicative principle and, another, more primary and natural, with the one-to-many correspondence (Montenegro et al., 2021). This is essential knowledge for PMTs to mobilize and (re)structure in order to give effect the recent inclusion of Algebra in the curriculum of early year students in Brazil.

In each of the three episodes, there were opportunities for teachers to mobilize and expand their KCS, when discussing the strategies that students would possibly use to solve the tasks. It is noteworthy that, in both contexts, teachers considered the mathematical task very difficult for the early years, “underestimating” the ability of students to engage in more exploratory teaching situations (Canavarro et al., 2012). In Episode 2, during the analysis of student discussions, the PMTs were surprised by the involvement of students and their resolution strategies, noticing the mathematical strategies adopted by them associated with the meaning of equality as equivalence (Kieran, 1981).

In Episode 3, there is a moment of discussion in which TE2 sought to lead teachers to recognize the importance of communication between them and their students (Craig & Morgan, 2015), helping them to discover the total number of possibilities, without writing case by case (Mulligan et al., 2020). This perception that, when students do not need to write down all the possibilities, counting one by one to solve the task, is already a type of generalization, even if still at an initial level, and that allowed PMT G to review aspects of her practice, giving her more confidence to work generalization in the classroom, ATK (McCrory et al., 2012).

Other moments in the collective discussions promoted by the PLTT brought to light the mobilization and (re)construction of other dimensions of teachers’ pedagogical knowledge. This occurred in all three episodes and was evidenced by the opportunities for teachers to rebuild their KCT. In Episodes 1 and 2, for example, there are moments in which the PMTs reflected possibilities of articulation between the discussed tasks and the Algebra thematic unit in the new Brazilian curriculum document. In Episode 2, the PMTs reflected on goals that could be developed in class with Teacher A’s students. Thus, the PMTs were given the opportunity to trim the Algebra concepts involved therein, in a way that such concepts were accessible to students in early years (McCrory et al., 2012). Also in this Episode, during the analyses carried out by the PMTs on the lessons delivered, PMTs were able to recognize the importance of the teacher taking advantage of moments of discussion of student resolutions to establish mathematical connections and systematize concepts (Putnam & Borko, 2000; Stein et al., 2008).

Finally, aspects of KCC were present in Episode 3, in moments of collective discussion (Adler & Ronda, 2014) in which teachers could reflect on what reformulations the task could receive, so that it could become more suitable for early year students, or even, when teachers need to think about combinatorial problems in this level of education, a new experience for one of the participants, Teacher I.

6. Conclusions and final considerations

Aiming to understand how learning opportunities are constituted and developed so that primary teachers can approach early algebra in the elementary school, this article presents the results of a research program carried out in Brazil in the last five years. Two contexts were chosen to exemplify such results: (i) one focusing on the different meanings of the equality symbol and (ii) other focusing on generalization processes and the construction of functional thinking. The results allowed us to answer the two research questions RQ1 and RQ2, showing us how PLOT model (Ribeiro & Ponte, 2020) enabled teachers to broaden and deepen their professional knowledge to teach (Ball et al., 2008; McCrory et al., 2012) early algebra in early years of schooling (Kieran, 1981; Blanton & Kaput, 2005).

With regard to the RQ1, the results show that the PMTs were able to reflect on the decompressing (McCrory et al., 2012) of knowledge related to the different meanings of the equality symbol (Kieran, 1981; Trivilin & Ribeiro, 2015), when they discussed the lesson taught by Teacher A, namely about how students socialized their resolution strategies and expanded their meanings of the equality symbol, starting to recognize it also by its equivalence meaning. We also observed PLOTs from the analysis and reflection of the lesson taught by PMT G, reviewing aspects of KCC, especially when teachers noticed the reformulations that the task could receive (Adler & Ronda, 2014), so that they could become more appropriate for early years students, and the potential that working with combinatorial problems at this level of education has for the development of functional thinking (Blanton & Kaput, 2008).

Regarding the RQ2, the results indicate that PMTs experienced collective learning opportunities, especially through RATE (Zaslavsky, 2008) in the conduct of PD-EA1 and PD-EA2, favoring the rupture of the isolation that teachers normally face in their schools (Ball & Cohen, 1999). It was noted that PMTs expanded their SCK, especially ATK (McCrory et al., 2012), as they were encouraged to think of different task solving strategies (Silver et al., 2007) and to become aware of the potentialities and possibilities of developing their own algebraic thinking (Blanton & Kaput, 2008). Also as a result of collective learning opportunities, it was noted that the format adopted for PLTTs (Smith, 2001), prepared by TE1 and TE2, using records of practice (Ball et al., 2014), provided to the PMTs the reconstruction of their KCT, highlighting the fact that they recognize possibilities of articulation between the tasks discussed in regards to the equality symbol, and the Algebra thematic unit in the new Brazilian curriculum document, the BNCC (Brasil, 2017).

Adopting approaches in formative processes with in-service teachers, such as the one we present in this article, offers them learning opportunities that encompass moments to validate and rethink the choices and decisions they make when planning and enacting lessons, and how the collective analysis of these lessons avors the mobilization and redefinition of mathematical knowledge for the teaching of early algebra. Advances in the different dimensions of teachers' professional knowledge seem to have been enhanced by the design of the teacher education program, anchored in the PLOT model (Ribeiro & Ponte, 2020), favoring collective moments for teachers to plan, develop and reflect on mathematics lessons regarding the different meanings of the equality symbol and about functional thinking.

The results of our research program have important implications for teacher education and the professional development of primary teachers, as they show the potential of collective work, involving teachers and facilitators, mediated by professional tasks conceived from and for classroom practices involving early algebra, especially because teachers usually do not usually have an opportunity to experience and study these topics in their own schools.

References

Adler, J., & Ronda, E. (2014). An analytic framework for describing teachers' mathematics discourse in instruction. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA* 36 (Vol 2, pp. 9-16). PME.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249-272.

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, *62*(3), 317-335.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes, & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). Jossey Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barboza, L. C. S. (2019). *Conhecimento dos professores dos anos iniciais e o sinal de igualdade: Uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional* [Unpublished Master's Thesis]. Universidade Federal do ABC.

Blanton, M. (2008). *Algebra in elementary classrooms: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Borba, R. E. S. R., Lautert, S. L., & Silva, A. C. (2021). How Do Kindergarten Children Deal with Possibilities in Combinatorial Problems? In A. G. Spinillo, S. L. Lautert, & R. E. S. R. Borba (Eds.), *Mathematical Reasoning of Children and Adults* (pp. 141-167). Springer International Publishing.

Borba, R. E. S. R., Pessoa, C. A. S., & Rocha, C. A. (2013). How Primary School students and teachers think about combinatorial problems**.** *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(4), 895-908.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, experience, and school.* National Academy Press.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. MEC/SFE.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM*, *37*(1), 53-59.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Reidel.

Craig, T., & Morgan, C. (2015). Language and communication in mathematics education. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 529-533). Springer

Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process.* SAGE.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, *34*(3), 3-14.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181-199.

Ferreira, M. C. N. (2017). Algebra in early grades: an analysis of the national curriculum documents. *Rencima*, *8*(5), 16-34.

Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: Between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(6), 547-574.

Jacobs, V. R., Franke, M., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *ICME-13. Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer.

Llinares, A. Z. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87-104.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM*, *52*(4), 663-676.

Pang, J., & Sunwoo, J. (2022). An analysis of teacher knowledge for teaching functional thinking to elementary school students. *Asian Journal for Mathematics Education*, *1*(3), 306-322.

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching Early Algebra: A Systematic Review from the MKT Perspective. *Mathematics*, *9*, 2590.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P., & Branco, N. (2013). Algebraic thinking in initial teacher education. *Educar em Revista*, *1*(40), 39-53.

Putnam, R., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, *29*(1), 4-15.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2021). How Teachers Deal with Students' Mathematical Reasoning When Promoting Whole-Class Discussion During the Teaching of Algebra. In A. G. Spinillo, S. L. Lautert, & R. E. de S. R. Borba. (Org.), *Mathematical Reasoning of Children and Adults* (pp. 239-264). Springer International Publishing.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education program about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2), 49-74.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). A theoretical model for organizing and understanding teacher learning opportunities to teach mathematics. *Zetetike*, *28*, e020027.

Serrazina, M. L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). *APM*.

Sevinc, S., & Galindo, E. (2022). Noticing Student Mathematical Thinking: Self-Contemplation of a Pre-Service Teacher. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(2), 154-169. https://doi.org/10.30935/scimath/11489

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Silver, E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, Y. C., & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 261-277.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Tatto, M. T., & Senk, S. (2011). The mathematics education of future primary and secondary teachers: Methods and findings from the teacher education and development study in mathematics. *Journal of Teacher Education*, *62*(2), 121-137.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. D. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2), em0563.

Trivilin, L. R., & Ribeiro, A. J. (2015). Mathematical Knowledge for Teaching Different Meanings of the Equal Sign: a study carried out with Elementary School Teachers. *Bolema*, *29*(51), 38-59.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(2), 136-147.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Sense Publishers.

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research*, *79*(2), 702-739.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 397-428.

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 245-275.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski, & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional* (Vol. 4, pp. 93-114). Sense Publishers.

