EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 22-3
9 771665 243002 02203

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 22, Núm. 3, noviembre 2019

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime

Vol. 22, Núm. 3, 2019

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
MÉXICO

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 22, Núm. 3, noviembre, 2019. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2019 Impreso en México

Volumen 22 – Número 3 – 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Volumen 22 Número 3 Noviembre de 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 22, Número 3, se terminó de imprimir en noviembre de 2019, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

FORMAS DE DIFUSIÓN INSTITUCIONAL DEL CONOCIMIENTO: UN PAPEL PARA *RELIME*

Ways of institutional dissemination of knowledge: a role for *Relime*

Ricardo Cantoral
Departamento de Matemática Educativa,
Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas - PIDPDM,
Cinvestav-IPN México

En editoriales previos se han tratado temáticas diversas, que van desde la pertenencia de *Relime* en índices, directorios, repositorios y bases de datos de revistas internacionales y su reflejo en los indicadores bibliométricos, hasta la necesidad de participar en la formación de una comunidad académica. Si bien la revista nace en Latinoamérica, impulsada por un grupo pionero, se le concibió e impulsó como una estrategia regional que se propuso jugar el papel de una publicación científica de clase mundial: ser global desde lo local.

En los más recientes editoriales, también se discutió en torno a algunas perspectivas teóricas que han alcanzado una influencia notoria en la región, sobre todo aquellas que han impactado el nivel de la currícula nacional en algunos países. Más recientemente se plantearon reflexiones sobre el acceso abierto y el futuro que éste depara. Del mismo modo, se ha llegado al análisis de las métricas alternativas y se discutió con mucha seriedad el tema del futuro próximo al seno de políticas científicas institucionales.

Con este número queremos cerrar el volumen compartiendo una mirada a escala de la forma en que se organiza la producción académica de la comunidad. Como primer nivel de la escala se elige a los libros de texto (tema profusamente tratado en *Relime*), enseguida se encuentran los artículos científicos (contenido central de *Relime*) y finalmente las enciclopedias especializadas (tema no discutido en la revista, si acaso sólo algunas cuestiones puntuales empleadas por los autores de los artículos).

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 255-260.
DOI: 10.12802/relime.19.2230

Los libros de texto reúnen la información reconocida y ampliamente consensuada para constituirse como la primera fuente documental del conocimiento entre la población. Los textos se organizan en niveles secuenciales de información según los ciclos y niveles escolares, atendiendo a profundidades diversas y a perspectivas teóricas específicas. Por otra parte, las enciclopedias reúnen “las huellas de la disciplina académica” en periodos, digamos cuatro o cinco años recientes. Las revistas especializadas tienen una misión diferente: se encargan de compartir los conocimientos de frontera y dan cuenta de las dinámicas de evolución teórica y conceptual de los últimos tres o cuatro años. Los congresos especializados, como una forma de revista, muestran la dinámica particular de una disciplina al compartir los resultados de los dos años más recientes.

En general, los libros de texto y las revistas de divulgación son ampliamente estudiadas en los ciclos anteriores al posgrado, en mayor medida en licenciatura, y menos en el bachillerato. Mientras que las revistas especializadas de corriente principal son la fuente principal de información del posgrado y la investigación. No obstante, habrá que reconocer que en los últimos años las enciclopedias especializadas han tenido una gran influencia a nivel de investigación, conjuntamente con las revistas de corriente principal.

En el número anterior de *Relime* (vol. 22, núm. 2), discutimos la idea de cómo acceden nuestros lectores a la revista, es decir, propusimos averiguar qué leen los lectores de *Relime* como complemento de las otras fuentes de información. Hoy queremos mostrar que las cuestiones temáticas planteadas son amplias, pero no incluyen la totalidad descrita en la más reciente *Enciclopedia de Matemática Educativa* (*Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer). Esta cuestión no ha sido atendida a plenitud en las páginas de *Relime*. Será acaso porque se precisa de una enciclopedia específica para esta región del mundo, o que los niveles de profesionalización disciplinar aún no se han consolidado como habría de esperarse.

Veamos esto con más detalle. Recientemente se concluyó la segunda edición de la *Encyclopedia of Mathematics Education*, cuyo editor en jefe fue el Prof. Stephen Lerman de la South Bank University, del Centre for Mathematics Education, London, Reino Unido, y que edita Springer.

La *Enciclopedia de Matemática Educativa* declara un objetivo que en líneas generales fue el siguiente:

> The Encyclopedia of Mathematics Education is a comprehensive reference text, covering every topic in the field with entries ranging from short descriptions to much longer pieces where the topic warrants more elaboration.

> The entries provide access to theories and to research in the area and refer to the leading publications for further reading. The Encyclopedia is aimed at graduate students, researchers, curriculum developers, policy makers, and others with interests in the field of mathematics education. It is planned to be 700 pages in length in its hard copy form but the text will subsequently be up-dated and developed on-line in a way that retains the integrity of the ideas, the responsibility for which will be in the hands of the Editor-in-Chief and the Editorial Board.
>
> This second edition will include additional entries on: new ideas in the politics of mathematics education, working with minority students, mathematics and art, other cross-disciplinary studies, studies in emotions and mathematics, new frameworks for analysis of mathematics classrooms, and using simulations in mathematics teacher education. Existing entries will be revised, and new entries written.

La primera edición de la *Enciclopedia de Matemática Educativa* que preparó Springer fue publicada en 2014; cinco años después se publica la segunda edición, pues éste, como se señala anteriormente, es un proyecto dinámico con vida propia que cambia en cada edición, lo que puede constatarse al comparar el contenido de la segunda edición de 2019 con la de 2014. Se incorporaron nuevas entradas, y otras, aparecidas en la edición anterior, se actualizaron, mientras que otras fueron por vez primera incorporadas. El contenido de esta segunda edición es el siguiente:

Index

16. Complexity in Mathematics Education
17. Computational/Algorithmic Thinking
18. Cooperative Didactic Engineering
19. Creativity in Mathematics Education
20. Critical Mathematics Education
21. Critical Thinking in Mathematics Education
22. Cultural Influences in Mathematics Education
23. Curriculum Resources and Textbooks in Mathematics Education
24. Data Handling and Statistics Teaching and Learning
25. Deaf Children, Special Needs, and Mathematics Learning
26. Deductive Reasoning in Mathematics Education
27. Design Research in Mathematics Education
28. Dialogic Teaching and Learning in Mathematics Education
29. Didactic Contract in Mathematics Education
30. Didactic Engineering in Mathematics Education
31. Differential Equations Teaching and Learning
32. Discrete Mathematics Teaching and Learning
33. Documentational Approach to Didactics
34. Early Algebra Teaching and Learning
35. Education of Mathematics Teacher Educators
36. Embodied Cognition
37. Enactivist Theories
38. Engagement with Mathematics
39. Equity and Access in Mathematics Education
40. Ethnomathematics
41. Fieldwork/Practicum in Mathematics Education
42. Functions Learning and Teaching
43. Gender in Mathematics Education
44. Gestures in Mathematics Education
45. Giftedness and High Ability in Mathematics
46. Heuristics and Biases
47. Heuristics in Mathematics Education
48. History of Mathematics and Education
49. History of Mathematics Teaching and Learning
50. Immigrant Students in Mathematics Education
51. Indigenous Students in Mathematics Education
52. Informal Learning in Mathematics Education
53. Information and Communication Technology (ICT) Affordances in Mathematics Education
54. Instrumentalization in Mathematics Education
55. Instrumentation in Mathematics Education
56. Interdisciplinary Approaches in Mathematics Education

57. Interpretative Knowledge
58. Joint Action Theory in Didactics (JATD)
59. Language Background in Mathematics Education
60. Learning Difficulties, Special Needs, and Mathematics Learning
61. Learning Practices in Digital Environments
62. Linear Algebra Teaching and Learning
63. Logic in University Mathematics Education
64. Mathematical Approaches
65. Mathematical Cognition: In Secondary Years [13–18] Part 1
66. Mathematical Cognition: In Secondary Years [13–18] Part 2
67. Mathematical Cognition: In the Elementary Years [6–12]
68. Mathematical Games in Learning and Teaching
69. Mathematical Learning Difficulties and Dyscalculia
70. Mathematical Literacy
71. Mathematical Representations
72. Mathematics Curriculum Evaluation
73. Mathematics Learner Identity
74. Mathematics Teacher Education Organization, Curriculum, and Outcomes
75. Mathematics Teacher Identity
76. Mathematics Teachers and Curricula
77. Mathematization as Social Process
78. Meta-Didactical Transposition
79. Models of In-Service Mathematics Teacher
    Education Professional Development
80. Noticing of Mathematics Teachers
81. Number Teaching and Learning
82. Pedagogical Content Knowledge Within
    “Mathematical Knowledge for Teaching”
83. Political Perspectives in Mathematics Education
84. Preparation and Professional Development of University Mathematics Teachers
85. Probabilistic and Statistical Thinking
86. Problem-Solving in Mathematics Education
87. Quasi-empirical Reasoning (Lakatos)
88. Registers of Semiotic Representation
89. Risk and Decision Making - Psychological and Educational Aspects
90. Risk and Decision Making – Fundamental Aspects
91. Risk Education
92. Scaffolding in Mathematics Education
93. Secondary-Tertiary Transition in Mathematics Education
94. Service-Courses in University Mathematics Education
95. Socioeconomic Class and Socioeconomic Status in Mathematics Education
96. Socioepistemology in Mathematics Education

97. Stoffdidaktik in Mathematics Education
98. Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO) Model
99. Students' Attitude in Mathematics Education
100. Subject Matter Knowledge Within 'Mathematical Knowledge for Teaching'
101. Teaching Practices at University Level
102. Teaching Practices in Digital Environments
103. Technology and Curricula in Mathematics Education
104. Technology Design in Mathematics Education
105. The van Hiele Theory
106. Theories of Learning Mathematics
107. Types of Technology in Mathematics Education
108. University Mathematics Education
109. Values in Mathematics Education
110. Visualization and Learning in Mathematics Education
111. Wait Time
112. Zone of Proximal Development in Mathematics Education

¿Cuáles de estos temas podrían ser de interés para *Relime*? Naturalmente que todos, pero cómo saber cuáles son de interés al momento actual; lejos de especular, la postura de la Revista es comunitaria, y será la propia comunidad quien hará su parte... Se abre pues un espacio de publicación que busque atender una agenda internacional. Veremos al tiempo cuáles de esas líneas se habrán publicado en artículos de *Relime*.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., Castro-Pérez, B., & Ríos-Jarquín, W. (2019). ¿Qué sabemos de los lectores de Relime? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(2), 133-138. https://doi.org/10.12802/relime.19.2220

Lerman, S. (2019). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. (Springer eBook, Springer Nature Switzerland AG, Online ISBN 978-3-319-77487-9).

Plácido Hernández Sánchez, Gabriela Buendía Ábalos

SIGNIFICADOS PARA LA MATEMÁTICA ESCOLAR A PARTIR DE SU USO EN UN ESCENARIO EXTRAESCOLAR. UN EJEMPLO CON LA PROPIEDAD PERIÓDICA

Meanings for School Mathematics from its use in an extra-scholar scenario. An example with periodic property

RESUMEN

Uno de los objetivos de la matemática escolar es generar un conocimiento que se integre funcionalmente a nuestras vidas. Así, se suscribe a la perspectiva teórica del uso del conocimiento en otros escenarios como una base de significación para la matemática escolar. Se analiza el caso de la propiedad periódica de las funciones y de su uso en un escenario de divulgación. En éste, el uso de dicho saber al trabajar en una actividad de observación astronómica se muestra más allá de la aplicación de una definición, y se desarrollan herramientas y argumentos alrededor de un conocimiento matemático capaz de integrarse y ser útil -no utilitario- al individuo. Los resultados de los análisis de uso extraescolar de la periodicidad reportados abonan a una base de significados para la propiedad periódica y, de esta forma, a una matemática escolar funcional para la vida de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE:

- *Conocimiento en uso*
- *Periodicidad*
- *Prácticas*
- *Socioepistemología*

ABSTRACT

One of the goals of school mathematics is to generate a knowledge integrated into our lives. In view of this, we propose the theoretical perspective of the knowledge use in other scenarios as a significance basis for school mathematics. We analyze the case of the periodic property of the functions and its use in a science museum. In it, the use of such knowledge while working in an astronomical observation activity shows itself beyond a definition application; tools and arguments arise around a mathematical knowledge that can be useful. The results of the analyzes of extracurricular use of the periodicity that are reported contribute to a base of meanings for the periodic property and, with it, to a functional school mathematics for the life of the students.

KEYWORDS:

- *Using knowledge*
- *The periodic property*
- *Practices*
- *Socioepistemology*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 261 - 284.
Recepción: Septiembre 15, 2018 / Aceptación: Octubre 10, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2231

RESUMO

Um dos objetivos da matemática escolar é gerar um conhecimento que integre-se de maneira funcional nas nossas vidas. Assim, o presente texto se insere na perspectiva teórica da utilização do conhecimento em outros cenários como base para o enriquecimento da matemática escolar. Neste trabalho é analisado o caso da propriedade periódica das funções e de seu uso em um cenário de divulgação (museu de ciências). Neste contexto o uso de tal saber na atividade de observação astronômica se coloca lém da aplicação de uma "simples" definição, isto é, se desenvolvem ferramentas e argumentos entorno de um conhecimento matemático capaz de integra-se e ser útil ao indivíduo, mas não utilitário. Os resultados das análises reportados neste estudo extraescolar criam uma base de ricos significados para a propriedade periódica das funções e, desta forma, gera-se uma matemática escolar funcional para a vida dos estudantes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Conhecimento em prática*
- *Propriedade periódica*
- *Periodicidade*
- *Sócio epistemologia*

RÉSUMÉ

L'un des objectifs des mathématiques scolaires est de générer des connaissances qui s'intègrent fonctionnellement dans nos vies. Ainsi, l'écrit s'inscrit dans la perspective théorique de l'utilisation de la connaissance dans d'autres scénarios comme base significative des mathématiques scolaires. On examine le cas de la propriété périodique des fonctions et de leur utilisation dans un scénario de divulgation. Dans celui-ci, l'utilisation de ce savoir dans le cadre d'une activité d'observation astronomique s'étend au-delà de l'application d'une définition et des outils et des arguments sont développés autour d'une connaissance mathématiques capable de s'intégrer et être utile - non utilitaire - à l'individu. Les résultats des analyses de l'utilisation extrascolaire de la périodicité rapportée donnent une base de signification pour la propriété périodique et donc pour une mathématique scolaire fonctionnelle pour la vie des élèves.

MOTS CLÉS:

- *Connaissance en usage*
- *Périodicité*
- *Pratique*
- *Socio-épistémologie*

1. Introducción

La escuela busca generar un conocimiento matemático funcional que se integre a la vida del estudiante; sin embargo, parece que sólo se considera cómo se enseña matemáticas sin cuestionarla. Discutir sobre cuánto sabe de matemáticas un estudiante termina en estrategias para enseñar más matemáticas sin que se incluyan consideraciones sobre cómo se usa el conocimiento en otros contextos, dentro y fuera de la escuela (Cordero, 2006).

Proponemos un marco de significación para la matemática escolar que considera que toda forma de saber -popular, técnico o culto- es legítima y, en conjunto, conforman la sabiduría de la humanidad (Cantoral, 2013a). A esto nos referiremos con reconocer la naturaleza social de la matemática escolar, y en esa línea proponemos considerar su uso como una fuente de significación.