Autores

Alessandro Jacques Ribeiro. Universidade Federal do ABC, Santo André, Brasil.
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

https://orcid.org/0000-0001-9647-0274

Marcia Aguiar. Universidade Federal do ABC, Santo André, Brasil. marcia.aguiar@ufabc.edu.br

https://orcid.org/0000-0001-5824-0697

André Luis Trevisan. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil.
andreluistrevisan@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-8732-1912

Henrique Rizek Elias. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil. henriqueelias@utfpr.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-9660-7303

Edison Laderas Huillcahuari, Vladimir Acori Flores, Luis Villa Pérez

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL ASISTIDO POR EL SOFTWARE GEOGEBRA

Differential and integral Calculus teaching assisted by GeoGebra software

RESUMEN

Este estudio evaluó el impacto del software GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en educación superior, analizando autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico y razonamiento. Se utilizó un enfoque cuantitativo y un diseño cuasi experimental con dos grupos independientes (N=60), recopilando datos mediante cuestionarios y escalas tipo Likert, analizados con estadística no paramétrica. Los resultados mostraron mejoras significativas en metacognición, lenguaje simbólico y percepción, potenciando el pensamiento matemático y espacial. El test de Kolmogorov-Smirnov (D=1) indicó una alta desviación entre los grupos. El estudio concluye que GeoGebra es una herramienta innovadora que mejora el aprendizaje de las matemáticas. Futuras investigaciones podrían explorar el uso de GeoGebra en diversas áreas matemáticas, evaluando su efectividad junto con estrategias pedagógicas innovadoras.

PALABRAS CLAVE:

- *Cálculo diferencial e integral*
- *Metacognición*
- *Innovación*
- *Enseñanza - aprendizaje*
- *GeoGebra*

ABSTRACT

This study evaluated the impact of GeoGebra software in the teaching of differential and integral calculus in higher education, analyzing self-regulation, metacognition, meaningfulness, perception of the environment, symbolic language and reasoning. A quantitative approach and a quasi-experimental design with two independent groups (N=60) were used, collecting data through questionnaires and Likert-type scales, analyzed with non-parametric statistics. The results showed significant improvements in metacognition, symbolic language and perception, enhancing mathematical and spatial thinking. The Kolmogorov-Smirnov test (D=1) indicated

KEY WORDS:

- *Differential and integral calculus*
- *Metacognition*
- *Innovation*
- *Teaching - learning*
- *GeoGebra*

Laderas Huillcahuari, E., Acori Flores, V. y Villa Pérez, L. (2023). Enseñanza del cálculo diferencial e integral asistido por el software GeoGebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(3), 357 - 377. https://doi.org/10.12802/relime.23.2634. Recepción: Octubre 24, 2020 / Aceptación: Septiembre 6, 2024.

a high deviation between groups. The study concludes that GeoGebra is an innovative tool that improves mathematics learning. Future research could explore the use of GeoGebra in various mathematical areas, evaluating its effectiveness along with innovative pedagogical strategies.

RESUMO

Este estudo avaliou o impacto do software GeoGebra no ensino do cálculo diferencial e integral no ensino superior, analisando a autorregulação, a metacognição, o significado, a perceção do ambiente, a linguagem simbólica e o raciocínio. Utilizámos uma abordagem quantitativa e um desenho quasi-experimental com dois grupos independentes (N=60), recolhendo dados através de questionários e escalas do tipo Likert, analisados com estatística não paramétrica. Os resultados revelaram melhorias significativas ao nível da metacognição, da linguagem simbólica e da perceção, potenciando o raciocínio matemático e espacial. O teste de Kolmogorov-Smirnov (D=1) indicou um desvio elevado entre os grupos. O estudo conclui que o GeoGebra é uma ferramenta inovadora que melhora a aprendizagem da matemática. Futuras investigações poderão explorar a utilização do GeoGebra em várias áreas matemáticas, avaliando a sua eficácia em conjunto com estratégias pedagógicas inovadoras.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cálculo diferencial e integral*
- *Metacognição*
- *Inovação*
- *Ensino e aprendizagem*
- *GeoGebra*

RÉSUMÉ

Cette étude a évalué l’impact du logiciel GeoGebra sur l’enseignement du calcul différentiel et intégral dans l’enseignement supérieur, en analysant l’autorégulation, la métacognition, la signification, la perception de l’environnement, le langage symbolique et le raisonnement. Nous avons utilisé une approche quantitative et une conception quasi-expérimentale avec deux groupes indépendants (N=60), en recueillant des données par le biais de questionnaires et d’échelles de type Likert, analysées à l’aide de statistiques non paramétriques. Les résultats ont montré des améliorations significatives de la métacognition, du langage symbolique et de la perception, ainsi qu’un renforcement de la pensée mathématique et spatiale. Le test de Kolmogorov-Smirnov (D=1) a révélé un écart important entre les groupes. L’étude conclut que GeoGebra est un outil innovant qui améliore l’apprentissage des mathématiques. Des recherches futures pourraient explorer l’utilisation de GeoGebra dans divers domaines mathématiques, en évaluant son efficacité avec des stratégies pédagogiques innovantes.

MOTS CLÉS:

- *Calcul différentielle et intégrale*
- *Métacognition*
- *Innovation*
- *Enseignement-apprentissage*
- *GeoGebra*

1. Introducción

Cada día la tecnología adquiere mayor relevancia tanto en la vida cotidiana como en los procesos educativos, siendo los programas informáticos cada vez más accesibles y necesarios. En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, el uso de aplicaciones tecnológicas contribuye al desarrollo del pensamiento creativo y a la resolución de problemas mediante el razonamiento matemático (Pilli y Aksu, 2013). En este contexto, GeoGebra se presenta como un software matemático gratuito que facilita el aprendizaje exploratorio. Su uso es intuitivo para principiantes y ofrece un entorno amigable tanto para estudiantes como para docentes (Dikovic, 2009). Una de las principales ventajas de GeoGebra es su capacidad para integrar geometría y álgebra en el proceso de enseñanza (Hohenwarter y Jones, 2007).

Considerando que la tecnología influye en los estilos de aprendizaje, su implementación, junto con la simulación y visualización de modelos matemáticos (Xistouri y Pitta-Pantazi, 2013; Akcay, 2017), puede transformar la comunicación abstracta entre profesores y estudiantes en una experiencia rica y accesible (Abramovich, 2013). En este sentido, el dominio tecnológico es una competencia esencial para la generación actual, y su fomento debería ser prioridad en las aulas de matemáticas (Mainali y Key, 2012).

En la educación universitaria, los estudiantes enfrentan dificultades al pasar de cálculo con una variable a varias. Existen investigaciones y propuestas didácticas que abordan estos desafíos (García-Oliveros et al., 2020; Prior Martínez y Torregosa Gironés, 2020), destacando problemas como la comprensión de gráficos multidimensionales (Pereira, 2020), simetría en representaciones de ternas (Agbolade et al., 2020), y la noción de espacio y dimensión. En el cálculo diferencial, el estudio de áreas irregulares y sólidos de revolución exige la integración de múltiples inteligencias, por lo que esta investigación se centra en el desarrollo del pensamiento matemático y espacial.

La geometría, en particular, requiere la orientación del docente y una complementación entre los enfoques sintético y analítico por parte del estudiante (Aroca Araújo, 2019). El uso de GeoGebra en el cálculo asistido por computadora rompe con los paradigmas tradicionales de la relación docente-estudiante, facilitando un aprendizaje más significativo (Coto Jiménez, 2020; Espinoza Guzmán et al., 2018). En este estudio de caso se analizó el impacto del uso de GeoGebra en el desarrollo del pensamiento matemático y espacial de los estudiantes. El aporte más relevante de la investigación es su contribución a la mejora de la calidad educativa tanto para la comunidad estudiantil como para la docente (Campos Soto et al., 2020).

Los estudios revisados subrayan la importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría, sugiriendo la necesidad de desarrollar una didáctica específica para su implementación. El problema central radica en cómo mejorar la enseñanza de la geometría y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario, utilizando GeoGebra como una herramienta eficaz (Morales Chicana et al., 2022).

A partir de este marco, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el impacto del uso de GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral en estudiantes de Cálculo I en la educación superior universitaria? El objetivo general es determinar dicho impacto, y se derivan los siguientes objetivos específicos: a) evaluar el impacto de GeoGebra en las dimensiones del pensamiento matemático, tales como autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y lógica; b) comparar las habilidades de pensamiento matemático y espacial entre los estudiantes que aprenden con y sin GeoGebra; c) identificar cuál es la dimensión del pensamiento matemático que más influye en la mejora de las habilidades de pensamiento matemático y espacial.

2. Materiales y métodos

El pensamiento matemático se caracteriza por su dinamismo, claridad, progreso y simplicidad, desempeñando un rol fundamental en el aprendizaje (Reyes-Santander et al., 2018). Según Blossier y Richard (2014), este tipo de pensamiento está estrechamente relacionado con el uso de herramientas informáticas y el desarrollo de habilidades específicas en la interacción con dichas herramientas. Basándonos en esta premisa, se considera que el pensamiento matemático y espacial deben reforzar los conocimientos adquiridos en matemáticas. Para este estudio, se diseñaron encuestas centradas en las dimensiones del pensamiento matemático propuestas por Ocaña Gómez et al. (2019). Estas encuestas abarcaron ocho dimensiones y veinte subdimensiones, utilizando una escala Likert de 1 a 10, donde 1 representa el valor más bajo y 10 el más alto (ver Tabla I).

Las encuestas fueron aplicadas a estudiantes de Cálculo I en la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, seleccionados en función de su experiencia en el área de matemáticas. Los estudiantes autorregularon su conocimiento, lo que aportó validez a la investigación, ya que se procesaron los datos a partir de sus propias apreciaciones (Romero-López et al., 2020).

TABLA I
Estructura del cuestionario con escala de Likert antes y después de la enseñanza del GeoGebra

Dimensión (sección)	*Subdimensión*	*Ítems*	*Escala*
Autorregulación	Habilidad, comportamiento, desarrollo social y cognitivo	01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08	Likert
Metacognición	Operaciones intelectuales, asociación al conocimiento, aprendizaje significativo.	9,10,11	Likert
Significatividad	Nivel de uso del GeoGebra	12, 13	Likert
Percepción del entorno	Modelación de sus cálculos en herramientas digitales, comprensión entre los modelos	14	Likert
Lenguaje simbólico	Conoce operadores lógicos, estratifica resultados, toma decisiones acertadas	15	Likert
Modelación de procesos	Software GeoGebra	16	Likert
Comunicación efectiva	Socializa el conocimiento, reconoce habilidades y debilidades	17	Likert
Razonamiento	Argumentación, trascendencia, origen de modelos matemáticos	18, 19, 20	Likert

Fuente: Datos de la prueba piloto

La metodología adoptada fue de enfoque cuantitativo, con un diseño cuasi experimental de nivel explicativo. Se implementaron pretest y postest para evaluar el impacto del uso de GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral (Arias, 2012). Los estudiantes fueron previamente informados sobre los objetivos de aprendizaje, los criterios y los procedimientos de evaluación (Alsina et al., 2019). La muestra estuvo compuesta por 60 estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería, distribuidos en dos grupos independientes: un grupo control y un grupo experimental. La selección de los estudiantes fue inclusiva para aquellos que asistieron regularmente y aprobaron, excluyéndose a los estudiantes que no asistieron y los que no estaban matriculados. El muestreo se realizó mediante una técnica probabilística de tipo aleatorio estratificado.

3. Resultados

En esta sección se presentan los datos que respaldan la calidad científica de la investigación a nivel metodológico. Se trata de un estudio de tipo aplicado, con un nivel explicativo y un enfoque inductivo-analítico. El diseño utilizado fue pre-experimental, con la aplicación de pretest y postest tanto al grupo de control, que siguió un método de enseñanza tradicional, como al grupo experimental, que utilizó GeoGebra. Ambos grupos contaron con el mismo número de participantes.

Una vez recolectada la puntuación de cada estudiante, se procede a validar ¿qué?, aplicando un análisis de correlación canónica y una prueba de Kolmogorov-Smirnov, para determinar si se rechaza o no la hipótesis nula de la investigación (Freire et al., 2020).

3.1. *Propuestas de modelos de trabajo*

Se diseñaron cuatro propuestas de trabajo matemático siguiendo el programa de contenidos en matemática de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga ([UNSCH], 2018), específicamente se abordó el tema de funciones reales de variable real por ser el más extenso y de mayor aplicación en los distintos programas de formación.

Las actividades de aprendizaje que establece el programa de matemáticas de la universidad son:

a. Números reales.
b. Valor absoluto.
c. Desigualdades.
d. Distancias entre la recta real.
e. Intervalos y entornos.
f. Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones
g. Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.
h. Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo.
i. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.
j. Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.
k. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. Idea de lugar geométrico en el plano.
l. Cónicas. Análisis.

m. Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Raíces complejas en funciones cuadráticas: características, expresión y representación. Dominio, recorrido y extremos de una función. – Operaciones y composición de funciones. Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. – Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo. Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.

A continuación, se adaptaron al modelo de enseñanza en línea. Es importante resaltar que la didáctica del docente se rige por las teorías de enseñanza y aprendizaje de Van Hiele actualizadas (Wahab et al., 2017); las propuestas de trabajo son:

3.1.1. *Propuesta 1*

Estimación del área entre dos curvas para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = x + 1$, en el intervalo de intersección de sus curvas, asistido por GeoGebra.

En la primera propuesta, el docente orientó en el modelado a través del software asistido GeoGebra y los estudiantes presentaron evidencias de su desarrollo (Figura 1).

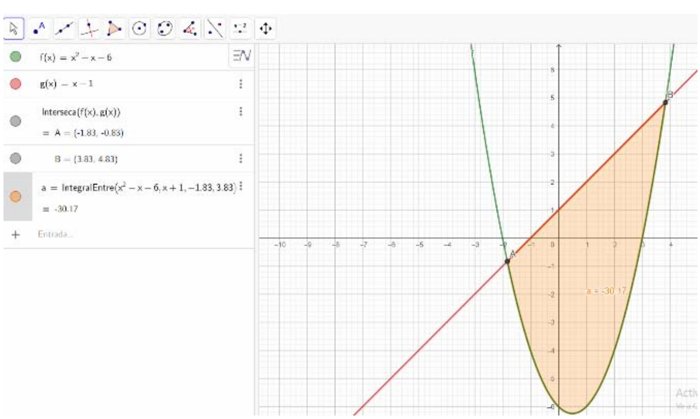


Figura 1. Con orientación del docente y modelando a través del software asistido, los estudiantes presentaron evidencias de su desarrollo

3.1.2. *Propuesta 2*

Estimación del área bajo la curva "La integral como límite del área" o "suma de Riemann". Calcule la suma de Riemann para la para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2 \rangle$. Aplique GeoGebra y compare con el cálculo manual.

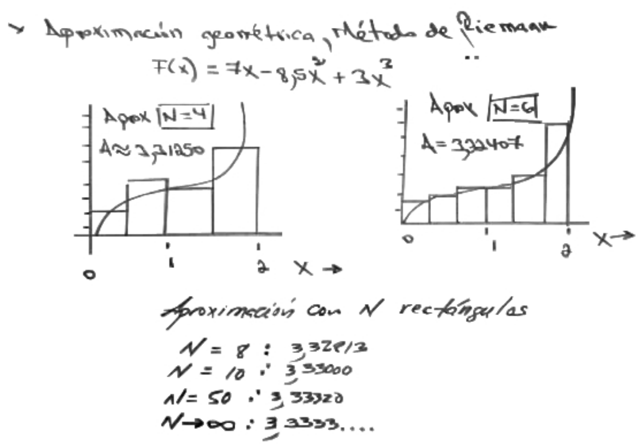


Figura 2. Memoria de cálculo de un estudiante seleccionado al azar, utilizando modelo de Riemann, para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2 \rangle$

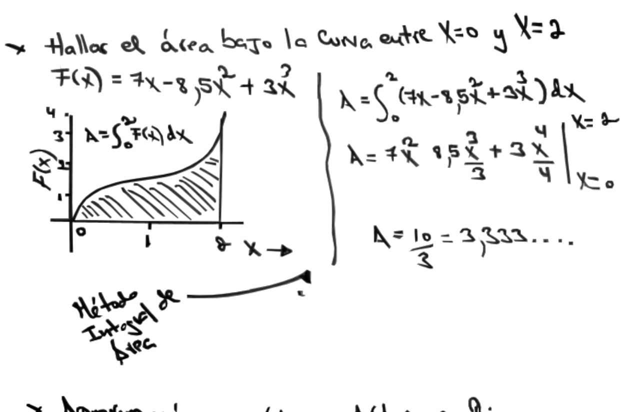


Figura 3. Memoria de cálculo de un estudiante seleccionado al azar, utilizando modelo de integral limite, para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2 \rangle$

En esta propuesta, se solicita a los estudiantes que elaboren una memoria de cálculo utilizando el método de Riemann por aproximaciones y la integral como límite de área. Esta memoria se comparará con el modelo simulado en GeoGebra para extraer conclusiones. Además del análisis descriptivo, se realizó un análisis estadístico para determinar si existen diferencias significativas en el uso de GeoGebra entre los estudiantes de Cálculo I (Vaillant et al., 2020).

3.1.3. *Propuesta 3*

Representar el sólido de revolución, punto a punto y estimar el volumen usando GeoGebra 3D, para la integral definida:

$$V = \pi \int_0^2 f(x)^2 dx$$

De la misma manera, siguiendo la instrucción docente se procedió a determinar el modelo propuesto para estimar el volumen del sólido de revolución (Figura 4).

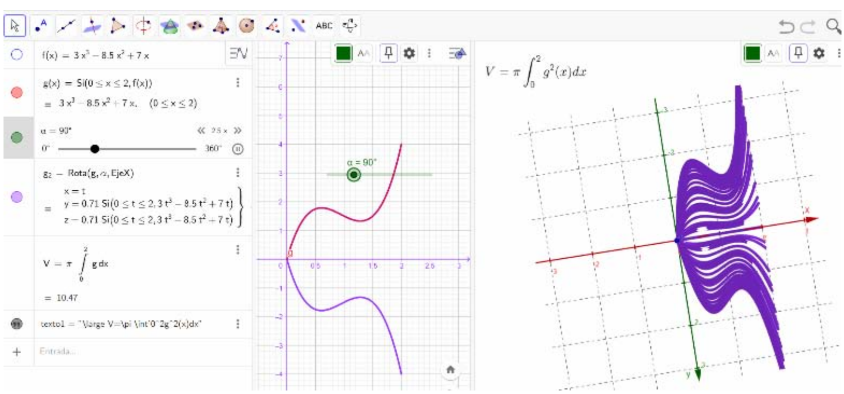


Figura 4. Sólido de revolución para la integral definida $f(x) = 3x^3 - 8.5x^2 + 7x$ en el intervalo ⟨0, 2⟩

3.1.4. *Propuesta 4*

Representar las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 8$, $h(x) = x^3$, seguidamente en el rango positivo ⟨0, + ∞⟩, el dominio ⟨-2, 2⟩; y con la función rotar de GeoGebra 3D, construir el sólido de revolución en torno al eje *y*. Seguir las instrucciones del docente.