En este escrito, trataremos el caso de la propiedad periódica de las funciones. Las tareas escolares usuales no suelen considerar que la periodicidad caracteriza un cierto tipo de cambio que no sólo es repetitivo, sino que lo es de manera particular. En cambio, el tratamiento escolar privilegia conocer, aplicar o comprobar una fórmula para que el carácter periódico del objeto una función, una gráfica, un fenómeno, una serie, sea reconocido.

Planteamos pues un cuestionamiento sobre la periodicidad que amplíe el marco de significación desde lo exclusivamente analítico hacia el reconocimiento de los elementos que provee un contexto extraescolar, uno de divulgación. El objetivo es hacerlo a través de un análisis de usos de la periodicidad y dar una base de significados para dicha propiedad. Así se aporta un cambio epistemológico para la matemática escolar, uno que reconozca su naturaleza social y se encuentre en camino de lograr un conocimiento funcional para el ser humano.

2. Antecedentes: el conocimiento matemático escolar

Las prácticas educativas más tradicionales consideran que el aprendizaje de los estudiantes depende de la atención que presten: un buen comportamiento en clase, una ejecución repetitiva y memorística de los algoritmos y las propiedades que se enseñan en el aula. En ese sistema didáctico, la periodicidad tiene un marco de referencia limitado pues suele ser exclusivamente analítico y está relacionado con el conocimiento de la igualdad $f(x) = f(x+p)$ o la forma particular de la función periódica por excelencia: sen $(x) =$ sen $(x+2\pi)$.

Buendía (2010, 2011) reporta casos en los que la función $y = x + \text{sen}\, x$ se califica como periódica porque sube siempre igual (figura 1). En la respuesta, aunque pareciera que sí se nota la repetición presente, el carácter periódico se hereda por la presencia de la función seno en la expresión:

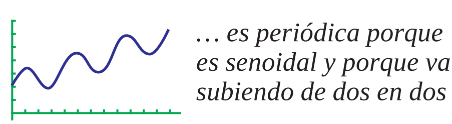


Figura 1. Heredando la propiedad periódica (Buendía, 2010)

Si bien la periodicidad es una propiedad que caracteriza un comportamiento repetitivo, ese comportamiento no sólo se refiere a que algo se repite, sino que importa reconocer cómo se repite. La figura 2 es una ilustración de cómo, aunque se evidencia la repetición en el decimal periódico 7/22 para hallar la cifra 120, el carácter periódico simplemente no es visible, por lo tanto, no se aprovecha, no se usa. Importa pues reconocer significativamente el cambio y cómo cambia el cambio.

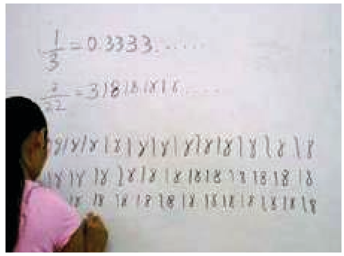


Figura 2. La fracción 7/22 (Buendía, 2011)

De acuerdo con Cantoral (2013b), cambio se entiende como una modificación de estado y por otra parte, variación es la cuantificación de dicho cambio. No obstante, agrega el autor, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento.

> … pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación (p. 45).

El pensamiento variacional ha sido fundamental en el desarrollo del conocimiento científico: el estudio del cambio sirve para entender sus efectos en diversos fenómenos. Es más, en numerosos casos lo que conocemos es cómo cambia el cambio. Obsérvese en la figura 1 cómo en la caracterización de la gráfica, como periódica, en realidad lo que se está señalando es cómo cambia el cambio.

Poincaré, por ejemplo, propuso un nuevo enfoque para abordar un problema trascendental de su época: el problema de los *tres cuerpos*, problema que planteaba conocer en un instante cualquiera de las posiciones y velocidades para tres cuerpos de masa arbitraria y de velocidades y posiciones iniciales conocidas, en virtud de su atracción gravitacional. En ese enfoque, aprovecha el comportamiento periódico de los tres cuerpos celestes, pero ese movimiento periódico está determinado no sólo cuando un cuerpo pasa por el mismo punto, sino cómo lo hace: a la misma velocidad. Así, la llamada sección de Poincaré permite que en vez de seguir por el telescopio un cuerpo a lo largo de toda su trayectoria alrededor de la Tierra, uno se pueda enfocar en un plano que va de norte a sur, de un horizonte a otro, alineado con el centro de nuestro planeta. Cuando el cuerpo pasa por primera vez, se toma nota de su velocidad y dirección; la periodicidad determina que el cuerpo vuelva a aparecer en el mismo punto con la misma velocidad y dirección. De esta manera, la cualidad periódica y sus variaciones se vuelven la herramienta de estudio; estudiarlas en conjunto permite el desarrollo del conocimiento matemático y científico (Collette, 1986).

3. Referentes teóricos

La fuente y el entorno de significación para la matemática escolar suele ser la matemática misma; concretamente para el caso de la periodicidad, el carácter periódico de un objeto (un fenómeno, una función) se analiza sólo a través de la comprobación de la fórmula que caracteriza a la propiedad periódica y el logro del sistema educativo es que el estudiante adquiera la fórmula: la sepa enunciar y comprobar.

Desde esa epistemología, la secuencia que busca el sistema didáctico se ve *como primero te enseño, y después aplicamos*. Pero, el factor tiempo en la escuela impacta negativamente, pues por falta del mismo las *aplicaciones* ya no se cubren. O bien se deja al estudiante descubrirlas por sí mismo, pero cuando la matemática se desarrolla escolarmente sin significados, éstos no se obtendrán por decreto curricular.

La propuesta socioepistemológica considera el permanente desarrollo del pensamiento matemático a través de prácticas, y así toda forma de saber -culto, tradicional, escolar, extra - escolar - importa. Se posiciona a las prácticas en el centro de la explicación didáctica debido a su rol en la generación del conocimiento matemático. No niega al objeto matemático ni la importancia de su adquisición -como la definición de la periodicidad en términos de una igualdad- sino que lo quita como centro y, por lo tanto, como el único fin de la enseñanza. Resulta necesario considerar otros escenarios como el social, cultural, histórico o institucional, y en cada uno de ellos, al hombre que hace matemáticas en contraposición a sólo considerar la producción matemática final lograda (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2014; Buendía, 2010).

La investigación socioepistemológica desarrolla estrategias de investigación que permiten poner al descubierto aquellas circunstancias relacionadas con la generación del conocimiento matemático; éste puede evidenciarse entonces como articulado, totalmente situado, y su uso es lo que se transforma en el objetivo a desarrollar. De acuerdo con Cantoral (2013a), se suple la idea de aprendizaje como adquisición para dar lugar a ese *conocimiento en uso* que modifica al individuo ante tareas de su propio entorno vivencial. Estos elementos conforman un triángulo didáctico propio de la Socioepistemología (figura 3) y, de hecho, con esta base construimos el diseño metodológico de la investigación presentada en este escrito (véase sección 5.1).

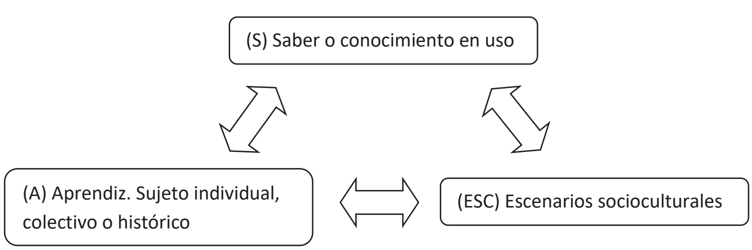


Figura 3. Un triángulo didáctico (adaptado de Cantoral, 2013a)

Ahora bien, hablar del desarrollo del pensamiento matemático depende de cambiar lo que estamos enseñando y no sólo cómo lo estamos enseñando. De esta manera, se da prioridad a la investigación - innovación en Matemática Educativa para problematizar los contenidos matemáticos de la escuela. Las fuentes de significación para el saber matemático van más allá de la matemática misma para considerar, en su problematización, por ejemplo, escenarios de origen, profesionales, de divulgación, de comunidades indígenas entre muchos otros. En la figura 4, Montiel y Buendía (2012) muestran una ruta metodológica particular en este tipo de estudios: a partir de establecer una problemática, se realiza un análisis de corte socioepistemológico cuyas posibles fuentes pueden apreciarse en la parte derecha, lo que nos permite tener una base -una epistemología de prácticas y usos- para incidir en el aula.

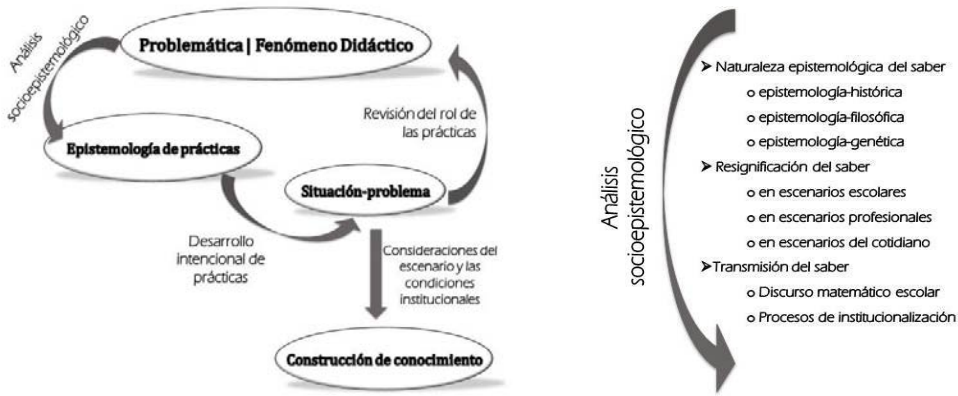


Figura 4. Fuentes de problematización (Montiel y Buendía, 2012)

Cuando la historia se convierte en una fuente de significación para la matemática, se obtienen elementos que enriquecen un comportamiento periódico. Por ejemplo, Euler (Euler, 1948), el primer matemático que caracterizó una función periódica, lo hacía en realidad a través del comportamiento repetitivo de la curva sin la expresión analítica de la función. En la figura 5 podemos ver una ilustración de dicha caracterización en la que señala que los intervalos marcados con corchetes son iguales y, así, la curva es periódica.

Por su parte, Hooke, quien usó la cualidad periódica para el desarrollo de un pensamiento científico, en realidad era un hombre - laboratorio que transitaba continuamente de lo geométrico al estudio mecánico de los resortes, y de ahí al estudio de cuerpos cuyas partículas oscilaban armónicamente para darles una forma y volumen relativamente estables. Esa cualidad periódica era lo generalizable y aprovechable para estudiar diferentes fenómenos, y esto la presenta como una propiedad común que se puede abstraer, pero con usos situados y significativos (Arnol'd,1990; Cross, 1994).

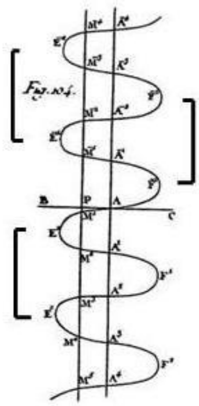


Figura 5. El uso de la periodicidad en Euler (Euler, 1948)

Lo que resulta relevante de estos datos históricos son los significados que enriquecen el comportamiento periódico. En cambio, ese comportamiento en el aula actual está remitido a una fórmula evitando que incluso la palabra *comportamient*o tenga algún estatus en esa matemática escolar cuando sí pareciera tenerlo al incluir otros escenarios de significación.

Considerar entonces el uso del conocimiento situado en diferentes escenarios -incluyendo los históricos- permite trastocar el saber matemático escolar a través de diseños didácticos orientados al desarrollo del pensamiento matemático (véase nodo "situación - problema" en la figura 4). Esas bases de significación obtenidas a partir de análisis socioepistemológicos son la base para cualquier intervención escolar: un nuevo currículo escolar, actividades didácticas, libros de texto.

Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2014) comentan que se ofrecen entonces nuevas formas de interacción en el aula, donde profesores y estudiantes asumen roles distintos y nuevas responsabilidades; se logra que el estudiante se apropie de lo que hace y que reconozca que no se trata de ser bueno o malo en matemáticas, sino de participar, de hacer matemáticas. El objetivo es favorecer una construcción de conocimiento matemático que se resignifique continuamente a la luz del ejercicio intencional de prácticas y usos.

Proponemos considerar epistemologías de naturaleza social planteadas bajo la perspectiva socioepistemológica en las que la matemática adquiere sentido y significación a partir no sólo de la matemática misma sino de las prácticas en la que se involucra el ser humano al hacer matemáticas (Buendía y Cordero, 2005). Obviamente entre más elementos de significación conformen dichas epistemologías de usos (véase nodo de *Epistemología de prácticas* en la figura 4), éstas se robustecen al articularse prácticas y usos. Así, la investigación que se reporta en este escrito abona en cómo se usa lo periódico en un escenario extraescolar, en particular uno de divulgación.

4. De la propiedad periódica a lo periódico

Al privilegiar los marcos de referencia analíticos para la matemática se dejan de lado otros argumentos que se ponen en juego al hacer matemáticas. Partimos del estudio de Buendía (2010) quien propone una epistemología para la periodicidad cuyos componentes son de naturaleza social; la idea de lo social se refiere a reconocer aquellos usos y prácticas provenientes de diferentes contextos y escenarios, que generan conocimiento matemático. En particular propone que el reconocimiento significativo de la propiedad periódica se favorece a través de la práctica de predicción, ya que al predecir se promueve una distinción significativa entre algo que se repite y cómo se repite.

Entre los elementos que conforman dicha epistemología, la autora señala que el proceso de significación continua -resignificación- para la propiedad inicia con la búsqueda e identificación de una unidad de análisis, periodo para el caso concreto de las funciones: es aquello que se repite en el objeto periódico. Pero importa que se reconozca cómo se repite y, de acuerdo con la propuesta de la autora, al predecir se pone en juego esta unidad de análisis a través de herramientas y argumentos relativos a la repetición presente en el objeto y sobre todo, a la forma en que se repite.

La distinción entre un objeto periódico y otro que no lo es se basa en el uso de la unidad de análisis para predecir. Esto es, el conjunto de herramientas matemáticas (como divisiones o multiplicaciones, expresiones analíticas, tabulación) tomará diferentes formas y funcionará diferente de acuerdo con la estrategia de predicción que alguien utilice para argumentar. El uso de la unidad de análisis se refiere entonces a sus diferentes formas y funcionamientos siempre situados.

Por ejemplo, Buendía y Cordero (2005) plantean una tarea que pide a diferentes estudiantes de posgrado predecir en una gráfica tiempo-distancia (figura 6) dónde estará el móvil en el tiempo $t=231$, y puede verse cómo se usa una unidad de análisis. En la figura 7, se observa como herramienta el uso de tablas distancia-tiempo en el que se marca el periodo, y luego con ese periodo de 4 se realiza la predicción por medio de una división. En la figura 8 puede verse que el argumento es gráfico, pues toma en cuenta cuánto sube el gráfico en cada periodo.