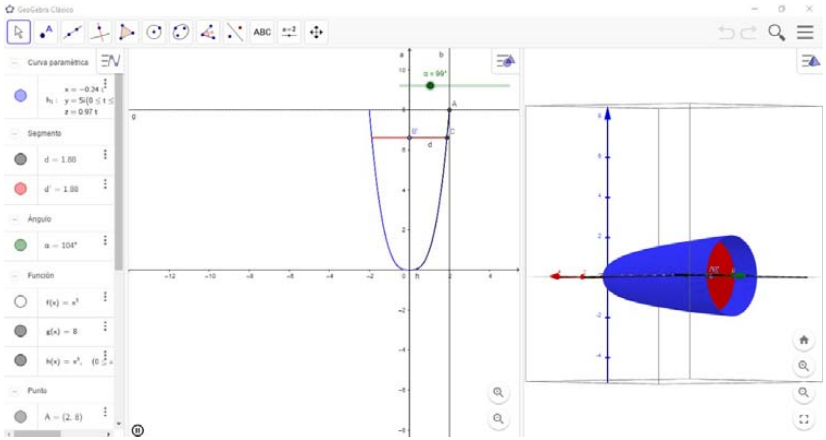


Figura 5. Sólido de revolución de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 8$, $h(x) = x^3$ en el rango positivo $\langle 0, +\infty \rangle$ y el dominio $\langle -2, 2 \rangle$.

Los estudiantes representaron su modelo geométrico utilizando el software, guiados por el docente según el modelo aplicado en estudios recientes de geometría. De acuerdo con Fabres Fernández (2016, p. 91), “una propuesta metodológica efectiva es aquella orientada a tareas de conceptualización, investigación y demostración, que fomente habilidades como visualización, dibujo, comunicación, razonamiento lógico y transferencia, basadas en los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele y un enfoque de resolución de problemas”.

3.2. *Análisis estadístico*

Para evaluar las mejoras en el pensamiento matemático y espacial, los datos recolectados de las encuestas realizadas antes y después de la aplicación de GeoGebra en la asignatura Cálculo I se analizaron mediante una correlación canónica. Este análisis permitió estudiar la relación entre los dos momentos de enseñanza-aprendizaje y determinar cuán vinculadas están las ocho dimensiones con la variable canónica, identificando correlaciones directas e inversas. El Análisis de Correspondencia Canónica (CCA) permite examinar la relación proporcional o inversa entre dos o más distribuciones (Restrepo-Betancur et al., 2019). Se realizó una prueba de permutación para verificar si la relación entre la tabla de contingencia y las variables explicativas es significativa. Los coeficientes de adecuación de las variables canónicas (U,V) son cruciales, ya que determinan qué dimensiones son significativas y permiten aceptar o rechazar la hipótesis nula (Vera, 2019):

Sean dos vectores aleatorios $X = X_1, X_2, \ldots, X_p$ e $Y = Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ de dimensiones p y q. En el análisis de correlación canónica buscamos dos variables U y V.

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_pX_p = X_a$$
$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \ldots + b_qY_q = Y_b$$

Asimismo,

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Tal que la correlación entre U y V sea máxima. Sean S_{XX} y S_{YY} las matrices de covarianzas de X e Y respectivamente y sea S_{XY} la matriz de covarianzas de las variables de X y de Y. Si suponemos que las varianzas de U y V son igual a 1 entonces nuestro problema se traduce en encontrar los vectores a y b tal que maximizan $a^t S_{XY} b$ que es la correlación entre U y V.

$$Max.Corr.\,(U,V) = a^t S_{xy} b$$

Si y sólo si,

$$a^t S_{XX} a = 1$$
$$b^t S_{YY} b = 1$$

En este sentido, las variables resultantes U y V se las llama variables canónicas solución, a los vectores a y b primeros vectores canónicos y a la *Corr.* (U, V), primera correlación canónica. En este sentido, se procede a respaldar esta primera apreciación con la Prueba de Shapiro-Wilk (Shapiro y Wilk, 1965) para determinar cuáles de estas dimensiones son las que marcan la toma de decisiones en cuanto a las hipótesis de investigación.

La prueba de Shapiro-Wilk se utilizó para evaluar la normalidad del conjunto de datos de los estudiantes de Cálculo I. Teóricamente, la hipótesis nula plantea que la muestra $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ proviene de una población con distribución normal. Se usa desde el año 1965 y fue propuesta por Samuel Shapiro y Martin Wilk, se le considera una prueba de fiabilidad a la hora de estimar los valores de “p” y “alpha”. El modelo aplicado es el siguiente:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i * x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x')^2}$$

donde, x_i es el número que ocupa la i-ésima posición en la muestra en orden creciente y la media muestral se presenta: $x' = x_1 + x_2, \ldots, + x_n / n$; la hipótesis nula se rechazara si “W” es demasiado pequeño. El valor de “W” debe estar entre 0 y 1.

Finalmente, se aplicó una prueba de Kolmogorov-Smirnov entre las medias de las dimensiones antes y después de modelar las propuestas de trabajo matemático con GeoGebra, para comparar el valor-p computado con el nivel de significación alpha, de esta manera podemos asumir cuál de las hipótesis soporta la investigación. Si "*p*" es mayor que "alpha" se acepta la hipótesis nula, en caso contrario se rechaza. Entonces, se contrasta la hipótesis de normalidad de la población, el estadístico de prueba es la máxima diferencia de:

$$D = |F_n(x) - F_0(x)|$$

siendo $F_n(x)$ la función de distribución muestral y $F_0(x)$ la función correspondiente a la población normal especificada en la hipótesis nula. La repartición del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es no dependiente de la distribución de la población especificada en la hipótesis nula y los valores críticos están tabulados. Si la distribución pedida es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se consiguen empleando la proposición Lilliefors, asumiendo, "Una de las propiedades más importantes de la mezcla de modelo de distribuciones normales es su flexibilidad para acomodar varios tipos de funciones de distribución" (Barakat et al., 2019).

4. Discusión de resultados

Los valores propios para el pensamiento matemático y espacial antes y después de usar GeoGebra indican que las variables canónicas necesarias para las correlaciones entre ellas es una sola, "F_1". En este sentido se explica el 90.615 % de la variabilidad con la enseñanza asistida por GeoGebra (Tabla II).

TABLA II
Valores propios de correlación antes y después de usar GeoGebra

	F_1	F_2
Valor propio	0.072	0.007
Variabilidad	90.65	9.385
% acumulado	90.615	100.00

Fuente: SPSS V26

Con base en los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk, con nivel de significancia del 0.05, se observa que solo una combinación lineal de las dimensiones autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva, razonamiento (0.058) presenta la mayor correlación (ver Tabla III).

TABLA III
Prueba de Lambda de Shapiro-Wilk

Lambda	*F*	*GL1*	*GL2*	*Pr > F*
0.921	0.058	64	260.2772964	1.000
0.993	0.007	49	232.8798687	1.000

Fuente: SPSS V26

Las correlaciones de las dos variables canónicas generadas, “F_1” y “F_2”, refleja igual que la tabla anterior, que solo una variable canónica (0.268), está fuertemente vinculada con las dimensiones de la investigación (ver Tabla IV).

TABLA IV
Correlaciones canónicas generadas

F_1	F_2
0.268	0.086

Fuente: SPSS V26

Los coeficientes de redundancia de ambos grupos de variables canónicas revelan que las variables “Y_1”, que son las ocho dimensiones evaluadas antes de implementar GeoGebra, presentan mayor nivel de explicación para las variables “Y_2” (después de implementar (GeoGebra); en cambio al examinar los coeficientes de redundancia de la variable “Y_2”, tienen menor nivel de explicación para las variables “Y_1” (ver Tabla V). Esto quiere decir que las dimensiones autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y razonamiento después de implementar el software tienen una variabilidad grande (90.615 %).

TABLA V
Coeficientes de redundancia

Coeficiente de redundancia (Y_1):		
F_1	F_2	*Suma*
0.018	0.001	0.020
Coeficiente de redundancia (Y_2):		
F_1	F_2	*Suma*
0.010	0.001	0.011

Fuente: SPSS V26

Estos son los resultados que definieron el estudio, los coeficientes canónicos estandarizados (ver Tabla VI). A partir de aquí se definieron las combinaciones lineales de cada una de las dos variables canónicas que resultaron ser significativas. La dimensión lenguaje simbólico después de aplicar GeoGebra mejoró (0.510[a]), sabiendo que antes del software era menor (-0.053[a]) implica que su correlación es proporcional inversa, esta dimensión está vinculada con la variable canónica.

TABLA VI
Coeficientes canónicos estandarizados

Coeficientes canónicos estandarizados antes de GeoGebra (Y_1):		
	F_1	F_2
Autorregulación	0.489	-0.004
Metacognición	0.000[b]	0.313
Significatividad	0.048[c]	-0.062
Percepción	0.489	-0.004
Lenguaje simbólico	-0.053[a]	0.036
Modelación	0.048	-0.062
Comunicación	0.000	0.313
Razonamiento	0.106	0.706

Coeficientes canónicos estandarizados después de GeoGebra (Y_2):		
	F_1	F_2
Autorregulación*	-1.215	1.367
Metacognición*	0.861[b]	-1.000
Significatividad*	0.510[c]	0.194
Percepción*	0.134	-0.171
Lenguaje simbólico*	0.510[a]	0.194
Modelación*	-0.042	-0.004
Comunicación*	-0.042	-0.004
Razonamiento*	-0.042	-0.004

a,b,c,d dimensiones significativas de proporcionalidad directa,
* dimensiones después de implementar GeoGebra

Fuente: SPSS V26

El resultado más importante de la investigación está en la dimensión metacognición, dado que era nula antes de implantar el software (0.000[b]) y después de aplicarlo mejoró (0.861[b]).

También mejoró la dimensión significatividad después de la aplicación (0.510[c]), que era casi nula antes (0.048[c]). Ese mismo comportamiento se obtuvo para la dimensión percepción, que pasó de (0.134[d]) a (0.489[d]); aunque hay una pobre correlación, es significativa. Sin embargo, las dimensiones de modelación, comunicación y razonamiento no experimentaron cambios significativos, lo que indica que no se correlacionan con el uso del software. Además, la dimensión de autorregulación no mostró mejora, mostrando una correlación inversa que indica una desmejora después de la implementación del software asistido.

En la Figura 6 se representan de forma gráfica los resultados de los coeficientes canónicos estandarizados, en el primer cuadrante se muestran las dimensiones metacognición*, percepción*, significatividad* y lenguaje simbólico* como las dimensiones más importantes del estudio. El mejor valor de adecuación en ambas variables lo muestra la variable canónica F_1 con un valor de (0.254) en la Tabla VII.

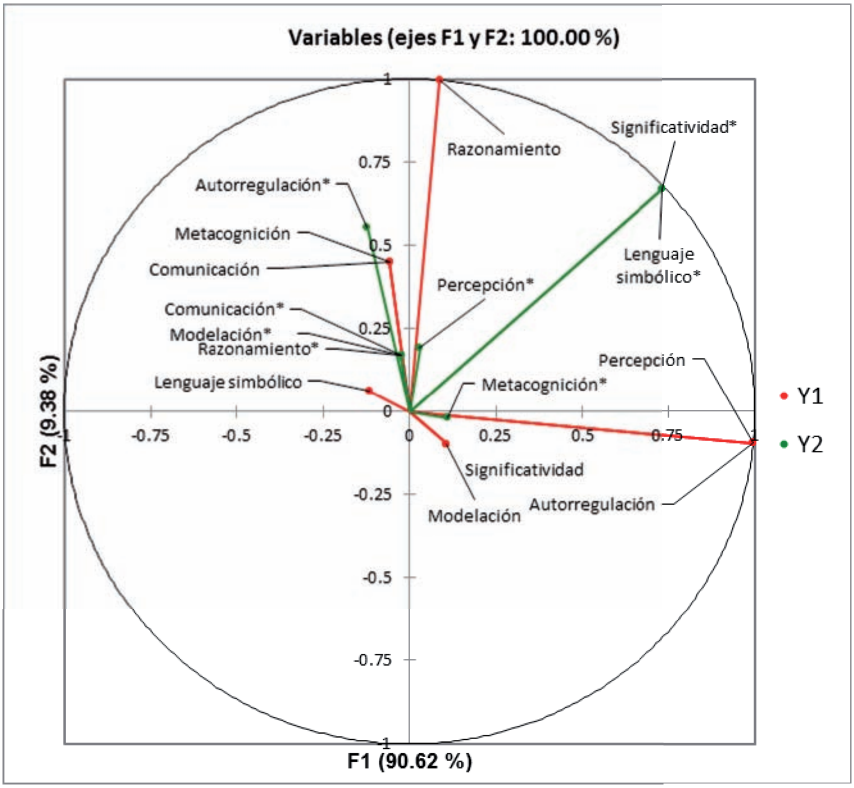


Figura 6. Gráfico de coeficientes canónicos estandarizados, en relación a las ochodimensiones de estudio

TABLA VII
Prueba de Kolmogorov-Smirnov
para validez de distribución de la población

D	*1*
Valor p-bilateral	Menor a 0.0001
alfa	0.05

Fuente: SPSS V26

Este es el resultado final la investigación, donde se muestran los coeficientes de adecuación del estudio, la variable canónica más representativa es (F_1 = 0.254) (Tabla VIII).

TABLA VIII
Coeficientes de adecuación de las variables canónicas

Coeficientes de adecuación de las canónicas	
(Y_1): F_1	F_2
0.254	0.180
Coeficientes de adecuación de las canónicas	
(Y_2): F_1	F_2
0.138	0.166

Fuente: SPSS V26

En la Figura 7 se muestra que los estudiantes otorgaron una puntuación más alta al estudio después de implementar GeoGebra en la asignatura Cálculo I. En las dos líneas de tendencia, las puntuaciones sin GeoGebra están entre 2 y 6 en promedio, mientras que en el segundo cuestionario el promedio está entre 6 y 10 en la escala de Likert, lo que representa que los estudiantes mejoraron sus habilidades de desarrollo del pensamiento matemático y espacial, corroborando con el estudio que las dimensiones que marcaron esta apreciación son metacognición*, percepción*, significatividad* y lenguaje simbólico*.

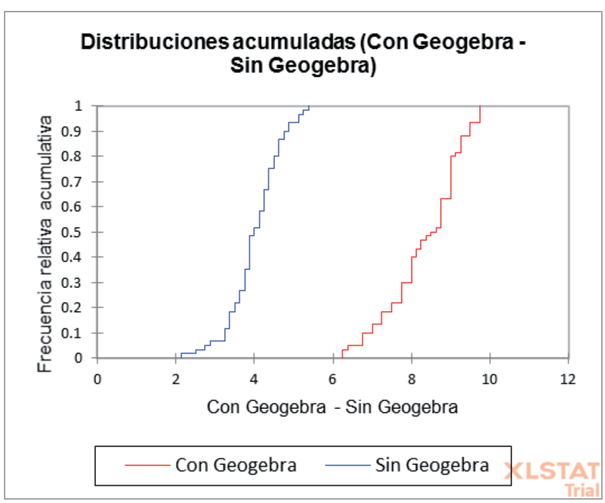


Figura 7. Distribución de los resultados de la encuesta a estudiantes de Cálculo I, aplicando GeoGebra

5. Conclusiones

Se concluye que el uso de GeoGebra tuvo un impacto significativo en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral en estudiantes de educación superior. GeoGebra demostró ser una herramienta eficaz tanto en la enseñanza general de las matemáticas como en la de Cálculo específico (Lemos y Almeida, 2019). La investigación evaluó el impacto del software en diversas dimensiones del pensamiento matemático: autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y razonamiento.

A diferencia del estudio de Vilchez-Quesada (2019), que se centra en la satisfacción estudiantil y rendimiento académico con el software VilCretas, la presente investigación profundiza en la relación entre variables canónicas antes y después de la implementación de GeoGebra, con un énfasis en habilidades cognitivas como la autorregulación y la metacognición. Se observó una alta variabilidad (90.615%) en las dimensiones tras la implementación del software.

La investigación también revela limitaciones del software educativo en ciertas dimensiones del aprendizaje, mientras que el estudio de Lugar Geométrico en GeoGebra se enfoca en aspectos visuales y conceptuales. Sería útil explorar cómo las visualizaciones geométricas pueden influir en dimensiones metacognitivas como la autorregulación y modelación (Gómez-Chacón y Escribano, 2014). Ambos estudios sugieren que el software educativo no es una solución universal, sino que su eficacia depende del enfoque y las dimensiones evaluadas.

Finalmente, se identificó que la dimensión metacognición es la más representativa en la mejora de habilidades matemáticas y espaciales, seguida de lenguaje simbólico, significatividad y percepción. Las dimensiones menos vinculadas a las variables canónicas fueron razonamiento, modelación, autorregulación y comunicación, sugiriendo la necesidad de investigar más en estas áreas.

Agradecimientos

Expresamos nuestro especial agradecimiento a la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga y a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, quienes estuvieron siempre dispuestos a colaborar y contribuyeron significativamente a la realización y divulgación del presente trabajo de investigación.

Referencias

Alsina, Á., García, M. y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15*(55), 85–108. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/294

Abramovich, S. (2013). Computers in Mathematics Education: an introduction. *Computers in the Schools, 30*(1–2), 4–11. https://doi.org/10.1080/07380569.2013.765305

Agbolade, O., Nazri, A., Yaakob, R., Ghani, A. A. y Cheah, Y. K. (2020). Morphometric analysis of 3D soft-tissue for sexual dimorphism in human face. *International Journal of Morphology, 38*(2), 367-373. https://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022020000200367

Akcay, A. O. (2017). Instructional technologies and pre-service mathematics teachers' selection of technology. *Journal of Education and Practice, 8*(7), 163–173. https://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/36021

Aroca Araújo, A. (2019). La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica, 22*(1), 1-8. https://dx.doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222

Arias, F. G. (2012). *El proyecto de investigación: introducción a la metodología científica* (6a ed.). Episteme. https://bit.ly/3cTgjvg

Barakat, H. M., Aboutahounb, A. W. y El-kadar, N. N. (2019). A new extended mixture skew normal distribution, with applications. *Revista Colombiana de Estadística, 42*(2). https://doi.org/10.15446/rce.v42n2.70087

Blossier, M., y Richard, P. R. (2014). Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17*(4(II)), 327–342. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.17416

Campos Soto, M. N., Navas-Parejo, M. R. y Moreno Guerrero, A. J. (2020). Realidad virtual y motivación en el contexto educativo: estudio bibliométrico de los últimos veinte años de Scopus. *Alteridad, Revista de Educación, 15*(1), 47-60. https://dx.doi.org/10.17163/alt.v15n1.2020.04

Coto Jiménez, M. (2020). Descubrimiento del estilo de aprendizaje dominante en estudiantes de Matemática Superior. *Revista Educación, 44*(1), 240-252. https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v44i1.38571

Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6,* 191–203. https://eudml.org/doc/252642

Espinoza Guzmán, J., Rodríguez Granados, N. y Moreira-Mora, T. E. (2018). Relación entre diseño instruccional y rendimiento académico en un curso presencial y bimodal de Matemática: un estudio cuasiexperimental. *Revista Educación, 42*(2), 573-597. https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i2.28763