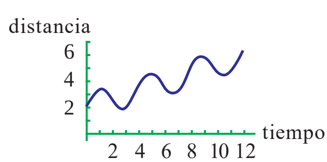
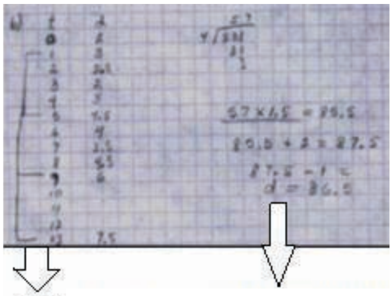


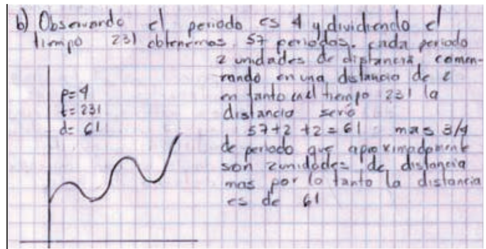
Figura 6. Gráfica tiempo-distancia (Buendía y Cordero, 2005)



Lo que se repite en la tabla

Manejo aritmético para determinar cómo se repite: división, multiplicación y sumas

Figura 7. Con tablas (Buendía y Cordero, 2005)



Observando el periodo es 4 y dividiendo el tiempo 231 tenemos 57 periodos. Cada periodo, 2 unidades de distancia comenzando en una distancia de 2 en tanto en el tiempo 231 la distancia será 57+2+2=61 más 3/4 de periodo que aproximadamente son 2 unidades de distancia más. Por lo tanto la distancia es de 61

Figura 8. Uso de la gráfica (Buendía y Cordero, 2005)

Al predecir, la forma y el funcionamiento de las herramientas matemáticas caracterizan el tipo de repetición que presenta la gráfica; dicha repetición se significa al distinguir que no toda repetición es periódica. Ahondando en cómo se visualiza un comportamiento periódico, Dreyfus y Eisenberg (1983) señalan la necesidad de una visualización global -no en un instante, sino en un periodo- en una gráfica periódica para que el carácter periódico de la misma sea reconocible.

Existen entonces elementos que conforman una epistemología de prácticas y usos para la periodicidad:

- El comportamiento del objeto en cuestión; esto es la repetición presente y cómo es esa repetición. En términos variacionales sería considerar el tipo de cambio presente y cómo cambia ese cambio.
- La identificación y el uso de una unidad de análisis, entendida también como *periodo* para el caso de las gráficas.
- La dialéctica entre el instante - todo a través de una visualización que transita continuamente entre lo global y lo local.
- La articulación significativa y situada de los elementos anteriores se da en el marco del ejercicio intencional de prácticas de predicción y graficación.

En su conjunto, amplían el marco de significación para la periodicidad pudiendo hablar entonces de *lo periódico* para referirnos y enfatizar que los aspectos analíticos de la propiedad periódica se enriquecen con otros elementos provenientes de las prácticas y los usos relacionados.

5. Un escenario de significación proveniente del cotidiano

En la conformación del discurso matemático escolar y de los planes de estudio de distintos niveles se desconoce el papel que pudiera jugar el cotidiano, ese contexto extraescolar en el que los ciudadanos hacen, usan y expresan su conocimiento. Se trata de formas culturales puestas en uso en donde se hace evidente lo poco significativo que resulta la matemática escolar (Zaldívar y Cordero, 2015).

Una epistemología de prácticas y usos busca permitir encuentros entre el conocimiento cotidiano del ciudadano y su conocimiento matemático en los que ambos dialogan a través de argumentos y herramientas significativos de acuerdo con las actividades que se están realizando.

Como parte de ese cotidiano, estamos considerando un escenario de educación no formal o de divulgación: un museo de ciencias. En dicho escenario no tiene sentido la idea de que los ciudadanos entiendan las nociones matemáticas como en la escuela o si saben demostrarlas o aplicarlas, pues no existe sanción ni evaluación sobre la integración rigurosa de los conocimientos o sobre la construcción de los mismos (Guisasola y Morentín, 2007). Sin embargo, lo que interesa es reconocerlo como una fuente de significados al analizar el conocimiento en uso. Bajo este posicionamiento epistemológico, los aspectos analíticos dejan de ser el objetivo en la explicación de la generación de conocimiento matemático, y en cambio los argumentos, herramientas y discursos adquieren validez. Es un mecanismo de producción de conocimiento que no aísla al individuo del medio, sino que es una forma de generar lazos de interacción (Cantoral, 2013a).

Consideramos pues este escenario de divulgación como un espacio de uso (Cantoral, 2013a) ya que nos provee de una gran variedad de fenómenos periódicos, como los astronómicos, que nos permitirá reconocer elementos alrededor del uso de lo periódico. Tratamos en particular con Júpiter, uno de los objetos que más seduce al público por su brillo. Cuando se observa a simple vista se ve como un gran punto brillante; con telescopio se pueden ver cuatro de sus satélites: Io, Europa, Ganímedes y Calisto (figura 9).

Figura 9. Imagen de Júpiter y sus satélites (Hernández, 2015)

5.1. *Aspectos metodológicos*

La actividad sobre la que se desarrolló la investigación (Hernández, 2015) es la observación astronómica de Júpiter y sus satélites. Participaron personas que trabajan en el Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas (Zigzag) y el objetivo fue analizar los usos de lo periódico al trabajar con un conjunto de astrofotografías[1] obtenidas de dicha actividad durante cuatro meses.

Para llevar a cabo el análisis del conocimiento en uso, se retomó el triángulo didáctico de la figura 3 cuyos elementos quedaron caracterizados de la siguiente manera.

- El uso de lo periódico se analiza mediante las diferentes formas y funcionamientos que van presentando los elementos expuestos: la identificación y el uso de una unidad de análisis o periodo, la visualización puntual / global, el comportamiento de los diferentes objetos matemáticos que concurren a la actividad (como las gráficas), la predicción.
- Los individuos con los que se realizó la actividad se identificaron como expertos y monitores. Los primeros son personas con experiencia en astronomía observacional elemental y trabajan en el museo como responsables de la sala de astronomía; los segundos son guías ocasionales del museo.
- La actividad llevada a cabo en este escenario del cotidiano se caracterizó a través de distintas situaciones llamadas *situaciones conflictivas*: una pregunta realizada por el investigador cuya respuesta no es inmediata y motiva un conjunto de acciones por parte de los expertos y/o monitores involucrados. Una situación conflictiva consta entonces de los actores involucrados, la tarea concreta a realizar, los conocimientos matemáticos puestos en juego y los usos situados de lo periódico.

La actividad completa fue videograbada, incluyendo la interacción entre los actores y el investigador. Para este escrito, se eligieron dos situaciones conflictivas tituladas: *¿Quién es quién?* y *Noches nubladas*. La razón de esta elección es que el actor principal, Pedro, es físico de formación y divulgador de la astronomía. Es uno de los llamados expertos; en el uso que hace de lo periódico se evidencia el carácter de diferentes herramientas y argumentos, lo que favorece el cambio desde un conocimiento institucionalizado a uno funcional.

[1] Captura fotográfica de la imagen de un cuerpo celeste. Se necesita que la imagen permanezca en la pantalla el tiempo suficiente para capturarla, lo que se logra redireccionando continuamente el telescopio hacia Júpiter y sus satélites hasta que la astrofotografía es captada.

6. ¿Quién es quién?

Ante las astrofotografías captadas de Júpiter y sus satélites, el investigador le pregunta a Pedro cuál satélite es cada uno de los cuatro puntos brillantes (véase figura 9). Alejándose de los otros expertos, extrae de la base astrofotográfica las imágenes correspondientes a 18 noches consecutivas y las coloca así: la primera imagen en un primer renglón, la segunda imagen en el segundo renglón y así sucesivamente hasta distribuir las 18 imágenes en una columna, cuidando que los círculos más grandes que representan a Júpiter queden alineados (figura 10). Coloca una etiqueta en cada renglón para indicar el número de día en que fue captada la astrofotografía.

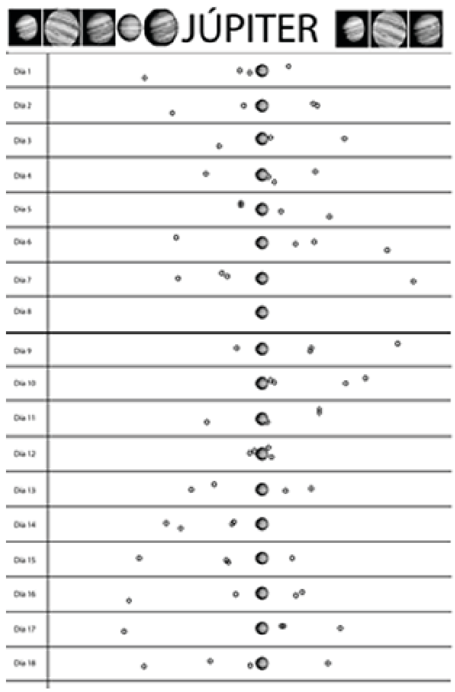


Figura 10. Arreglo de astrofotografías (Hernández, 2015)

6.1. *Identificar una unidad de análisis*

Pedro seleccionó y acomodó 18 astrofotografías; ese número quizás esté relacionado con su conocimiento de astronomía sobre los periodos de los satélites que históricamente propuso Galileo. Ello abre una duda para el investigador:

Investigador: Ahora platíqueme cómo se le ocurrió esta secuencia. ¿De dónde sacó que había que colocarlos uno tras otro?

Pedro: Pues intentaba hacer una especie de (…)[2] de proyección en el tiempo para ver cómo cambiaba la configuración de las lunas de un día para otro (…) entonces (…) primero pensé en hacer un video, sacar las fotos y pasarlas como video (el experto mueve su mano izquierda simulando el paso continuo de las fotografías), pero no tenía las herramientas en la computadora para hacerlo (…) entonces otra forma de visualizarlo era poner una detrás de la otra y al estar haciendo (…) separando los dibujos se me ocurrió que podría haber uno debajo del otro (simula con la mano que coloca una fotografía debajo de la otra). Así de esta forma se puede ver y pasar la vista rápidamente (coloca su dedo sobre el papel con los dibujos y rápidamente lo arrastra sobre cada una de las fotografías simulando un vistazo rápido sobre el papel). Lo primero que se me ocurrió pues fue un golpe de vista.

Podemos reconocer en la respuesta de Pedro que el arreglo apropiado de las astrofotografías genera un sistema de referencia imprescindible para analizar la repetición y cómo se presenta dicha repetición. Pedro llama *golpe de vista* a esta primera visualización en la que identifica un cierto comportamiento para uno de los satélites. Auxiliándose de un proyector, presenta el arreglo de astrofotografías sobre una pantalla de papel cuadriculado hasta obtener el mismo arreglo a una escala más grande. Su objetivo es identificar los cuatro satélites de Júpiter.

Pedro: …ser yo el que se moviera y que no fueran los dibujos. Así podía ver éste, éste, éste (señala los puntos más alejados empezando en la fotografía del día 1). Y cuando lo hice ya me di cuenta de algunas cosas muy interesantes como esta curva (figura 11).

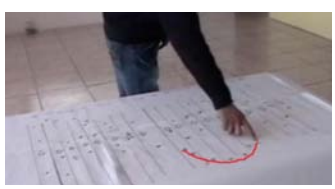


Figura 11. El experto señala un comportamiento local (Hernández, 2015)

El experto une con su dedo cada punto formando una curva suave. Esta forma de usar lo periódico le funciona al indicarle que estos puntos representan un mismo satélite. Éste es un momento importante pues muestra que el uso del comportamiento antecede al concepto: una vez establecido un adecuado sistema de referencia, Pedro percibe el comportamiento del satélite más alejado del planeta.

[2] El paréntesis con tres puntos significa una pausa de más de cinco segundos.

Pedro: La curva de allí ya me dio la idea de que ésta podría tratarse de la misma luna.

Investigador: ¿Y por qué tendría que tratarse de la misma luna?

Pedro: No, no, no, no tendría todavía, no tendría ninguna prueba, pero se me ocurrió que podría ser la misma porque era un avance muy suave, parece ser la misma; entonces viendo esto y siguiendo una curva más o menos del mismo estilo, aquí se encuentra otra.

Con su dedo sigue el posible comportamiento del satélite más alejado (figura 12). La forma de usar lo periódico se manifiesta a través de la detección de un patrón de repetición: una unidad de análisis visual. Él menciona que "podría ser la misma", "parece ser la misma", "del mismo estilo"; este encadenamiento de argumentos culminará en la detección de una unidad de análisis cuando el experto menciona más adelante "aquí se encuentra otra (luna)".

Figura 12. Continuación de la curva del comportamiento (Hernández, 2015)

6.2. *Medición y aproximación*

El siguiente segmento muestra argumentos a través de actividades como la medición y la aproximación; son usos de la unidad de análisis que van significando la periodicidad.

Pedro: Entonces ya lo que se me ocurre para empezar a clasificar es ver su distancia, el máximo alejamiento que yo pueda tener a partir de Júpiter. Entonces veo aquí un alejamiento que es de los máximos (señala el día 1, figura 13 izquierda).

Partiendo del comportamiento global del satélite, ahora Pedro realiza un análisis local: la curva presenta un máximo alejamiento. Esta forma de uso de lo periódico para clasificar los satélites es más fina, pues se ponen en juego las nociones de medición, aproximación y estimación para proponer en qué punto podría la curva global tener otros máximos. Hay que realizar una aproximación de esa posición máxima -no necesariamente visible en las fotografías- del satélite respecto al planeta.

Ahora inicia el cuestionamiento sobre la elección de una unidad de análisis de 18 días que le sirve para hallar el siguiente máximo (en el día 18, figura 13 derecha):

Primer máximo: día 1

Segundo máximo: día 18

Figura 13. Usando un argumento de distancia máxima (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Y por qué en el día 18?
Pedro: Hasta ese día tomamos su frecuencia.
Investigador: ¿Pero por qué justamente el día 18?
Pedro: Bueno, nos detuvimos hasta allí porque fueron los días que observó Galileo.
Investigador: ¡Ah! Entonces usted está haciendo referencia al texto de Galileo.
Pedro: ¡Sí!
Investigador: Pero si nos tratamos de desprender del texto, ¿podríamos dar alguna razón de este día 18 sin recurrir a Galileo con base en ese comportamiento que acaba de sugerir?
Pedro: (Se mueve pensativo de un lado a otro de la mesa donde yace la secuencia de fotografías). ¡Mmm! Lo puedo dar, pero ya sería con base en el resultado. (Se queda meditando.) Lo podemos hacer haciendo un análisis de menos días y dándonos cuenta de que es insuficiente para sacar algunos periodos.

Cuando Pedro propone el 18 como la longitud de la unidad de análisis, está acudiendo al conocimiento institucionalizado. Su argumento se apoya en que “fueron los días que observó Galileo”; un conocimiento que tiene asumido y que ahora usa. El cuestionamiento del investigador lo motiva a generar argumentos más articulados y problematizar cómo está conformada esa unidad de análisis que visualmente tiene y que así, le resulte aún más funcional: lo hará a partir de los datos (del *resultado*, como él menciona). Selecciona entonces el rango comprendido entre el día uno y el día siete y, posteriormente, lo alargará para que puedan visualizarse los periodos de los cuatro satélites (figura 14).