Fabres Fernández, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios Pedagógicos, 42*(1), 87-105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Freire, G. L., Sousa, V. C., Moraes, J. F., Alves, J. F., Oliveira, D. V. y Nascimento, J. R. (2020). Are the traits of perfectionism associated with pre-competitive anxiety in young athletes? *Cuadernos de Psicología del Deporte, 20*(2), 37-46. https://www.redalyc.org/journal/2270/227064711003/html/

García-Oliveros, G., Salguero-Rivera, B., Rodríguez-Díaz, O., Palomino-Bejarano, E. y Caicedo-Valencia, R. (2020). Las prácticas de evaluación de las matemáticas universitarias: Tensiones y desafíos desde la red conceptual en la que se inscriben. *Uniciencia, 34*(1), 246-262. https://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.14

Gómez-Chacón, I. M., y Escribano, J. (2014). Actividades sobre lugares geométricos desarrolladas en un sistema de geometría dinámica. visualización no icónica y génesis instrumental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4(II)), 361–383. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.17418

Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. En D. Küchemann (Ed), *Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131. https://eprints.soton.ac.uk/50742/2/Hohenwarter_Jones_link_geom_alg_GeoGebra_2007.pdf

Lemos, G. C. y Almeida, L. S. (2019). Compreender, raciocinar e resolver problemas: Novo instrumento de avaliação cognitiva. *Análise Psicológica, 37*(2), 119-133. https://dx.doi.org/10.14417/ap.1583

Mainali, B. y Key, M. (2012). Using dynamic geometry software GeoGebra in developing countries: a case study of impressions of mathematics teachers in Nepal. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–16. https://www.cimt.org.uk/journal/mainali.pdf

Morales Chicana, L., Zuta Velayarse, L. M., Solis Trujillo, P. B. Fernández Otoya, F. A. y García González, M. (2023). El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Referencia Pedagógica*, *11*(1), 2–13. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2308-30422023000100002

Ocaña Gómez, A., Pulido López, D. A., Gil Suárez, S. M. y Zuluaga López, M. M. (2019). Cambios en el desempeño de estudiantes de pensamiento matemático desde la evaluación formativa con un banco de preguntas en línea. *Interdisciplinaria*, *36*(1), 7-22. https://www.redalyc.org/journal/180/18060087001/html/

Pereira, V. C. (2020). Por uma poética cartesiana: gráficos 3D nas criações digitais de André Vallias. *Estudos de Literatura Brasileira Contemporânea*, (59), 1-15. https://doi.org/10.1590/2316-40185914

Pilli, O. y Aksu, M. (2013). The effects of computer-assisted instruction on the achievement, attitudes and retention of fourth grade mathematics students in North Cyprus. *Computers & Education, 62*, 62–71. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.010

Prior Martínez, J. y Torregosa Gironés, G. (2020). Razonamiento configural y Espacio de Trabajo Geométrico en la resolución de problemas de probar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 178-198. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09

Quiliano Navarro, M. y Quiliano Navarro, M. (2020). Inteligencia emocional y estrés académico en estudiantes de enfermería. *Ciencia y Enfermería, 26*(3). https://dx.doi.org/10.4067/s0717-95532020000100203

Restrepo-Betancur, L. F., Peña-Serna, C. y Martínez-González, M. F. (2019). Cambio climático en la ciudad de Medellín - Colombia, en un periodo de cincuenta años (1960-2010). *DYNA, 86*(209), 312-318. https://dx.doi.org/10.15446/dyna.v86n209.69531

Reyes-Santander, P., Aceituno, D. y Cáceres, P. (2018). Estilos de pensamiento matemático de estudiantes con talento académico. *Revista de Psicología, 36*(1), 49-73. https://dx.doi.org/10.18800/psico.201801.002

Romero-López, A. M., Portero-de-la-Cruz, S. y Vaquero-Abellán, M. (2020). Effectiveness of a web platform on university students' motivation to quit smoking. *Revista Latino-Americana de Enfermagem, 28,* 1-9. https://doi.org/10.1590/1518-8345.3731.3318

Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples) . *Biometrika*, *52*(3/4), 591–611. https://doi.org/10.2307/2333709

Universidad Nacional de San Cristobal de Huamanga. (2018). Currículo Escuela Profesional de Ingeniería Agroindustrial. http://209.45.73.27/wp-content/uploads/2019/10/MALLA-C.-E.P.-FISMA-CARRERA-MAT EM%C3%81TICA.pdf

Vaillant, D., Rodríguez Zidán, E. y Betancor Biagas, G. (2020). Uso de plataformas y herramientas digitales para la enseñanza de la Matemática. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação 28* (108), 718-740. https://doi.org/10.1590/s0104-40362020002802241

Vera, O. (2019). A interpretação dos resultados: um elemento de significado para inferência estatística. *Educar em Revista, 35*(78), 131-152. https://doi.org/10.1590/0104-4060.69046

Vílchez-Quesada, E. (2019). Estudio de caso: Estrategia de enseñanza y aprendizaje asistida por computadora para un curso de matemática discreta a través del uso del paquete VilCretas en el software Wolfram Mathematica. *Revista Electrónica Educare, 23*(2), 1-25. https: //dx.doi.org/10.15359/ree.23-2.13

Wahab, R. A., Abdullah, A. H., Mokhtar, M., Atan, N. A. y Abu, M. S. (2017). Evaluation by experts and designated users on the learning strategy using SketchUp make for elevating visual spatial skills and geometry thinking. *Bolema, 31*(58), 819-840. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a15

Xistouri, X. y Pitta-pantazi, D. (2013). Using GeoGebra to develop primary school students' understanding of reflection. *North American GeoGebra Journal, 2*(1), 19–23. https: //mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/38

Autores

Edison Laderas Huillcahuari. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.
edison.laderas@unsch.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-4598-319X

Vladimir Acori Flores. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.
vafunsch@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7195-1047

Luis Villa Pérez. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.
https://orcid.org/0000-0002-9951-0582

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame),* asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

- Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
- Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
- Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
- Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
- Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

- *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

– *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
– *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
– *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Se reciben manuscritos dentro de los periodos: *1 de enero al 30 de junio*, y *1 de septiembre al 31 de octubre*. Estos deben presentarse en versión electrónica, vía correo electrónico a *editorial@relime.org*; deben ser de una extensión máxima de 9,000 palabras en su primer envío, sin excepciones, incluyendo cuadros, gráficas, referencias y anexos; tener una redacción clara, buena ortografía y una estructura coherente al tipo de artículo enviado.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

En este último número del vigésimo sexto volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Adrián Gómez Árciga	Universidad Autónoma de Baja California, México
Agustín Grijalva	Universidad de Sonora, México
Alberto Camacho Rios	Instituto Tecnológico de México, México
Aldo Ivan Parra Sánchez	Universidad del Cauca, Colombia
Alfonso Castañeda Ovalle	Colegio de Bachilleres, México
Ana Isabel Maroto Sáez	Universidad de Valladolid, España
Angela María Restrepo	Universidad Externado de Colombia, Colombia
Angélica Moreno	Universidad de Sonora, México
Apolo Castañeda	Cicata IPN
Audy Salcedo	Universidad Central de Venezuela, Venezuela
Bruno Rodrigo Teixeira	Universidade Estadual de Londrina, Brasil
Camila Augusta do Nascimento Amaral	Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil
Camila Peres Nogues	Universidad de Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Carlos Valenzuela García	Universidad de Guadalajara, México
Carolina Carrillo García	Universidad Autónoma de Zacatecas, México
Cecilia Rita Crespo Crespo	Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico – UTN, Argentina
Celina Abar	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
Ceneida Fernández	Universidad de Alicante, España
Claudete Cargnin	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Brasil
Claudia Gisela Espinosa Guía	Colegio Valle de Filadelfia, México

Claudia Lisete Oliveira Groenwald	Universidade Luterana do Brasil, Brasil
Claudia Mendez	CASIO, México
Cristina Ochoviet	Instituto de Profesores Artigas, Uruguay
Daniel Chazan	University of Maryland, Estados Unidos
Daniel Eudave Muñoz	Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
Daniela Pagés Rostán	Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación, Uruguay
Daysi Julissa García Cuellar	Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Perú
Diana Paola Villabona Millán	Cinvestav, México
Diana Patricia Salgado	Universidad Nacional del Sur, Argentina
Diana Torres	Instituto Tecnológico de Sonora, México
Edgar Alberto Guacaneme Suárez	Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
Eliane Matesco Cristovão	Universidade Federal de Itajubá (Unifei), Brasil
Eliane Matesco Cristovão	Universidade Federal de Itajubá, Brasil
Esptiben Rojas Bernilla	Universidad de Magallanes, Chile
Everaldo Gomes Leandro	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Brasil
Felipe Almuna Salgado	Universidad de Melbourne, Australia
Fernando Manuel Lourenço Martins	Instituto Politécnico de Coimbra - Escola Superior de Educação, Portugal
Flávia Roldan Viana	Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, Brasil
Francisco Javier Lezama Andalón	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Guadalupe Simón	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
Guillermo Ramirez Montes	Universidad de Costa Rica, Costa Rica
Gustavo Villamizar Acevedo	Universidad Pontificia Bolivariana - Bucaramanga. Colombia
Hélia Pinto	Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal
Ivonne Sánchez	Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez Chihuahua, México
Jason Ureña Alpizar	Universidad de Costa Rica, Costa Rica
Jesus Eduardo Hinojos	Instituto Tecnológico de Sonora, México

Jesús Enrique Hernández	Universidad de Calgary, Canadá
Jhony Alexander Villa-Ochoa	Universidad de Antioquia, Colombia
John Henry Durango Urrego	Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Balladares Burgos	Universidad Andina Simón Bolívar, Ecuador
José Carlos Pinto Leivas	Universidade Franciscana - UFN -, Brasil
José Luis Lupiáñez	Universidad de Granada, España
Juan Luis Piñeiro	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
Juan Manuel Gonzalez-Forte	Universidad de Alicante, España
Juan Pedro Martín-Díaz	Universidad de Huelva, España
Juan Sebastián Arias	Universidad Nacional de Colombia, Colombia
Kesia Ramires	Universidad Federal da Grande Dourados, Brasil
Landy Elena Sosa Moguel	Universidad Autónoma de Yucatán, México
Leticia Sosa Guerrero	Universidad Autónoma de Zacatecas, México
Lilia Patricia Aké	Universidad Autónoma de Queretaro, México
Liliana Suárez Téllez	Instituto Politécnico Nacional, México
Luci Teresinha Marchiori dos Santos Bernardi	Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões: Frederico Westphalen, Brasil
Luis Albarracín	Universidad Autónoma de Barcelona, España
Luis López Acosta	Universidad de Costa Rica, Costa Rica
Luis Marcelo Casis	Universidad de Los Lagos, Chile
Luis Moreno Armella	Cinvestav - IPN, México
Manuel Joaquim Saraiva	Universidade da Beira Interior, Portugal
Maria de Lurdes Marques Serrazina	Universidade Federal de Itajubá, Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal
Maria de Lurdes Marques Serrazina	Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal
María del Socorro García González	Universidad Autónoma de Guerero, México
María Florencia Cruz	Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Maria Helena Martinho	Universidad del Miño, Portugal
Maria Ivete Basniak	Universidade Estadual do Paraná, Brasil
Mariana Montiel Hernández	Georgia State University, Estados Unidos
Martha Leticia García Rodríguez	Instituto Politécnico Nacional, México

Mauricio Orozco del Castillo	Instituto Tecnológico de Mérida, México
Melissa Andrade-Molina	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Miguel Solis	Universidad Autónoma de Chiapas, México
Mihály Martínez-Miraval	Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Nielka Rojas	Universidad Católica del Norte (UCN), Chile
Nilo Teodorico Colquepisco Paucar	Universidad Nacional de Cañete, Perú
Pablo Carranza	Universidad Nacional de Río Negro, Argentina
Patricio Herbst	University of Michigan School of Education, Estados Unidos
Paulo Vilhena da Silva	Universidade Federal do Pará, Brasil
Rebeca Flores	Benemérita Escuela Normal Veracruzana Enrique C. Rebsamen, México
Rocio Chao-Fernandez	Universidad de A Coruña, España
Ronny Gamboa Araya	Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica
Ruth Rodríguez Gallegos	ITESM, México
Samantha Quiroz	Universidad Autonoma de Coahuila, México
Seydel Bueno García	Universidad de Camagüey, Cuba
Silvia Ibarra	Universidad de Sonora, México
Teresa F. Blanco	Universidad de Santiago de Compostela, España
Veridiana Rezende	Universidade Estadual do Paraná, Brasil
Verónica Díaz Quezada	Universidad de los Lagos, Chile
Víctor Larios Osorio	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Viviane Beatriz Hummes	Universitat de Barcelona (UB), España
William Oswaldo Flores López	Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, Nicaragua
Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Brasil
Zenia Yacir Testa Rodríguez	Consejo de Formación en Educación - Uruguay

VOLUMEN 0, 1997

Presentación de Relime / R. M. FARFÁN / La investigación en matemática educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior.

VOLUMEN 1, 1998

I. GUZMÁN / Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. L. RICO / Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. M. ARTIGUE / Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? F. CORDERO / El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones.

VOLUMEN 2, 1999

H. J. DE LEÓN / Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. V. A. LÓPEZ / Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. L. D. MELGAREJO / Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en tutoriales inteligentes. E. MORALES / Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9º grado de educación básica.

M. ANIDO, H. E. RUBIO / Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya. B. GÓMEZ / Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías”. C. RIZO, L. CAMPISTROUS / Estrategias de resolución de problemas en la escuela. L. RADFORD / La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica.

VOLUMEN 3, 2000

D. DENNIS, J. CONFREY / La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. B. D’AMORE, B. MARTINI / Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. E. DUBINSKY / De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. M. SIERRA, M. T. GONZÁLEZ, C. LÓPEZ / Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad.

Y. O’FARRILL / Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. Óptima-Geometría. G. MUÑOZ / Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. M. B. FERNÁNDEZ / Perfeccionamiento de la enseñanza - aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. C. CUBILLO, T.ORTEGA / Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. M. F. LASALVIA, J. D. PIQUET / Construcción de gráficos de funciones: “Continuidad y prototipos”.

VOLUMEN 4, 2001

VOLUMEN 5, 2002

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D. E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

M. A. ANIDO, R. LÓPEZ, H. E. RUBIO / Las superficies en el aprendizaje de la geometría. V. LARIOS / La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. A. L. LAVALLE, E. B. MICHELI, N. RUBIO / Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Y. OTÁLORA, M. OROZCO / ¿Por qué 7345 se lee como “setenta y tres cuarenta y cinco? E. RESENDIZ / La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. R. UICAB, A. OKTAÇ / Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.

RELIME ESPECIAL, 2006

L. RADFORD / Introducción. Semiótica y Educación Matemática. M. OTTE / Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. R. DUVAL / Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques? R. CANTORAL, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA, G. MARTÍNEZ / Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. L. RADFORD / Elementos de una teoría cultural de la objetivación. J. D. GODINO, V. FONT, M. WILHELMI / Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

A KOUKKOUFIS, J. WILLIAMS / Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers. B. D´AMORE / Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. A. GAGATSIS, I. ELIA, N. MOUSOULIDES / Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students’ thinking? A. SÁENZ-LUDLOW / Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth. G. T. BAGNI / Everyday and Mathematical Language 100 Years after the Publication of “On Denoting” by Bertrand Russell. F. ARZARELLO / Semiosis as a Multimodal Process. B. D’AMORE / Conclusiones y perspectivas de investigación futura.

VOLUMEN 10, 2007

F. CORDERO, R. FLORES / El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. B. D´AMORE, M. I. FANDIÑO / Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. C. DOLORES, I. CUEVAS / Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. C. L. OLIVEIRA, G. da SILVA NUNES / Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível. A. ROMO, A. OKTAÇ / Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. L. ZUÑIGA / El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo.

R. CANTORAL / Índices, bases de citas y factor de impacto. ¿Una política editorial para Relime? B. D´AMORE, J. D. GODINO / El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. T. M. MENDONÇA, S. M. PINTO, I. M. CAZORLA, E. RIBEIRO / As estruturas aditivas nas séries iníciais doensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. J. G. MOLINA, A. OKTAÇ / Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. G. TORREGROSA, H. QUESADA / Coordinación de procesos cognitivos en geometría.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL, T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A. R. CORICA, M. R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B. GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J. A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J. P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. A. VIGGIANI, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C. ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO, C. CEN, L. SUÁREZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA, R. ROA / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

VOLUMEN 14, 2011

R. CANTORAL / Relime en ERIH. J. L. BELMONTE, M. SIERRA / Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. E. CANUL, C. DOLORES, G. MARTÍNEZ-SIERRA / De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. J. GASCÓN / Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. V. Y. KATAOKA, A. C. S. de OLIVEIRA, A. de SOUZA, A. RODRIGUES, M. SILVA / A Educação Estatística no Ensino Fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção.

R. CANTORAL / Quince años y nuevos retos para Relime. A. CONTRERAS, M. GARCÍA / Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. M. L. MAGALHÃES / O ensino de aritmética na escola nova: Contribuições de dois escritos autobiográficos para a história da educação matemática (Minas Gerais, Brasil, primeiras décadas do século xx). A. T. de OLIVEIRA, G. de la ROCQUE / O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. M. POCHULU, V. FONT / Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa.

VOLUMEN 15, 2012

R. CANTORAL / *Nani gigantum humeris insidentes*. Relime y el Acceso Abierto. C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES / Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. G. MARTÍNEZ / Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. J. J. ORTIZ, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS / Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. M. RIBEIRO, R. MONTEIRO, J. CARRILLO / Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / 0.167. J. M. ANDRADE, M. J. SARAIVA / Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. A. ASSIS, J. D. GODINO, C. FRADE / As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. D. VEGA-CASTRO, M. MOLINA, E. CASTRO / Sentido estructural de estudiantes de Bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

R. CANTORAL, V. GARNICA / 2012, año nuevo: Relime – Bolema. A. BARBOSA, I. VALE, P. PALHARES / Pattern tasks: thinking processes used by 6th grade students. F. CORDERO, H. SILVA-CROCCI / Matemática educativa, identidad y latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. M. A. LONJEDO, M. P. HUERTA, M. CARLES FARIÑA / Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. M. L. OLIVERAS, M. E. GAVARRETE / Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. M. STEPHENS, A. RIBEIRO / Working towards algebra: the importance of relational thinking.