Figura 14. Búsqueda de una unidad de análisis mínima (Hernández, 2015)

Pedro: Entonces lo alargamos un poco y nos damos cuenta de que el día 17 o 18 es suficiente para sacar los periodos de todas las lunas.
Investigador: ¿Y por qué es suficiente?
Pedro: Porque ya aparecen todos los periodos.
Investigador: ¡No entiendo!
Pedro: ¡Mmmh!
Investigador: ¿Cómo que aparecen todos los periodos?
Pedro: Sí, ya es posible calcularlos todos.
Investigador: ¿Pero por qué ya es posible calcularlos todos?
Pedro: ¡No, no no!, por eso digo hasta ahorita no tengo una razón. Más bien es el trabajo que ya hemos hecho. Sin referirse a Galileo. Si lo hacemos con 10 días y no es suficiente aún, lo hacemos con 14 y no es suficiente todavía.
Investigador: Pero, ¿hay alguna razón de fondo?... Intuitiva, no importa.
Pedro: ¡Mmm! (se aleja del dibujo y vuelve a observar) ¿Intuitiva? Yo creo que si lo hubiéramos hecho, tendríamos que haberlo hecho por más días. 23, 24, para ver… para que fueran más evidentes los patrones.
Investigador: ¿Y qué patrón buscaríamos?
Pedro: Esta curva (señala la sucesión de puntos que forma la curva de la figura 15)

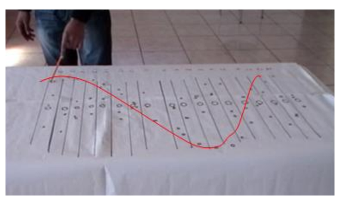


Figura 15. Una unidad de análisis que contenga a los periodos de las cuatro lunas (Hernández, 2015)

En el episodio relatado, la unidad de análisis se usa a través de diferentes argumentaciones que la van resignificando. Si Pedro hubiera considerado menos fotografías, no le sería suficiente para cubrir todos los periodos de los satélites: siete días, por ejemplo, sólo es suficiente para mostrar cómo se están comportando sólo dos de los cuatro satélites. Ante la insistencia del investigador, plantea una unidad de análisis superior a los 18 días, es decir 23 o 24 días, para asegurar que el patrón buscado pueda verse. Esta estrategia de predicción es variacional porque intenta justificar la unidad de análisis al acudir al comportamiento de los datos, apoyado en la visualización a través de la búsqueda de patrones. Está manteniendo una visualización local / global que posteriormente le servirá como una herramienta.

Investigador: ¿Qué le pasaría a esa curva si aumentara el número de días?
Pedro: Se repetiría. Hasta acá. Y tendría que repetirse de este lado (figura 16)

Pedro ahora prolonga la curva más allá de las 18 fotografías (figura 16), y usa la unidad de análisis que él significó mediante el comportamiento local - global de los satélites.

Figura 16. El experto señala cómo se repetiría la curva después del día 18 (Hernández, 2015)

6.3. *Una curva simétrica*

Para seguir desarrollando su argumento de 17 días por periodo, Pedro recurrirá ahora a un argumento visual de simetría basado en el uso de la díada local-global o instante-todo.

Pedro: Porque aquí tengo un periodo de 17 días. Esta luna de aquí coincide con esta luna de acá. (Señala la luna del día uno con la luna del día 18, figura 17)

Figura 17. Dos lunas que coinciden (Hernández, 2015)

Pedro: Es pura intuición, hasta ahora no he demostrado nada. Pero esta luna de aquí coincide con esta luna de acá 17 días después.

Investigador: ¿Cómo que coinciden? No me queda claro.

Pedro: En su posición respecto a Júpiter.

Investigador: Eh! ¿Hay alguna distancia que esté manejando allí?

Pedro: También, esta proyección nos ayuda mucho. Como están a la misma escala yo hago una línea vertical… y aquí estoy otra vez (Con sus dedos traza paralelas desde el día uno hasta el día 18, figura 18)

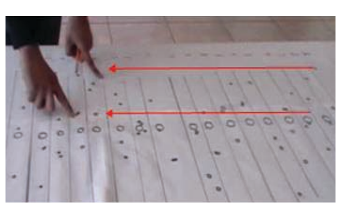


Figura 18. La simetría con respecto a la línea de Júpiter (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Entonces está manejando la distancia?
Pedro: Sí, sin medirla directamente yo sé que es la misma porque están alineadas prácticamente.
Investigador: ¡Ajá! Y en eso se basa para decir que se repite.
Pedro: Sí.

Surge un argumento que refuerza la propuesta de la unidad de análisis: al estar alineadas las imágenes, en el sistema de referencia, el satélite es el mismo un cierto tiempo después. Este argumento se desarrolla y se puede generalizar: si al situar el satélite en dos fotografías tomadas en días diferentes queda a la misma distancia del planeta, se trata del mismo satélite pues está repitiendo su posición respecto al tiempo. Es un argumento de simetría puesto en uso que recuerda además el uso geométrico de Euler para lo periódico y que además se desarrolla para sostener nuevas argumentaciones.

6.4. *Conformar una unidad de análisis*

Cuando está discutiendo la longitud mínima de su unidad de análisis, Pedro va señalando curvas. Sin embargo, al cuestionar porqué la unidad mínima de análisis es de 17 días, vuelve a pasar de una mirada global a una local para argumentar sobre cómo se conforma dicha unidad.

Pedro: Entonces yo esperaría que cada 17 días apareciera una curva (…) bueno dos curvas de este lado de Júpiter y dos en este lado de acá. Tres crestas (figura 19)

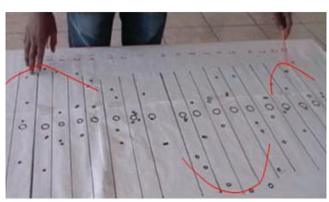


Figura 19. Tres crestas (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Tres crestas?
Pedro: Entonces, cada 17 días son tres crestas. En 40 días pueden ser 6. Eso esperaríamos.
Investigador: ¡Bien!
Pedro: Después de 17 días, si están, nos darían una pista más fuerte de que sí es la misma luna.

Es importante notar en este diálogo que el objetivo de Pedro no ha cambiado: qué punto representa a cada satélite. Es a lo largo del desarrollo de tal actividad intencional que la unidad de análisis se está resignificando continuamente a través de su uso: de una unidad cuya longitud es institucionalizada (lo dice Galileo), a una construida a partir de la percepción visual, al uso de medición (máximos), a la argumentación sobre la simetría de la curva y, finalmente, hacia el señalamiento de los elementos constituyentes de la misma. La noción de un periodo mínimo, propio de la caracterización periódica escolar, se cambia una y otra vez en beneficio de un periodo que realmente sea una unidad significativa a la luz de la tarea a desarrollar.

Podemos ver cómo se van resignificando diferentes elementos del conocimiento institucionalizado de Pedro a la luz de prácticas -como la predicción, la graficación, la comparación, la estimación- de los usos situados de los elementos que constituyen lo periódico.

7. Noches nubladas

Durante el periodo de observación, hubo noches nubladas en las que no fue posible recoger datos, así que cuando las astrofotografías se alinean respecto a Júpiter, hay un trozo de papel que queda en blanco (figura 20).

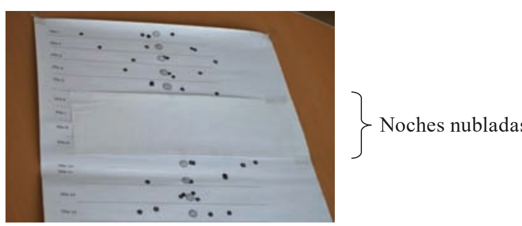


Figura 20. El trozo de papel intermedio representa las noches nubladas (Hernández, 2015)

Hasta este momento, Pedro ya había visualizado el comportamiento periódico de cada uno de los satélites. Al entrevistarlo, menciona: "Cuando vi esta curva poniendo a los días consecutivamente, se me hizo muy parecido a la curva que aparece en el péndulo de arena, entonces debería poderse reproducir, es una ley similar".

Pedro continúa su reflexión diciendo "esto nos permitiría que si yo quito una parte de esa curva, digamos toda una sección de días nublados, entonces el trazo de arena me indicaría por dónde va a pasar esta luna y yo podría encontrarla en cualquier momento del tiempo…". Liga entonces el comportamiento periódico de los satélites con el comportamiento periódico del péndulo de arena.

El péndulo del museo deja su traza sobre arena, así que Pedro coloca la secuencia de fotografías, con el trozo de papel en blanco intercalado, sobre la banda móvil del mecanismo donde está el péndulo. Alimenta el péndulo con arena, hace variar su longitud y la velocidad de la banda hasta que el rastro se parezca al comportamiento de los satélites en la información que sí se tiene. Ubica entonces el péndulo en el alejamiento máximo y lo deja oscilar libremente (figura 21).

Figura 21. Péndulo con arena (Hernández, 2015)

De esta manera el péndulo deja un rastro de arena encima de la trayectoria de la luna más alejada, incluidos los días nublados (figura 22).

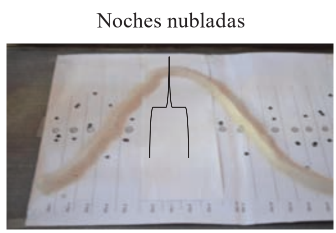


Figura 22. Rastro de arena, incluidas las noches nubladas (Hernández, 2015)

Ahora remueve un poco la arena, abriendo una franja en medio, para dejar ver el comportamiento de la luna correspondiente a las noches despejadas. La conclusión es que en las noches nubladas la luna más alejada debe estar en la franja (marcas rojas en la figura 23).

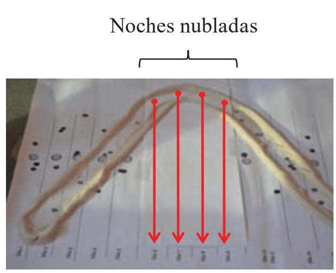


Figura 23. Predicción de la posición de los satélites durante las noches nubladas (Hernández, 2015).

Para que Pedro pudiera conocer la porción de la gráfica que desconoce, parte de reconocer la trayectoria periódica de los satélites, abstrae ese comportamiento periódico y transita hacia otro artefacto -físico y manipulable- como el péndulo. Éste es un uso de lo periódico en el que se identifican y abstraen las características de ambos fenómenos y se logra transitar entre el fenómeno real y el dispositivo artesanal, lo que logra caracterizar en uno se vuelve válido para el otro. Esto nos remite a lo que mencionábamos de Hooke: un llamado hombre - laboratorio que abstrae significados al experimentar en diferentes contextos, va construyendo conocimiento científico.

8. Un escenario de divulgación como fuente de significación

En el estudio reportado se trata científicamente con fenómenos periódicos y, sin embargo, no basta, e incluso no es necesario, conocer o recordar fórmulas, sino reconocer y analizar elementos que conforman el uso de lo periódico: ante el comportamiento del objeto (el fenómeno, la gráfica) cómo se pone en juego una unidad de análisis o cómo se visualiza manteniendo una diada global / local para poder predecir. Así, la gráfica se usa de diferentes maneras: trozos de curva, puntos clave como los máximos e incluso, la construcción de un primer sistema de referencia.

Ante un fenómeno de naturaleza periódica, Pedro enfrentó el cuestionamiento de qué satélite era cada uno de los puntos brillantes alrededor de Júpiter. Su conocimiento institucionalizado establece que el satélite con el periodo más grande considera 18 días y, por lo tanto, es suficiente para obtener los periodos de todas las lunas y entonces poder decir cuál es cuál. En las diferentes acciones que va realizando, su conocimiento matemático se va problematizando a través de cuestionamientos implícitos como el porqué es así y no de otra manera. Estos cuestionamientos son de corte variacional, qué cambia, cómo y cuánto cambia, para discutir significativamente qué cambia.

Una de las primeras acciones que hizo Pedro fue generar su sistema de referencia para que sus comentarios respecto a qué cambia tuvieran significado: arregló las astrofotografías respecto a Júpiter como centro. A partir de lo que él llama percepción visual, le resulta factible identificar un patrón de comportamiento (una práctica variacional), y en ello identifica una unidad de análisis o patrón para entonces desarrollar estrategias de medición y hallar máximos; la simetría de la curva se usa para señalar cómo las crestas constituyen dicha unidad. Las crestas son parte de un lenguaje gráfico que se desarrolla de forma situada y le funciona para constituir su unidad de análisis: no sólo es conocer qué es una gráfica, es usar sus elementos de forma situada. Es el conocimiento en uso, y no el institucionalizado, el que llevará a identificar finalmente (Hernández, 2015) cuál satélite es cada uno de los puntos brillantes, aunque al terminar el episodio *¿Quién es quién?* sólo tiene una primera base de significación.

En el episodio de *Las noches nubladas*, el experto actúa como un hombre laboratorio: extrae las características periódicas observables de un fenómeno y transita hacia un instrumento físico y manipulable para obtener los datos faltantes. Esto permite que el conocimiento institucionalizado sobre el comportamiento de los satélites se signifique extrayendo características y significados comunes a otros movimientos. Nuevamente podemos evidenciar un contraste con el conocimiento matemático escolar en el que un conjunto de funciones se enseña para después modelar fenómenos, lo que hace perdurar el mecanismo de *primero enseño el objeto y luego lo aplico*. Favorecer el ejercicio intencional de prácticas variacionales permite reconocer cómo se usa la propiedad periódica a través de las diferentes formas que va adoptando, funcionando en cada caso según lo que se requiere y argumentando sobre características significativas comunes. Ese uso significa al objeto (la función, el fenómeno) con el que se está trabajando.

Se han evidenciado elementos de un pensamiento y lenguaje variacional a la luz de lo cual, diferentes objetos matemáticos se resignifican continuamente: el periodo y su uso, el sistema de referencia, los elementos gráficos.

Sí importa el objeto: no se niega la importancia de conocer y manejar la definición de periodicidad. Sin embargo, este manejo analítico puede tener ahora una base de significación mayor en la que los elementos simbólicos como símbolo (x), el símbolo $f(x)$ e incluso la igualdad $f(x)=f(x+p)$ pueden tener significados y además estar articulados a través de diferentes variables y fenómenos. De ahí, por ejemplo, la importancia de reconocer los máximos en el comportamiento gráfico periódico analizado. Todo ello aparece normado por el ejercicio intencional de *prácticas variacionales* (Fallas-Soto, 2015) como la predicción, la comparación, la estimación y el papel de los patrones de comportamiento.

9. Comentarios finales

Al cuestionar aquella matemática que se está enseñando y considerando la necesidad de un saber matemático que se integre funcionalmente a la vida del estudiante, importa incidir en el rediseño del discurso Matemático Escolar. En ello, este escrito contribuye a fin de que lo escolar tenga como base de significación epistemologías de prácticas y usos.

El escenario del cotidiano en el que se ha trabajado, considerado como un escenario de uso, da cuenta de un pensamiento y lenguaje variacional que se pone en juego y se desarrolla al significar en ese proceso el conocimiento matemático en juego. Al cambiar la mirada del objeto matemático con el propósito de favorecer el conocimiento en uso, aunque dicho objeto –una definición, una propiedad- no se conozca en toda su extensión y complejidad, sí se usa de alguna manera (Cordero, Cen y Suárez, 2010). Y cuando se usa, irá adquiriendo y desarrollando diferentes formas y funcionamientos acorde a las situaciones particulares que el ser humano vaya enfrentando.

En especial, al reflexionar sobre la matemática escolar, en lugar de buscar el aprendizaje memorístico de la propiedad periódica de un objeto matemático -una sucesión, una función, un fenómeno- a través del cumplimiento o no de una igualdad, habrá de favorecerse el desarrollo intencional de prácticas como la graficación y la predicción en tareas situadas y propias del nivel educativo en cuestión. Ello permite que el conocimiento matemático se ponga en uso a través de herramientas y argumentos que resignifiquen continuamente lo periódico a lo largo de la matemática escolar.

No se propone obviar la definición del objeto matemático periódico con el que se trabaja: una gráfica, una sucesión, algún fenómeno. La propuesta es poner al centro de las explicaciones didácticas elementos como los ya mencionados que problematicen no sólo la repetición presente sino cómo se está presentando. Entonces, podemos hablar de un conocimiento matemático funcional y articulado, tanto dentro como fuera de la escuela, en el que la propia definición analítica de la periodicidad adquiere significados. Es así como estamos asumiendo una epistemología distinta para las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Arnol'd. V.I.(1990). *Huygens and Barrow. Newton and Hooke: Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals.* Germany: Birkhsuser Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9129-5

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 129-158. Disponible en: http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-i/519-201001d

Buendía, G. (2011) The use of periodicity through history: elements for a social epistemology of mathematical knowledge. En Barbin, E., Kronfellner, M., Tzanakis. C., *Proceedings of the 6th European Summer University-History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 67-78). Austria: Verlag Holzhausen GmbH / Holzhausen Publishing Ltd. Disponible en: http://numerisation.univ-irem.fr/ACF/ACF11010/ACF11010.pdf

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 299-333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5

Cantoral, R. (2013a). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R. (2013b). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Escri/viendo. Revista Pedagógica 24*, 17-26.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas.* Volumen II. México: Siglo Veintiuno Editores.

Cordero, F. (2006). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos - Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214. Disponible en: http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-13-2/527-201003b

Cross, J. (1994). *Theories of elasticit.* En I. Grattan - Guiness (ed), *Companion Encyplopedia of the History & Philosophy of the Mathematical Sciences*, 1023-1033. USA: The Johns Hopkins University Press.

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*(3), 119–132.

Euler, L. (1948). *Introduction a l'Analyse Infinitésimale.* Tomo I. (JB Labey, trans). Chez Bachelier, Imprimeur - Libraire de l'Ecole Polytechnique.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y Unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden* (Tesis de maestría no publicada). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Guisasola, J. y Morentin, M. (2007). ¿Qué papel tienen las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de las ciencias? Una revisión de las investigaciones. *Enseñanza de las Ciencias 25*(3), 405-411. https://ddd.uab.cat/record/39801

Hernández, P. (2015). *Los usos del conocimiento matemático en un escenario de divulgación: la periodicidad* (Tesis de doctorado no publicada). Guerrero, México: Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustración. En A. Rosas y A. Romo (eds.). *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2015). Conozco al Sr. Movimiento: la situación del resorte. En Cordero, F., *La ciencia desde el niñ@. Porque el conocimiento también se siente* (pp. 129-140). España: Gedisa.

Autores

Plácido Hernández Sánchez. Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, México.
placidohernan@gmail.com

Gabriela Buendía Ábalos. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, México.
buendiag@hotmail.com

Carla Cristina Pompeu, Inés M. Gómez-Chacón

APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y ESTRATEGIAS DE IDENTIDAD. UN CASO DE EDUCACIÓN DE PERSONAS ADULTAS EN BRASIL

Mathematical Learning and Identity Strategies. A Case of Adult Education in Brazil

RESUMEN

En este artículo se analiza la educación de personas adultas en Brasil. La investigación busca identificar cómo las identidades sociales configuran las identidades matemáticas de los sujetos y cómo la construcción y negociación de identidad social afecta a la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Basados en una metodología cualitativa se han descrito escenarios donde la identidad social se actualiza en el aprendizaje de la matemática y cómo ésta configura elementos facilitadores u obstaculizadores para el aprendizaje. Los resultados ponen de manifiesto las relaciones con los saberes matemáticos, y cómo sujetos de un mismo grupo social y/o cultural se relacionan con las matemáticas de diferentes modos según información, experiencia y posicionamiento de identidad.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación de personas adultas*
- *Aprendizaje matemático*
- *Identidad Social*

ABSTRACT

This article investigates the Adult Education in Brazil. The research seeks to identify how social identities shape subjects' mathematical identities and how the development and negotiation of social identity affect interaction in the Teaching - Learning Process in the classroom. Based on qualitative methodology were described scenarios where the social identity updates on mathematic learning and how this identity configures facilitating or blocking elements of the learning. The results demonstrated the relations between the investigated subjects and the mathematical knowledge and how the subjects of the same social and cultural group related to mathematics in different ways taking into consideration information, experience and identity positioning.

KEYWORDS:

- *Adult Education*
- *Mathematics Learning*
- *Social Identity*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 285 - 308.
Recepción: Diciembre 12, 2018 / Aceptación: Agosto 15, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2232

RESUMO

Neste artigo se analisa a educação de pessoas adultas no Brasil. A investigação busca identificar como as identidades sociais configuram as identidades matemáticas dos sujeitos e como a construção e negociação de identidade social afeta a interação no processo de ensino e aprendizagem em aula. Baseados em uma metodologia qualitativa foram descritos cenários em que a identidade social se atualiza na aprendizagem da matemática e como esta identidade configura elementos facilitadores ou obstaculizadores para a aprendizagem. Os resultados evidenciaram as relações dos sujeitos investigados com os saberes matemáticos e como os sujeitos de um mesmo grupo social e/ou cultural se relacionam com as matemáticas de diferentes modos, segundo informação, experiência e posicionamento de identidade.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação de Pessoas Adultas*
- *Aprendizagem matemática*
- *Identidade Social*

RÉSUMÉ

Cet article analyse l'éducation des adultes au Brésil. La recherche étudie comment les identités sociales configurent les identités mathématiques des individus et comment la construction et la négociation de l'identité sociale affectent l'interaction dans le processus d'enseignement et d'apprentissage en classe. Basé sur une méthodologie qualitative, des scénarios ont été décrits dans lesquels l'identité sociale est mise à jour, à partir de l'apprentissage des mathématiques, et comment cette identité configure des éléments facilitant ou gênant l'apprentissage. Les résultats ont mis en évidence les relations entre les sujets étudiés et les connaissances mathématiques et la manière dont les sujets d'un même groupe social et / ou culturel sont liés aux mathématiques de différentes manières en fonction de l'information, de l'expérience et du positionnement identitaire.

MOTS CLÉS:

- *Éducation des Adultes*
- *Apprentissage des Mathématiques*
- *Identité Sociale*

1. Introducción

En las últimas décadas son numerosos los estudios que ponen de manifiesto los aspectos de identidad y de contexto social en el aprendizaje matemático (Leiva, 2017). Sin embargo, son más escasos los que han profundizado en el ámbito de educación de adultos (Díez Palomar, 2004).

La educación a lo largo de toda la vida es una temática de gran relevancia internacional (Villas-Boas, Oliveira, Ramos y Monteira, 2016; Schmelke, 1994), por lo que considera el acceso a la misma educación y a una ciudadanía más plena. En la cualificación exigida se destaca la alfabetización matemática como una dimensión clave.

Entre los retos prioritarios de la planificación de políticas públicas en educación de personas adultas en Brasil destaca la diversidad. Desde los 90, el crecimiento de alumnos que abandonaron la escuela hizo que la educación nocturna tuviese una población cada vez más joven, lo que obligó a una reordenación de políticas sobre diversidad educativa. Estas prioridades educativas brasileñas, junto a estudios previos sobre aprendizaje en contextos de práctica e identidad social y cultural (Gerger, 2014; Gómez-Chacón, 2000a, 2000b, 2017; Fantinato y Moreira, 2016), orientan la finalidad de la investigación y avalan la contribución novedosa de los resultados en relación con una mayor comprensión de cómo actúa la diversidad.

El estudio busca identificar cómo las identidades sociales configuran las identidades matemáticas y cómo afectan a la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de la investigación es analizar si se pueden interpretar las reacciones de los sujetos, en un contexto de Educación de Adultos, desde la perspectiva de la identidad social y cultural, especificando escenarios donde la identidad se actualiza en el aprendizaje de la matemática, y cómo ésta configura los factores de interacción cognición y afecto en el saber matemático.

Se considera como marco interpretativo para el estudio de campo la propuesta teórica y metodológica de Gómez-Chacón (1997, 2000a). En nuestro estudio buscamos confirmar o expandir los resultados obtenidos utilizando esta metodología en distintos contextos (población española, población belga-portuguesa).

La primera parte de este artículo discute los fundamentos teóricos del estudio, seguido por una descripción de la metodología basada en la interacción cognición y afecto en matemáticas y la perspectiva interaccionista de la identidad. Posteriormente se presentan los resultados y una sección final donde se abordan la discusión de resultados, conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones.

2. Fundamentos teóricos

Son dos los aspectos que precisan el marco teórico: el aprendizaje matemático en la educación de adultos y la influencia de las identidades sociales en los procesos de aprendizaje.

2.1. *Aprendizaje matemático en la educación de jóvenes y adultos*

Si bien es unánime la defensa del aprendizaje a lo largo de la vida y el derecho a la educación como pilar del ejercicio de una ciudadanía plena (UNESCO, 1997), no siempre se posibilitan oportunidades equitativas para todos (Kearney, Wood y Teare, 2015). Como afirma Evans (2014), los resultados sobre el éxito o fracaso del sistema educativo de diferentes países a partir de los datos del PISA o PIACC permitirían hacer intervenciones políticas avaladas por estos resultados y plantear mejores políticas educativas. Sin embargo, este mismo autor advierte sobre el riesgo al que pueden contribuir estudios como PIAAC al prescribir indirectamente de forma general del conocimiento de adultos sin considerar las especificidades individuales y de contextos.

Reconocer las especificidades de los alumnos jóvenes y adultos, sus saberes y experiencias en las situaciones de clases conlleva abordar la cuestión en toda su complejidad no cediendo a generalizaciones inadecuadas. En el aprendizaje de las matemáticas las experiencias de los alumnos jóvenes y adultos con la disciplina cualifican la relación con las matemáticas en diferentes contextos (Byrne y Carr, 2015; Maasz, 2008). Según Byrne y Carr (2015) la articulación entre saberes escolares y no escolares y entre experiencias matemáticas construidas en diferentes contextos no es sencilla. El estudio de las características del proceso de aprendizaje tanto en contextos no formales como informales permite identificar las aproximaciones y diferenciaciones en relación con el modelo escolar.

La matemática tiene una gran valoración social. En estudios sobre abandono escolar son numerosos los alumnos jóvenes y adultos que reconocen que las matemáticas son su gran obstáculo (Morgan, 2014). De acuerdo con Lave y Wenger (1991) consideramos el aprendizaje una acción inseparable de las prácticas sociales y de los aspectos socioculturales involucrados en el proceso. Las matemáticas no se configuran solo como una ciencia pura y exacta sino como una construcción social, implicando a los sujetos, sus valores, sus representaciones y contextos (Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez-Sierra, 2006). Las personas adultas, con experiencias y saberes ya construidos a lo largo de la vida, no participan en los procesos escolares de manera neutra. El contexto social y las prácticas sociales son esenciales para la comprensión de sus procesos de enseñanza y aprendizaje (Fantinato y Rosa, 2014; Gerger, 2014).

Investigaciones sobre adultos como las de Larsen (2015) muestran las relaciones diferentes entre los alumnos y el saber matemático. Resultados similares aportan Delprato y Fuenlabrada (2008) en sus investigaciones sobre adultos poco escolarizados, poniendo de manifiesto sus capacidades en el desarrollo de conocimientos y estrategias para resolver problemas cotidianos.

Es importante considerar que las personas, aunque estén en un mismo contexto social y cultural, no participan y califican el mundo de forma única.

El sentido dado y los modos de identificación con los saberes y con el mundo pueden ayudarnos a la comprensión de las relaciones de estos sujetos con las matemáticas. Las personas jóvenes y adultas pueden participar en un mismo contexto, pero se identifican con las matemáticas de distintos modos, influidos por las experiencias, los valores y juicios acerca de sí mismos, de la escuela y de las matemáticas (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b, 2011; Bishop, 1999).

2.2. *Identidad y procesos de aprendizaje matemático*

Seguidamente se presenta el concepto de identidad adoptado en el presente artículo y la relevancia de la identidad social en investigaciones recientes.

2.2.1. *Concepto de identidad*

Consideramos la noción de identidad de forma dinámica, tal y como propone Gómez-Chacón (2000a). El sujeto está en constante negociación de identidad a través de múltiples significados y mediante la pertenencia a un grupo social que requiere un esfuerzo de reconocimiento e integración permanente como sujeto social.

Los participantes de la investigación tienen marcadores sociales instituidos por ser sujetos que fracasaron en la escuela o como sujetos participantes en la escuela nocturna. Utilizamos la definición de Gómez-Chacón para el termino *marcadores de identidad*: atributos que definen la identidad personal del individuo, el estatus que comparte con otros miembros de un grupo social (Gómez-Chacón, 2000a). Estas identidades se atribuyen a partir de los discursos reconocidos en la sociedad y vinculados a su identidad social. Aunque muchas de las identidades se aplican de manera parcial y a partir de las relaciones de poder, por intereses o por conflictos sociales y culturales, la mayor parte de los sujetos negocian su identidad a partir de sus experiencias y prácticas sociales.

Como venimos indicando, las formas de negociación de la identidad y los tipos de pertenencias dentro de los grupos sociales cambian los valores y significados en relación con los saberes y, en particular, con los saberes matemáticos. Heyd - Metzuyanim y Sfard (2015) proponen para el análisis de aula considerar la cognición, el afecto y las cuestiones sociales como aspectos clave del discurso que emiten al aprender matemáticas. Las autoras se basan conceptualmente en Sfard y Prusak (2005) quienes reconocen la identidad como una colección de historias en las que las narrativas de los sujetos son significativas y endosables (Sfard y Prusak, 2005). Gee (2000) identifica cuatro perspectivas interrelacionadas en la identidad (naturaleza, institución, afinidad y discurso) y reconoce la identidad como un "tipo de persona" en un contexto dado; en este sentido una misma persona puede tener diferentes identidades instituidas, negociadas o rechazadas.

Con Gómez-Chacón (1998) y Gee (2000) pensamos en la identidad como una construcción social no neutra, ya que la identificación social de los sujetos depende de la aprobación por los miembros de los grupos sociales y por las relaciones de poder impuestas. Gee (2000) considera el discurso y las instituciones como elementos responsables para la validación de las identidades, de tal modo que en diferentes periodos históricos y en diferentes sociedades las instituciones garantizan un discurso que atribuye identidades a grupos y sujetos sociales.

Tal como venimos apuntando, son muchos los estudios relevantes sobre identidad y definiciones dadas (Gee, 2000; Heyd-Metzuyanim y Sfard, 2015; Sfard y Prusak, 2005). A continuación, nos centraremos en el concepto de identidad entendido de forma operativa y metodológica como "estrategias de identidad" propuesto por Camilleri *et al*. (1990), para un análisis intercultural, y por Gómez-Chacón (1998), para el contexto de aprendizaje matemático.

2.2.2. *Identidad social como "estrategias de identidad"*

La indagación sobre la identidad social de los estudiantes y la pregunta sobre el significado que para los estudiantes tienen las matemáticas y su aprendizaje fue propuesto inicialmente por Gómez-Chacón en 1997 como parte de una nueva formulación de la dimensión afectiva en matemáticas, al menos para poblaciones similares (poblaciones multiculturales y poblaciones con una marcada identidad negativa) (Gómez-Chacón, 1997, 2000a, 2000b). La estructura del autoconcepto como aprendiz de matemáticas está relacionada con las actitudes, con las emociones en situaciones de aprendizaje, con la perspectiva del mundo matemático y con la identidad social de los estudiantes (Gómez-Chacón, 2000a; Gómez-Chacón y Figueral, 2007).

Gómez-Chacón (2000a, p.134) circunscribe el concepto de identidad social a "la parte del autoconcepto del individuo que deriva de su conocimiento como miembro de un grupo social (o grupos) junto con el valor y significado emocional atribuido a ser miembros". Basándose en la concepción aportada por la corriente interaccionista (Camilleri *et al*., 1990), pone el acento en los procesos de construcción de la identidad y concibe las identidades como estrategias de identidad. En esta aproximación se definen algunos conceptos que consideraremos en el presente estudio: estrategias de identidad, afecto global y escenarios.