VOLUMEN 16, 2013

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / No hay revista sin comunidad, ni comunidad sin diálogo. V. ALBANESE, F. J. PERALES / Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. C. FONSECA, J. GASCÓN, C. OLIVEIRA / Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. A. MORALES, F. CORDERO / La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. F. VISEU, L. MENEZES / Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2014

A. KUZNIAK, P. R. RICHARD / Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. J. C. RAUSCHER, R. ADJIAGE / Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. B. PARZYSZ / Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. A. BRACONNE / Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ? K. NIKOLANTONAKIS, L. VIVIER / Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. S. COUTAT / Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? X. XISTOURI, D. PITTA, A. GAGATSIS / Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. P. MICHAEL, A. GAGATSIS / Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. E. MONTOYA, A. MENA, J. MENA / Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. I. ELIA, K. EVANGELOU, K. HADJITTOOULI, M. VAN DEN HEUVEL / A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

R. I. BARRERA / Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en evidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : mediation semiotique et parcours des élèves. A. GAGATSIS, E. DELIYIANNI / Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. V. CARRIÓN, F. PLUVINAGE / Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. D. TANGUAY, L. GEERAERTS / Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : Comment intégrer le travail avec les LGD ? M. TESSIER, P. R. RICHARD, N. LEDUC, M. GAGNON / Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : genèse d'un espace de travail géométrique idoine. M. BLOSSIER, P. R. RICHARD / Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. J. MITHALAL / Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géométrie dynamique 3D. I. M. GÓMEZ, J. ESCRIBANO / Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. A. KUZNIAK / Travail mathématique et domaines mathématiques. S. R. DE COTRET / Espaces de travail / espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? D. ZALDÍVAR, C. CEN, E. BRICEÑO, M. MÉNDEZ, F. CORDERO / El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. O. FIGUERAS, P. FLORES, F. PLUVINAGE / La mediación docente y los espacios de trabajo matemático.

R. CANTORAL / Retos y logros para la comunidad de Matemática Educativa... / J. B. BÚA-ARES, M. T. FERNÁNDEZ, M. J. SALINAS / Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. T. GARCÍA, P. GONZÁLEZ, J. A. GONZÁLEZ, C. RODRÍGUEZ, L. BETTS / On-line assessment of the process involved in maths problem - solving in fifth and sixth grade students: self - regulation and achievement. C. DIAS, L. SANTOS / Portefólio reflexivo de matemática enquanto instrumento de autorregulação das aprendizagens de alunos do ensino secundário. D. LAGO-PEREIRA, M. DE CARVALHO-BORBA / Seres humanos - com - internet ou internet - com - seres humanos: uma troca de papéis?

R. CANTORAL / La publicación científica y algunos fenómenos emergentes. M. DEL P. BELTRÁN, G. MONTIEL / La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. C. STEEGMAN, A. PÉREZ-BONILLA, M. PRAT, A. A. JUAN / Math-Elearning@cat: Factores claves del uso de las TIC en Educación Matemática Secundaria. P. GÓMEZ, M. C. CAÑADAS / Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. M. P. HUERTA, P. I. EDO, R. AMORÓS, J. ARNAU / Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional.

VOLUMEN 20, 2017

G. MONTIEL / La transición de Relime al contexto editorial digital. / C. ALMEIDA, L. CASAS, R. LUENGO / Estudo da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º anos (17-18 anos de idade) de escolaridade sobre o conceito de Probabilidade: O contributo das teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold. A. ANDRADE, A. LOTERO, E. ANDRADE / La hipótesis de los cuadros de significado en la solución de problemas matemáticos. J. P. DA PONTE, J. MATA, M. QUARESMA, I. VELEZ / Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. S. MARTÍNEZ, J. M. MUÑOZ, A. M. OLLER, T. ORTEGA / Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / Nuevo factor de impacto en WoS. M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato. J. GASCO / La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). A. MALLART, J. DEULOFEU / Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. K. PÉREZ, J. E. HERNÁNDEZ / La elaboración de preguntas en la enseñanza de la comprensión de problemas matemáticos.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / Identidad y visibilidad. El binomio ideal. Relime en los índices nacionales, regionales y mundiales. F. J. ALMUNA / The role of context and context familiarity on mathematics problems. D. ARECES, M. CUELI, T. GARCÍA, C. RODRÍGUEZ, P. GONZÁLEZ / Intervención en dificultades de aprendizaje de las

R. FIORAVANTI, I. M. GRECA, J. A. MENESES / Caminhos do ensino de estatística para a área da saúde. J. GALLARDO, V. A. QUINTANILLA / El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI, B. CASTRO PÉREZ, D. W. RÍOS JARQUÍN / ¿Qué sabemos de los lectores de Relime? V. MOLFINO, C. OCHOVIET / Enseñanza de la matemática para la justicia social en cursos de postgraduación. D. MATO-VÁZQUEZ, R. CHAO-FERNÁNDEZ, A. CHAO-FERNÁNDEZ / Efectos de enseñar matemáticas a través de actividades musicales. F. CORDERO, T. DEL VALLE, A. MORALES / Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. A. SAORÍN VILLA, G. TORREGROSA GIRONÉS, H. QUESADA VILELLA / Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico.

R. CANTORAL / Formas de difusión institucional del conocimiento: un papel para *Relime*. P. HERNÁNDEZ, G. BUENDÍA / Significados para la matemática escolar a partir de su uso en un escenario extraescolar. Un ejemplo con la propiedad periódica. C. POMPEU, I. M. GÓMEZ / Aprendizaje matemático y estrategias de identidad. Un caso de Educación de Personas Adultas en Brasil. P. PERRY, L. CAMARGO, C. SAMPER / Puntos medios en triángulo: un caso de construcción de significado personal y mediación semiótica. A. F. DÍAZ-CÁRDENAS, A. DÍAZ-FURLONG, H. A. DÍAZ-FURLONG, M. R. SANKEY-GARCÍA, G. ZAGO-PORTILLO / Multiplication and division of fractions: Numerical cognition development and assessment procedures.

VOLUMEN 23, 2020

R. CANTORAL / In memoriam: Eugenio Filloy y François Pluvinage. A. VERGARA, S. ESTRELLA, P. VIDAL-SZABÓ / Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. P. DAMAS BEITES, M. L. FRAZÃO RODRIGUES BRANCO, M. C. ROSAS PEREIRA PEIXOTO DA COSTA / Esquemas de demonstração para proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade. M. P. HUERTA / Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. R. I. BARRERA-CURIN, L. BERGERON, A. PERREAULT / Analyse des interactions dans une classe où les élèves présentent des difficultés langagières : l'influence des pratiques d'une enseignante sur l'activité mathématique des élèves.

R. CANTORAL / La Matemática Educativa en tiempos de crisis, cambio y complejidad. F. FISCHER FIGUEIREDO, C. L. OLIVEIRA GROENWALD / *Design*, (re)formulação e resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática. L. F. GUTIÉRREZ-FALLAS, A. HENRIQUES / O TPACK de futuros profesores de matemática numa experiência de formação. Ö. ERGENE, A. ŞÜKRÜ ÖZDEMIR / A study on the pre-service elementary mathematics teachers' knowledge on the convergence and divergence of series in the context of theory and

VOLUMEN 24, 2021

VOLUMEN 25, 2022

F. CORDERO / IN MEMORIAM Ricardo Cantoral. S. C. TEIXEIRA NUNES, E. FULGINITI DE ASSIS, L. VELLINHO CORSO / Diferentes perfis de flexibilidade cognitiva em estudantes brasileiros de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental. M. BÁEZ MELENDRES, R. M. FARFÁN MÁRQUEZ / Sistematización y análisis de un proceso de reflexión sobre la matemática escolar: aspectos para la profesionalización docente. M. PARRAGUEZ GONZÁLEZ, S. ROA-FUENTES, R. JIMÉNEZ ALARCÓN, A. BETANCUR SÁNCHEZ / Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. J. A. LABRA PEÑA, C. M. VANEGAS ORTEGA / Desarrollo del Razonamiento Geométrico de estudiantes de Enseñanza Media cuando abordan el concepto de Homotecia.

G. MONTIEL-ESPINOSA / También otra comunicación de la ciencia es posible. S. BUENO, M. BURGOS, J. D. GODINO, O. PÉREZ / Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. T. C. ROCHA SILVA GUSMÃO, V. FONT MOLL / Análisis metacognitivo de un aula de matemática sobre medida de superficies. A. HUENCHO, E. CHANDÍA, F. ROJAS, G. WILLIAMSON / Tercer espacio: Modelo de tareas matemáticas con responsabilidad cultural desde el contexto indígena. G. FONSECA, J. P. DA PONTE / O estudo de aula no desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino da matemática de professores do 1.º ciclo.

G. MONTIEL-ESPINOSA / Roles de participación y comunicación en la investigación en Matemática Educativa. C. A. D. N. AMARAL, M. A. VEIGA FERREIRA DE SOUZA, A. BELFORD POWELL / Construção do conceito de fração sob a perspectiva de medição: contribuições do 4a instructional model. E. MONTERO, M. L. CALLEJO, J. VALLS / Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. D. RADOVIC S., M. PAMPAKA / Relación entre percepciones de la enseñanza, sexo y actitudes hacía las matemáticas de estudiantes. M. BURGOS, M. J. CASTILLO / Idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas: una experiencia con estudiantes para maestro.

VOLUMEN 26, 2023

G. MONTIEL-ESPINOSA / La revisión como diálogo. Una pieza clave para el crecimiento colectivo en la comunicación científica. L. ESPINOZA RAMÍREZ, A. VERGARA GÓMEZ / Enseñanza interdisciplinaria música - matemática: la guitarra y su rol protagónico en el desarrollo histórico de la música occidental. F. DA SILVA, V. PAZUCH / Conhecimentos geométricos mobilizados na prática do professor: *knowledge quartet* como ferramenta de análise. C. LÓPEZ, P. GÓMEZ / Revisión curricular de los temas de estadística en educación primaria. M. POLICASTRO, M. RIBEIRO / Uma caracterização do conhecimento especializado do professor de matemática da educação infantil e anos iniciais em tópicos de medida.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 26, Número 3

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Noviembre de 2023
Impresión bajo demanda