Entendemos por *estrategias de identidad* los "procesos o procedimientos puestos en obra (de manera consciente o inconsciente) por un actor (individuo o colectivo) para alcanzar una o más finalidades (definidas explícitamente o situadas a nivel inconsciente); procedimientos elaborados en función de la situación de interacción, es decir, en función de las diferentes determinaciones (sociohistóricas, culturales, psicológicas) de esta situación" (Gómez-Chacón, 2000a, p.135).

Por *estructura afectiva-cognitiva global* entendemos el resultado de las rutas seguidas (en el individuo) en el afecto local que se establecen con el sistema cognitivo que van contribuyendo a la construcción de estructuras generales del concepto de uno mismo y a las creencias acerca de la matemática y su aprendizaje. Ésta se indaga a través de escenarios complejos que contemplan a la persona en su contexto sociocultural y en interacción con los otros. Tienen en cuenta el aprendizaje de la matemática como construcción de la identidad social del joven y contextualizan las reacciones emocionales en la realidad social que las produce.

Gómez-Chacón (2000a, p.135) utiliza el concepto sociológico de *escenario*; hablar de un escenario es más bien referirse a lo que hace que una escena se organice tal como se establece, y, muy especialmente, tratar de lo que se está poniendo en juego en un ámbito y en un tiempo concreto con unos recursos determinados. Siempre que eso ocurra en parecidas circunstancias, las personas que intervengan volverán a comportarse más o menos del mismo modo, porque a eso les predispone su aprendizaje individual y social.

En la concepción de los estudiantes del presente estudio, el proceso de aprendizaje de la matemática es algo más que adquirir determinados fragmentos de un conocimiento cultural; significa la pertenencia a un grupo social específico. De acuerdo con Gómez-Chacón (2000a, p. 134) el aprendizaje matemático forma parte del proceso de construcción de su identidad social conceptualizada atendiendo a:

a) Tipo de miembros y cómo están posicionados en relación con el grupo del que forman parte: experiencia, información, posición.
b) Cómo negociar su identidad social a través de la identificación de los siguientes aspectos:

- Comportamientos y situaciones donde la identidad de estos estudiantes es supuestamente perceptible: en relación con los comportamientos que presumimos representativos de ellos y en relación con los escenarios donde cambian sus comportamientos.
- Negociación de la identidad por parte de los estudiantes: cuándo "negociar"; condición bajo la cual uno se identifica consigo mismo; propósito e identidad y gestión de la desigualdad de un grupo que está marcado con una identidad social negativa.
- Recursos disponibles para negociar su identidad: estrategias de identificación.

Siguiendo esta conceptualización, a continuación procedemos al análisis y estudio de los datos recogidos en un escenario escolar brasileño.

3. La investigación: objetivos, contexto, metodología

En esta sección se presentan los objetivos de investigación y se describe el contexto y metodología de estudio:

3.1. *Objetivo*

Los objetivos planteados en esta investigación son:

- Establecer y describir relaciones significativas entre las prácticas matemáticas escolares en la educación de personas adultas y la especificidad atribuida a cada persona.
- Analizar si se podrían interpretar estas relaciones desde la perspectiva de la identidad social, describiendo escenarios donde la identidad social se actualiza en el aprendizaje de la matemática y cómo ésta configura elementos facilitadores u obstaculizadores para el aprendizaje.

3.2. *Contexto*

Los datos se recogieron durante seis meses –duración de un módulo específico de formación– en una escuela pública brasileña de la ciudad de São Paulo. Los participantes procedían de las clases nocturnas de la Educación de Jóvenes y Adultos del estado de São Paulo, matriculados en la última etapa de la educación básica, con edades entre 18 y 70 años, con una media de edad de 30 años. Las experiencias de trabajo son variadas, aunque predominan pintores, mecánicos, dueños de pequeños negocios, albañiles, niñeras, jubilados o personas en paro. Las clases eran totalmente presenciales y en turno nocturno, que forman parte de la red pública de enseñanza del estado de São Paulo, con currículo y materiales didácticos propios. La elección de la escuela se hace por la proximidad con su ciudad; el alumno está motivado por mejorar las condiciones de trabajo.

Presentamos los análisis de los datos de 33 alumnos y hacemos un estudio de caso de dos alumnos: Marta de 45 años y João de 19. El criterio de elección de los casos viene dado por ser informantes clave y representativos de los perfiles destacados.

3.3. *Metodología*

La necesidad de un análisis más profundo y complejo de los datos, con la posibilidad de comprender la situación, las relaciones sociales y el contexto elegido de manera más amplia (Bogdan y Biklen, 1994) nos ha llevado a una opción de investigación cualitativa. La estrategia metodológica está basada en entrevistas semiestructuradas, talleres de resolución de problemas matemáticos, observaciones, participantes y cuestionarios. De acuerdo con el marco teórico descrito en la sección 2.2 se utilizan las categorías de análisis definidas para comprender las relaciones de los sujetos con las matemáticas y el papel de la identidad social en esas relaciones partiendo del concepto de escenario.

El análisis de los datos tiene en cuenta los significados y valores atribuidos por el grupo de estudio de las matemáticas; además, se observan las conductas y la repercusión en el aprendizaje de las matemáticas y las posiciones adoptadas por los sujetos en el grupo social con el objetivo de comprender cómo sus identidades sociales influyen en su relación con las matemáticas.

Las categorías de análisis construidas por Gómez-Chacón (2000a, 2017) posibilitan dos propuestas de análisis para el grupo y para el estudio de casos. Se estudiarán comportamientos y se establecerán perfiles en relación con las matemáticas, dispuestos en escenarios que siguen las categorías definidas por Gómez-Chacón (2000a): *acomodación escolar, autolegitimación, demanda de interdependencia y demanda de respuesta para mensajes o diferenciación (resistencia).* Esta clasificación nos permite comprender la relación del grupo de alumnos jóvenes y adultos con las matemáticas en el contexto escolar y cómo sus conductas repercuten en el aprendizaje de las matemáticas (véase Cuadro I en resultados).

Se precisan las categorías y se sintetiza el análisis en profundidad de la identidad social de los alumnos del estudio de casos (véase Cuadro II y Cuadro III). Las categorías explicitadas en los cuadros son las propuestas en la sección 2, con el objetivo de comprender la posición de los dos sujetos en el grupo social, las experiencias e informaciones de esos sujetos en relación con las matemáticas. Estas categorías de análisis permiten exponer los marcadores sociales y las identidades sociales de los alumnos de modo que se pueda comprender cómo cada sujeto se relaciona de manera única con las matemáticas y qué factores se pueden atribuir a sus identidades sociales (Gómez-Chacón, 2000a). Entenderemos por *Escenarios de acomodación o ajuste escolar* cuando los sujetos manifiestan resistencia a los contenidos matemáticos. *Escenarios de autolegitimación*, como situaciones en las que los sujetos intentan justificar sus acciones en el grupo como un intento por legitimarse en el grupo social y como una legitimación interna, de modo que intenten justificar la calidad de las personas y los modos de proceder de acuerdo con las leyes del grupo y del contexto al que pertenecen.

Algunos de los elementos de los dos primeros escenarios también están presentes en *Escenarios de demanda de inter(dependencia)*, que revelan las conductas de los sujetos relacionados con la escuela y las matemáticas vinculadas a una sensación de menosprecio hacia uno mismo y a un aislamiento ante del grupo. Como afirma Gómez-Chacón (2000a, p. 138), alumnos con reacciones de autolegitimación o de acomodación escolar, en su mayoría, las mantienen como tradición del grupo de pertenencia, sin cuestionamientos o tentativas de romper con ellas.

Por último, veremos en la sección de resultados la existencia de sujetos que intentan cambiar su identidad social negativa al evidenciar un conflicto de identidad, de modo que sus conductas están categorizadas como pertenecientes a *Escenarios de respuesta para mensajes (o diferenciación).*

El Cuadro II nos permite comparar la posición de los dos alumnos en el grupo social y analizar de qué manera este posicionamiento influye en su relación con las matemáticas. El Cuadro III nos posibilita comprender cómo las experiencias y las informaciones de los alumnos en relación con las matemáticas influyen en sus modos de percibir y movilizar sus saberes matemáticos. Los dos cuadros analizan la identidad social de estos alumnos y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas. Tanto la posición como la experiencia e información de los sujetos en relación con las matemáticas son clave para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar.

4. Resultados

Se presentan los resultados siguiendo las categorías descritas en la sección 3. Primero se describen las conductas del grupo de estudio (N=33), seguido del estudio de casos de João y Marta donde se explicitan las similitudes y diferencias en los aspectos de negociación de identidad. Con el propósito de mantener la privacidad de los sujetos de esta investigación, utilizaremos seudónimos, letras y números para hacer referencia a los diferentes alumnos.

4.1. *Las conductas de los estudiantes jóvenes y adultos y las repercusiones en el aprendizaje de las matemáticas*

Se han podido constatar distintos escenarios que clasifican las conductas observadas y las repercusiones de las acciones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (véase Cuadro I).

CUADRO I

Tipos de escenarios correspondientes a las conductas de los estudiantes (N=33)

Escenarios	*Conductas*	*Repercusión en el aprendizaje*
Acomodación escolar	Se pone de manifiesto una forma de hacer matemáticas de manera mecánica. Se evocan experiencias anteriores negativas con las matemáticas. No se hace uso de otros saberes por no reconocerlos en el escenario escolar. Se sienten incómodos con lo nuevo.	Se muestra resistencia a las tareas de resolución de problemas. Se evidencia una resistencia a integrarse con el grupo para la resolución de las tareas propuestas. Se muestra desconfianza en los procedimientos utilizados por los compañeros que no sean los coincidentes con el profesor. Se rechazan las actividades por considerarse incapaces de hacerlas.
Autolegitimación	Se exponen las opiniones, los valores, las preferencias y las reacciones emocionales. Se intentan legitimar los valores y reacciones del grupo de pertenencia.	Se utilizan estrategias informales de resolución. Se muestran mecanismos de defensa: bromas. Se evidencia resistencia a las actividades diferentes de las habituales. Se advierte resistencia a ampliar el modo de pensar las matemáticas. Se valora el aprendizaje en grupo. Se evidencia falta de reconocimiento de las propias capacidades. No se reconoce en la escuela.
Demanda de (inter) dependencia	Se apoya en la fuerza del grupo de pertenencia, se siente miedo ante lo nuevo. Se cree en la propuesta y en las características del grupo.	Se manifiesta comunicación entre alumno - grupo. Se evidencia resistencia a la comunicación entre alumno - profesor. Se percibe resistencia a las normas escolares. Se muestra resistencia en aprender nuevos conceptos.

Respuesta para el mensaje (diferenciación)	Aparece una respuesta diferencial según se es joven o adulto Se desvalorizan las matemáticas de otros contextos.	Aparecen resistencias a la interacción entre jóvenes y adultos. Se evidencia aislamiento y resistencia al trabajo cooperativo.

En situaciones de clase, los alumnos presentan diferentes modos de relacionarse con las matemáticas. Se constata que bastantes alumnos, en situaciones de dificultad con algún contenido matemático propuesto, reaccionan negativamente debido a su experiencia anterior en matemáticas.

Los cuatro escenarios presentados en el Cuadro I sintetizan las conductas de los alumnos jóvenes y adultos en diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar. Se evidencia una fuerte resistencia de los más jóvenes a las tareas propuestas cuyas conductas se pueden catalogar en la tipología *escenarios de acomodación escolar*. Los discursos de estos estudiantes están vinculados, por una parte, a la obligación de volver a la escuela y a la de seguir un aprendizaje reglado con objeto de obtener un empleo (Estudiante A 2.3: "Sólo estoy aquí para tener trabajo, si no, haría otra cosa mejor") y por otra, a reconocerse como fracasados en el aprendizaje de las matemáticas (Estudiante A 3.4: "Siempre se me dio fatal las matemáticas [*sic*]". Estudiante A 5.1: "Desistí de la escuela por no saber matemáticas"). Ambas reacciones repercuten negativamente en el proceso de enseñanza de las matemáticas escolares.

En este escenario tenemos el caso del estudiante A 1.2, a quien llamaremos João, que no acepta que se pueda resolver un problema matemático sin utilizar los procedimientos enseñados por el profesor, y manifiesta una forma de hacer matemáticas mecánicas, sin comprensión conceptual ni de procedimientos:

1) Una profesora realizó una actividad con sus alumnos utilizando pajitas de helado para montar figuras; cada lado estaba representado por una pajita. La cantidad de pajitas (C) de cada figura depende de la cantidad de cuadrados (Q) que forman cada figura. La estructura de formación de las figuras está representada a continuación:

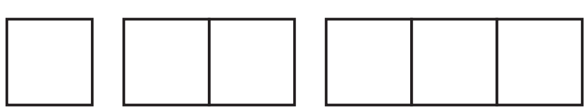


Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Qué expresión representa la cantidad de pajitas en función de la cantidad de cuadrados de cada figura?

a) C = 4Q *b)* C = 3Q + 1 *c)* C = 4Q – 1
d) C = Q + 3 *e)* C = 4Q – 2

Estudiante A 1.2: "Pero, ¿para qué eso?, entonces... ¿No teníamos que hacer aquí sólo lo que se aprende en la escuela?"
Estudiante A 1.3: "Chicos, vamos a intentarlo y después hacemos las reclamaciones, ¿vale? Volviendo, la figura 1 tiene un cuadrado y cuatro pajitas; la figura 2 tiene dos cuadrados y siete pajitas, y la figura 3 tiene tres cuadrados y diez pajitas […]"
Estudiante A 1.2: "Vamos a intentar ponerlo en las fórmulas y miramos si están correctos o no. ¿Podríamos seguir así?"
Estudiante A 1.3: "Pero, ¿qué quieres decir con ese número cuatro enfrente del Q?"
Estudiante A 1.2: "Mira en tu cuaderno a ver si encuentras algo como eso".
Estudiante A 1.3: "Creo que es una multiplicación. Profesora, ¿4Q es lo mismo que 4 veces Q?"
Estudiante A 1.1: "Pero, ¿qué es Q y C?"
Profesora: "Eso es. 4Q es lo mismo que Q cuatro veces. O mejor, 4 veces Q".
Estudiante A 1.2: "Q son los cuadrados y C son las pajitas. Difícil hacer sin X, ¿no? ¿Podríamos intentar poner X y no Q?"
Estudiante A 1.3: "Pero, ¿y en C? ¿Qué vas a poner? ¿No se puede poner X, o sí? […]" (Taller 1).

En ese escenario, João y sus compañeros tratan de comprender el problema utilizando los procedimientos conocidos, como el uso de la letra X para los valores desconocidos. João cree que los modelos introducidos por su profesor pueden ayudarles en la resolución. Se percibe que argumenta y trata de convencer a los compañeros. Lo mismo le pasa al alumno A 1.3 que también inicia con la interpretación del problema. Esa situación evidencia un escenario en el que los sujetos actúan reproduciendo los procedimientos matemáticos sin seguridad en la comprensión del uso. Las conductas reflejan que aunque tienen otros saberes procedimentales no los utilizan por no reconocerlos en el contexto escolar.

Durante los talleres fue posible identificar a estudiantes que siempre reproducían métodos y procedimientos dados por el profesor. También en ciertos momentos se producía rechazo a las actividades por considerar que el ámbito escolar no era adecuado para ellos:

Estudiante A 3.7: "Nosotros no tendríamos que estar aquí. Yo tengo que trabajar y ahora estoy aquí, pues si no me quitan el trabajo. Estoy aquí, pero podría estar con mis niños y mi familia. No me gustaría estar toda la noche aquí escuchando estas tonterías que no sirven para trabajadores como yo" (Taller de Resolución de Problemas).

Los principales motivos de fracaso escolar de jóvenes y adultos son, por una parte, la resistencia a integrarse en el grupo y, por otra, el rechazo a la forma de organización de la escuela brasileña que adapta a los jóvenes y adultos que se reincorporan al sistema escolar, una estructura de enseñanza infantil y de adolescentes.

Bajo la categoría *escenarios de autolegitimación* se detectó la influencia de la fuerza de los grupos sociales en las conductas de los sujetos, aunque en las entrevistas no lo muestren conscientemente. Alumnos como A 1.4 justifican sus dificultades en el aprendizaje atribuyéndolo a su edad e indicando que "hablan por su grupo". Esta expresión explicita que se reconocen como pertenecientes al grupo de los alumnos adultos: "Al ser *mayores no podemos pensar como antes, parece que nuestra mente no funciona más*" (A 1.4. Marta, cuestionario). Ese discurso refuerza la idea de que los adultos mayores no aprenden, y por eso fracasan, sin dar lugar a un cuestionamiento más profundo que afecta a la organización y a la formación del profesorado, causa de la falta de identificación de esos alumnos con la escuela. Destacamos que la estudiante A 1.4 tiene entre 50 y 60 años y que su razón principal para volver a estudiar es "ayudar a mis nietos con las tareas escolares" (A 1.4. Entrevista).

A diferencia de los alumnos mayores, la conducta de los jóvenes se configura frecuentemente a partir del rechazo y de la ridiculización a otros estudiantes con el intento de hacer valer las actitudes del grupo: "Creo que ni los *nerds* ('empollones') sepan hacer eso [*sic*.]. Están siempre preguntando al profesor, hacen todo correcto, hasta con la coma, como la del profesor" (Estudiante A 2.1. Taller de Resolución de Problemas). La conducta del alumno A 2.1 indica la reacción ante una situación desconocida como son los talleres de resolución de problemas propuestos. Además, el uso de bromas actúa como mecanismo de defensa ante la resolución y afirma la identidad del grupo. Alumnos como A 2.1 muestran una conducta que se puede tipificar en el escenario de *demanda de inter(dependencia);* él se apoya en la fuerza del grupo para exponer sus opiniones. Algunos alumnos se pueden categorizar en varios escenarios, como por ejemplo la conducta del alumno A 6.1, que también se configura como una conducta del escenario *acomodación escolar*, donde no reconocen que sus saberes matemáticos son útiles en el contexto escolar:

Estudiante A 6.1: "Perdóname, pero la escuela no es un sitio para eso, profesora. Imagínate si la gente viene aquí para usar lo que ya sabe y nada más… nunca nosotros vamos a mejorar".

Investigadora: "La propuesta es comprender qué recursos utilizáis en los diferentes problemas matemáticos. Aquí hay grupos que utilizan algoritmos para la resolución de algunos problemas, otros utilizan recursos que aprendieron…"

Estudiante A 6.1: "Comprendo. Solo creo que aquí la gente tiene que aprender matemáticas. Y las matemáticas son memorización, repetición,

> cuentas y no lectura y todo eso que estás hablando. Pero comprendo. Vamos a intentar hacerlos…" (Taller de Resolución de Problemas).

La respuesta del alumno A 6.1 nos remite a una disociación entre las diferentes prácticas matemáticas, en especial las matemáticas producidas en la escuela que establecen pocas relaciones con otros conocimientos de práctica y uso. No obstante, ante el siguiente problema propuesto:

Problema 2. Taller 4: El número mensual de pasajes de una empresa aérea ha sufrido un aumento el año pasado con las características que siguen: en enero se vendieron 33,000 pasajes; en febrero 34,500; en marzo 36,000. Ese padrón de crecimiento se mantiene para los meses siguientes. A partir de la información, ¿cuántos pasajes se vendieron en julio del año pasado?

a) 38,000 *b)* 40,500 *c)* 41,000 *d)* 42,000 *e)* 48,000

Los alumnos A 3.4 y A 3.5 establecen la siguiente discusión:

Estudiante A 3.4: "¿Comprendiste tú todo?"
Estudiante A 3.5: "Mira, tengo todas las informaciones aquí. Creo que podríamos buscar otro problema como ése y hacer lo mismo. Paso a paso".
Estudiante A 3.4: "Pero no siempre son los mismos. A veces tenemos que usar otra estrategia que no está en el cuaderno".
Estudiante A 3.5: "Pero ahí solo cambiamos los números. El profesor dijo una vez que si seguimos los procedimientos de los ejercicios anteriores siempre tendremos éxito".
Estudiante A 3.4: "Pero ahora los problemas no son como los del profesor. No sé. Tengo dudas, pero voy hacer como tú".

El relato anterior puede indicar que los alumnos no han comprendido el problema; no obstante, el alumno A 3.5 rápidamente tiende a buscar una solución basada en sus experiencias anteriores: reproducir lo hecho por el profesor. La respuesta del alumno A 3.4 revela falta confianza en su argumentación y por eso elige hacer lo mismo que su compañero en un escenario de dependencia.

Finalmente, los *escenarios de respuesta por mensaje (o diferenciación*) se evidencian en las clases referidos a las diferencias de edad entre el alumnado de ese contexto escolar. El aumento del número de jóvenes en las clases nocturnas de adultos plantea un problema de reconocimiento y de legitimación cuando se analiza la diversidad. La comunicación del alumno A 1.4 (Marta) muestra el conflicto entre las generaciones en un espacio: "[...] Creo que esta mezcla de jóvenes y adultos en un mismo espacio perturba. Nosotros, mayores, vamos más despacio, necesitamos más atención; los jóvenes son más rápidos, tienen la cabeza mejor. Creo que si las clases estuvieran separadas, nosotros aprovecharíamos más" (Entrevista A 1.4. Marta). Este escenario evidencia el conflicto en la relación entre jóvenes y adultos con formas precisas de resistencia y a través de la explicitación de la creencia de que los saberes de un grupo por sus diferencias culturales, de edad o sociales, son más importantes que los del otro. Los grupos rechazan el saber matemático del otro, en particular cuando estos saberes no son validados en la escuela.

En muchos casos, se enmascaran dificultades personales tal como expresa uno de los alumnos:

> Estudiante A 4.3: "¿Cómo puedes querer hacer así si ni sabes escribir correctamente? Yo no sé cómo hacer, pero seguramente no es así" (Taller de Resolución de Problemas).

En síntesis, la relación entre estos sujetos y el saber matemático es de resistencia, y está vinculada al posicionamiento de su identidad social, cuyo marcador social -reconocido por ellos mismos- se expresa en términos de "fracaso", "incapacidad", "desprecio", etc. También, destacamos sus historias de vida y experiencias escolares. Las experiencias escolares previas, los fracasos anteriores, la resistencia a los cambios y los posicionamientos en el grupo hacen que el proceso de aprendizaje de las matemáticas esté marcado por las actualizaciones que los sujetos hacen de su identidad o de los marcadores de identidad del grupo de pertenencia. Estos aspectos actualizan valores y elementos de sentido con clara repercusión en el contexto escolar y la relación de los alumnos con el saber.

4.2. *Negociación de la identidad social: estudio de casos*

Con el estudio de casos se trató de profundizar en el origen del rechazo hacia las matemáticas y dónde situar los obstáculos que impedían el progreso en el aprendizaje. En el análisis del grupo se puso de manifiesto que los comportamientos de los estudiantes evidenciaban diversas estrategias y distintos modos de negociación de su identidad social. Como se indicó anteriormente, para explorar esta negociación se consideraron como categorías de análisis la variedad de posicionamientos dentro del grupo social, la influencia de las experiencias en las actividades en clases de matemáticas, los modos de intercambiar saberes y las relaciones con el grupo y con las matemáticas a partir de sus experiencias, y se consideraron dichas experiencias e informaciones acerca de las matemáticas como relevantes para la comprensión de sus relaciones con las matemáticas en el contexto escolar. Los cuadros II y III presentan una síntesis de la posición adoptada y de la experiencia e información respecto a las matemáticas obtenida de la triangulación de la información en el desarrollo de los talleres de resolución de problemas, entrevistas y cuestionarios de los dos alumnos.

Los cuadros II y III presentan la posición de los dos sujetos en el grupo, representaciones acerca de las matemáticas y acerca de sí mismos. Como podemos observar, en la información del Cuadro II los dos sujetos parecen aplicar el marcador social negativo. Marta, tanto en la entrevista como en el cuestionario, afirma que sus dificultades de aprendizaje se deben a su pertenencia al grupo de más edad y se reconoce incapaz de superar esas dificultades; según ella, no puede aprender como los más jóvenes: "Creo que ser joven facilita el aprendizaje, *pues la mente de la persona joven es más rápida para aprender"* (respuesta de Marta cuando se le preguntó sobre los grupos de edad y el aprendizaje de las matemáticas). João, un joven que acaba de salir de la escuela obligatoria, no se reconoce en la educación de adultos, se siente fuera del patrón prototipo de esta escuela.

CUADRO II

Posicionamiento de los estudiantes João y Marta

Posición adoptada por los sujetos en el grupo social	
Marta	*João*
Evidencia un marcador social negativo –cree no aprender por ser adulto. Tiene gran motivación para aprender, valoriza el saber escolar ante su propio saber práctico; el valor adscrito a matemáticas está vinculado a la confianza en su capacidad. Representa el grupo de adultos con dificultades –habla en nombre de su grupo. Respeta las normas escolares y valora excesivamente la figura del profesor. No se reconoce como parte de la escuela. Reconoce el aprendizaje de las matemáticas como posibilidad de ascensión social y personal (reconocimiento social).	Evidencia un marcador social negativo –cree que no está en el "estándar" de la escuela. Tiene una gran motivación para la práctica, y no tanto para el aprendizaje de conceptos; le motiva la posibilidad de tener un empleo. No es "alguien" dentro del grupo. Respeta las normas escolares, pero solamente lo hace para tener un diploma y no fracasar. No se reconoce en la escuela. Reconoce las matemáticas como herramienta de ascensión social. No le gustan las matemáticas y afirma su deseo de continuar los estudios.

CUADRO III
Experiencia e información de los estudiantes en relación con las matemáticas

Experiencia – Información	
Marta	*João*
Tiene experiencia escolar negativa. Concibe la escuela como espacio de adquisición de conocimientos - saberes escolares. No muestra tener mucho conocimiento de matemática elemental. Desvaloriza sus saberes; no los reconoce. Muestra carencia de conocimientos de la matemática (escolar) elemental. Valoriza los procedimientos que hace de manera mecanizada en muchos casos. Se interesa en actividades procedimentales.	Tiene experiencia escolar negativa. Concibe la escuela como espacio de adquisición de conocimientos. No muestra tener mucho conocimiento de matemática elemental. Desvaloriza sus saberes. Se siente inseguro con relación a sus saberes matemáticos. Tiene carencia de conocimiento matemático elemental; su aprendizaje es contextualizado; tiene dificultades para comprender actividades propuestas.

Ambos, João y Marta, creen que no aprenden porque están fuera de los "moldes" de la escuela: "La escuela es para chicos inteligentes y que no cuestionan. Yo estoy retrasado. Ya tendría que estar con mi diploma y trabajando en una gran empresa, pero ahora estoy aquí, teniendo que cumplir las clases y estando siempre callado" (Entrevista. João). Lo mismo piensa Marta al considerar que las personas mayores no aprenden porque piensan más despacio y por no ser capaces de aprender todos los conceptos matemáticos al ritmo exigido. Las narrativas de estos casos indican que las clases de adultos no están adaptadas para los más jóvenes ni para los más adultos en lo referente al conocimiento matemático. En el contexto de educación brasileña, tal como también han indicado Marques y Costa (2015) al referirse a contextos de exclusión social, la incapacidad sentida para cambiar su realidad social mediante el conocimiento constituye un obstáculo. Sin embargo, si esta adquisición de conocimiento va unida a una mayor realización personal y reconocimiento social el resultado es diferente. Parece que estos dos estudiantes adoptan este marcador social que influye negativamente en su relación con las matemáticas. En concreto, cuando los alumnos son confrontados con situaciones que evocan sus experiencias negativas con las matemáticas o con conceptos matemáticos que no dominan, se manifiestan estas identidades sociales.

Los dos alumnos visibilizan identidades sociales ya impuestas, las reconocen, y aunque son conscientes de los marcadores, cada uno busca su negociación particular. Asimismo, Marta y João reconocen las matemáticas como una herramienta de ascenso social, bien por la búsqueda del trabajo, como afirma João, o por el ascenso personal, según Marta, a quien le gustaría tener reconocimiento social por su saber matemático escolar. Marta, en la entrevista y en el Taller de Resolución de Problemas, reconoció el saber escolar como superior a sus propios saberes prácticos:

Estudiante Marta: "[…] mira, yo hago las cuentas como lo hace el profesor, pero yo sé que están incorrectas [*sic*]. Pero algunas veces los resultados están correctos. Entonces yo intento hacer como el profesor, pero a veces lo hago a mi manera […]. Te sientes realizada cuando tú sabes el contenido, si alguien te pregunta las cosas y tú sabes hacer las matemáticas. Hasta en la calle, cuando alguien me pregunta una cosa, yo no sé, pero creo que después de la escuela voy a estar más ágil. Las clases me ayudan a pensar mejor en las cosas. Es maravilloso tener confianza y contestar lo que te preguntan.

En la narrativa de Marta destaca la creencia de que los saberes prácticos no son tan importantes, pues no son como los de la escuela o los que les enseña el profesor. Si en las clases de matemáticas se establecieran conexiones explícitas entre los saberes prácticos y los saberes matemáticos escolares, las matemáticas se volverían más significativas y podrían modificar estos posicionamientos. João tampoco valora sus saberes prácticos ni considera que le ayuden para la obtención del diploma. Su afirmación es consistente con lo observado en las clases, en las que no hizo ninguna relación entre los saberes matemáticos prácticos y teóricos. Las experiencias escolares de João fueron un fracaso cuya única responsabilidad se debe a su actitud en la escuela. João cree que lo que le hizo fracasar fue no respetar las reglas de la institución.

Ambos estudiantes tienen gran dificultad con las matemáticas, pero en las sesiones del taller se puso de manifiesto que João tenía más confianza y facilidad para resolver problemas contextualizados y de situaciones ya conocidas que Marta. Ella concede gran autoridad al profesor y sus procedimientos, de modo que siempre se pone en contra de las propuestas de sus compañeros cuando ofrecen resoluciones diferentes de las registradas en su cuaderno: "[…] pero el profesor no lo haría de esa manera. Creo que será mejor preguntar […] Mira mi cuaderno; tienes que hacerlo con esa fórmula" (Registro de Marta en el Taller 2). João no reconoce los problemas propuestos en el taller como problemas de matemática: "Creo que en los próximos talleres podríamos tener más problemas matemáticos, pues creo que nosotros estamos aquí para aprender cosas más elaboradas, usar más fórmulas" (João al final del Taller 2). Marta y João no se reconocen en el contexto escolar, bien por ser adultos y pertenecer a una etapa de aprendizaje considerada antigua, como afirma Marta o como indica João, que revela no estar de acuerdo con las normas escolares, razón por la que fue excluido del contexto escolar obligatorio: "Te van a llevar por el camino y así, o tú desistes o continúas fracasando" (João cuando defiende su postura de neutralidad en la escuela con objeto de lograr el diploma escolar, considera que al cuestionar la organización de las clases de matemática puede tener problemas y no obtener el diploma).

Al igual que Marta y João, otros estudiantes expresan que el espacio de las clases de matemáticas son espacios de negociación de identidades y, además, un lugar en que el fracaso está constantemente presente en la interacción. Estos jóvenes y adultos no se reconocen como constructores de saber, no se identifican con el saber matemático ni pertenecientes a una comunidad de práctica. En el contexto de adultos, al igual que lo ya diagnosticado en el aprendizaje en contexto de exclusión, el silenciamiento de los saberes prácticos cotidianos genera reacciones de mayor resistencia.

Para Marta, la información acerca de las matemáticas se reduce a los saberes transmitidos por un profesor y por los expertos en matemáticas. Por ejemplo, sus concepciones acerca de las matemáticas: "Para mí las matemáticas están en todo, pero yo las uso solo para hacer las compras en casa y ahora para ayudar a mi nieto. Yo no tengo mucha cabeza para eso" (Cuestionario A 1.4. Marta). Para João, las matemáticas se reducen a algoritmos y a las operaciones elementales, y para ser bueno en matemáticas hay que esforzarse: "Nosotros aquí en la escuela nocturna, haciendo solo una u otra cuenta no vamos a ser buenos nunca. Las matemáticas necesitan entrenamiento". (Cuestionario A 1.2. João). Aunque estos sujetos tienen representaciones relevantes acerca de las matemáticas, las experiencias negativas, las posiciones en el grupo social y la información acerca de las matemáticas modifican su relación con el saber de forma limitada para su aprendizaje.

5. Discusión y conclusiones

La finalidad principal del estudio es identificar cómo las identidades sociales configuran las identidades matemáticas y cómo éstas afectan a la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación de adultos. Los principales hallazgos son los siguientes: *1)* las relaciones del sujeto con el conocimiento matemático están mediadas por diferentes representaciones sociales respecto a este saber y por el autoconcepto del individuo que deriva de su conocimiento como miembro de un grupo social (o grupos) junto con el valor y significado emocional atribuido a ser miembros de ese grupo; *2)* la identificación de cuatro escenarios donde se actualiza la identidad social en el aprendizaje matemático y que son facilitadores u obstaculizadores para el aprendizaje; *3)* la diversidad de posicionamientos ante un mismo marcador social negativo y las formas de negociación de identidad son diferentes según cada individuo, teniendo relación con sus experiencias e informaciones acerca de las matemáticas, y *4)* la eficacia de la opción conceptual y metodológica para describir el carácter dinámico de la identidad.

A continuación, consideramos estos resultados con más detalle de acuerdo con los objetivos establecidos. Asimismo, la valoración que supone haber considerado el enfoque teórico-metodológico planteado con estrategias de identidad.

Respecto al primer objetivo, hay relaciones significativas que conviene destacar. Se han puesto de manifiesto las interacciones e influencias socioculturales en los individuos y cómo esa información se internaliza y da forma a sus comportamientos y sistemas de creencias en situaciones de aprendizaje matemático. Focalizar el análisis en estrategias de identidad ha puesto de relieve dos aspectos: las representaciones sociales del conocimiento matemático y la identidad sociocultural de los sujetos. Los estudiantes con una identidad negativa tienen una comprensión del fracaso en matemáticas como algo fijo y permanente. En el estudio de casos, João evidencia un conocimiento de las reglas instituidas con relación al éxito y al reconocimiento social en matemáticas.

En relación al segundo objetivo, se constata una actualización de la identidad social en las situaciones de aprendizaje. Se han identificado momentos y escenarios donde es posible percibir que los saberes matemáticos de los sujetos no son reconocidos en el contexto escolar, ya sea por el propio sujeto o por el grupo social. Se han descrito cuatro escenarios (de ajuste escolar, de autolegitimación, de demanda de interdependencia y de respuesta a mensajes o diferenciación (resistencial)). Estos resultados muestran que las identidades sociales de estos sujetos no son algo estático, sino dinámicas y por ello factibles de negociación y de cambios en las situaciones de interacción. Esta conclusión confirma los estudios previos llevados a cabo en otros contextos culturales (Gómez-Chacón, 2000, 2016; Gómez-Chacón y Figueral, 2007; Sfard y Prusak, 2005); ante un mismo marcador negativo social las formas de negociación de la identidad son diferentes según el individuo. La posición adoptada por cada sujeto tiene estrecha relación con sus experiencias e informaciones acerca de las matemáticas en el contexto escolar previo y en situaciones de práctica cotidiana.

Las conductas de los estudiantes revelan conflictos y resistencias en el aprendizaje matemático. La mayoría del grupo se puso en contra de los nuevos saberes y actividades que se plantearon en la formación. No valoraron sus propios saberes y mostraron resistencia a la identificación con sus grupos sociales. Hay una gran variedad entre los que intentaron negociar sus identidades negativas y diferenciarse del grupo de pertenencia. Sus identidades están marcadas por sus experiencias (escolares y profesionales) y por sus conocimientos de las matemáticas en situación de práctica. Las posiciones en relación con sus grupos sociales del estudio de casos evidencian este marcaje de identidad social negativa. Marta y João son un ejemplo de ello; ambos se reconocen incapaces de cambiar su relación con la escuela y con las matemáticas. Los dos revelan experiencias anteriores de fracaso y no son capaces de establecer conexiones entre sus saberes matemáticos con los de la escuela porque creen que no son suficientemente importantes para el contexto escolar. Tanto Marta como João valoran las matemáticas como una posibilidad de ascenso social, pero no se interrogan sobre su papel en el grupo y en las clases de matemáticas. Su manera de relacionarse con las matemáticas es diferente y su identidad se negocia de forma distinta en el contexto escolar y se configura una identidad matemática diferente.

Estas conclusiones plantean un desafío a las políticas educativas brasileñas en la línea señalada por Fonseca (2015). En el contexto de la educación de adultos en Brasil se evidencia una disminución del número de alumnos y un escenario de exclusión. Estos resultados confirman la afirmación de Di Pierro sobre el rigor en el horario y el currículum fijo sin conexiones con la cultura, y la formación anterior del estudiante hacen poco atractivas las clases de adultos (Morrone y Oshima, 2016). Hacemos notar la diferencia marcada por la pertenencia al grupo de jóvenes o al grupo de adultos, confirmando investigaciones como las de Schneider y Fonseca (2013). En nuestro estudio se produce una desvalorización de los conocimientos procedentes de la práctica, lo que hace que los alumnos rechacen los propios saberes y valoren más los conocimientos del profesor. Estas valoraciones inciden en sus conductas y repercuten negativamente en el proceso de aprendizaje y en su autoconcepto como aprendices de matemáticas, de modo que se reconocen incapaces de aprender.

En relación con la opción conceptual y metodológica utilizada (sección 3) basada en el estudio de las estrategias de identidad se destaca su eficacia para describir el carácter dinámico. Se destaca el valor de metodologías que extraen la identidad no solo de la actividad del aula, sino del contexto social. Asimismo, permite enfatizar la importancia de la incorporación de la matemática en los datos del discurso - acción. Una observación repetida de individuos en diferentes actividades permite establecer las diversas rutas de la estructura afectiva-cognitiva global de los sujetos. Identificar las dificultades que se originan en la interacción entre la cognición y el afecto implica hacerse sensible a estos movimientos, reflexionar sobre ellos y comprender de dónde vienen y hacia dónde nos conducen. La captura de esta estructura de afecto global con una mayor precisión en el nivel de investigación en educación matemática sigue siendo un desafío (Gómez-Chacón, 2017). Sin embargo, como se mostró en la sección 4, hay ciertos elementos que solo se pueden definir en la interacción y las influencias socioculturales en el individuo.

A través de lo expuesto en este artículo hemos tratado de enfatizar tanto el papel de la cultura y de los procesos sociales como la variedad de posiciones adoptadas por los individuos. Los factores sociales y culturales no pueden interpretarse como un "paquete estático uniforme". Un estudio prospectivo podría profundizar en los perfiles de los sujetos, su variabilidad, diversidad y subjetividad asociada a una tipología diferente de conocimientos matemáticos y al sistema de comunicación simbólica en las relaciones sociales.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibo financiación del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Cnpq) de Brasil (Programa de Doutorado Sanduíche (2015-2016)).

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bogdan, R., y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Camilleri, C., Kastersztein, J., Lipiansky, E. M., Maleswska - Peyre, H., Taboada - Leonetti, I., y Vasquez, A. (1990). *Stratégies identitaries.* Paris: Presses Universitaires de France.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial *9*(4), 83-92.

Delprato, M. F., y Fuenlabrada, I. (2008). Así le hacemos nosotros: prácticas de numeración escrita en organizaciones productivas de mujeres con baja escolaridad. *Cuadernos de Educación*, año *VI*, (6), 337-349. Disponible en: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/Cuadernos/article/view/762

Díez Palomar, F. J. (2004). *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas, un modelo dialógico.* Barcelona: Universidad de Barcelona.

Evans, J. (2014). New PIAAC Results: Care Is Needed in Reading Reports of International Surveys. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *9*(1), 37-52. Disponible en: https://eprints.mdx.ac.uk/14675/

Fantinato, M. C., y Moreira, D. (2016). Adult Educators: Dilemmas and Professional Practices in the Area of Mathematics. *Educação e Pesquisa*, *42*(1), 67-82. https://doi.org/10.1590/s1517-97022015031830

Fantinato, M. C., y Rosa, T. G. (2014). Articulações entre saberes de jovens e adultos nas pesquisas em Etnomatemática. *Boletim do LABEM, 5*(9), 34-45. Disponible en: http://www.labem.uff.br/images/Boletim_LABEM/Boletim__n.9/2014.2_-_04_-_pp.34-45.pdf

Fonseca, M. C. F. R. (2015). Parâmetros balizadores da pesquisa em educação matemática e diversidade: EJA e inclusão. Educação Matemática Pesquisa. *Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *17*(3), 530-540. Disponible en: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/25669

Gee, J. P. (2000). Identity as an Analytical Lens for Research in Education. *Review of Research in Education*, 25, 99-125. https://doi.org/10.3102%2F0091732X025001099

Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social: Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas.* Tesis doctoral Universidad Complutense de Madrid. Publicada como libro electrónico en 2004 por Universidad Complutense de Madrid (ISBN: 84-669-1112-X).

Gómez-Chacón, I. M. (1998). *Matemáticas y contexto*: enfoques y estrategias para el aula. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2000a). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2000b). Affective Influences in the Knowledge of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *43* (2), 149-168. https://doi.org/10.1023/A:1017518812079

Gómez - Chacón, I. M. (2011). Beliefs and Strategies of Identity in Mathematical Learning. In Roesken, B., y Casper, M. (Eds.) (2011). *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII* (pp. 74-84). Ruhr, Germany: Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum.
Gómez - Chacón, I. M. (2017). Appraising Emotion in Mathematical Knowledge: Reflections on Methodology. In U. Xolocotzin (Ed.) *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning* (pp. 43- 73). London: Elsevier Inc. Academic Press.
Gómez - Chacón, I. M. y Figueral, L. (2007). Identité et facteur affectifs dans l'apprentissage des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM Strasbourg, 12, 117-146.
Kearney, J., Wood, L., y Teare, R. (2015). *Designing Inclusive Pathways with Young Adults: Learning and Development for a Better World*. Netherland:Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-157-1
Larsen, J. (2015). Adult Students' Experiences of a Flipped Mathematics Classroom. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, 10(1), 50-67. https://eric.ed.gov/?id=EJ1077724
Lave, J., y Wenger, E. (2001). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press.
Leiva, J. (2017). Estilos de aprendizaje y educación intercultural en la escuela. *Tendencias Pedagógicas*, 29, 211-228. Disponible en: https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/7091
Maasz, J. (2008). The Slowly Changing Face of Adults Mathematics Education in Austria Not Learning from the Past Means no Chance of Planning Improvements for the Future. In Terry Maguire *et al.* (Eds): *The Changing Face of Adults Mathematics Education. Learning from the Past, Planning for the Future.* 14th International Conference of Adult Learning Mathematics (ALM). (53-64). Ireland: ALM. Disponible en: http://www.alm-online.net/images/ALM/proceedings/alm-07-proceedingsalm14.pdf#page=53
Marques, R. M., y Costa, C. S. (2015). Por uma educação matemática crítica na EJA: da desopressão à conscientização do aluno-cidadão-consumidor. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, *5*(1), 139-154. Disponible en: http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/viewFile/217/272
Morgan, C. (2014). Social Theory in Mathematics Education: Guest Editorial. *Educational Studies in Mathematics, 87*(2), 123-128. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9572-0
Morrone, B., y Oshima, F. Y. (2016). Maria Clara Di Pierro: "Perdemos 3,2 milhões de matrículas na Educação de Jovens e Adultos. Época, São Paulo. Recuperado de: http://epoca.globo.com/ideias/noticia/2016/06/maria-clara-di-pierro-perdemos-32-milhoes-de-matriculas-na-educacao-de-jovens-e-adultos.html
Schmelkes, S. (1994). *Necesidades básicas de aprendizaje de los adultos en América Latina. La educación de adultos en América Latina ante el próximo siglo.* Santiago: UNESCO / UNICEF.
Schneider, S. M., y Fonseca, M. C. F. R. (2013). Esse é o meu lugar… Esse não é o meu lugar: inclusão e exclusão de jovens e de adultos na escola. *Educação e Sociedade*, *34*(122), 227-244. https://doi.org/10.1590/S0101-73302013000100013
UNESCO (1997). *CONFITEA: Declaracão de Hamburgo; agenda para o futuro* Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001297/129773porb.pdf
Villas - Boas, S., Oliveira, A., Ramos, N., y Monteira, I. (2016). Educação Intergeracional no quadro da educação ao longo da vida: Desafios Intergeracionais, Sociais e Pedagógicos. *Revista Investigar em Educação*, II Série, 5, 117-141. Disponible en: http://pages.ie.uminho.pt/inved/index.php/ie/article/view/114.

Autores

Carla Cristina Pompeu. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Brasil.
carla.pompeu@uftm.edu.br

Inés M. Gómez - Chacón. Universidad Complutense de Madrid. España. igomezchacon@mat.ucm.es

Patricia Perry, Leonor Camargo, Carmen Samper

PUNTOS MEDIOS EN TRIÁNGULO: UN CASO DE CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO PERSONAL Y MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Mid-points in a triangle: An example of personal meaning making and semiotic mediation

Pero... sugerirle a tu estudiante de séptimo grado que
para justificar un hecho geométrico utilice un enunciado
que acaba de formular, es prácticamente resolverle la tarea.
¿No te parece?

Anónimo

RESUMEN

Presentamos un estudio de investigación interpretativa en el que a través de una entrevista no estructurada se rastrea la construcción de significado personal de un hecho geométrico por parte de un estudiante de grado séptimo; el proceso fue mediado semióticamente por la entrevistadora. El análisis, presentado a manera de viñetas, se hace desde una perspectiva semiótica basada en la teoría del signo triádico de Peirce. Se evidencia que la introducción a una actividad de índole científica puede beneficiarse notablemente de la mediación semiótica de un experto, en particular, para que el estudiante aclare, relacione y exprese sus ideas.

PALABRAS CLAVE:

- *Construcción de significado personal*
- *Mediación semiótica*
- *Objeto dinámico hacia objeto inmediato pretendido*
- *Geometría escolar*
- *Actividad de índole científica*

ABSTRACT

An interpretive research study is presented. Through a non-structured interview, semiotically mediated by the interviewer, we track the personal meaning making process that a 7th grade student carries out with respect to a specific geometric fact. The analysis, presented through vignettes, is done from a semiotic perspective, based on Peirce's triadic sign theory. We evidence that when introducing a student to activity of scientific nature an expert's semiotic mediation can notably benefit the student, particularly, to clarify, relate and express his ideas.

KEYWORDS:

- *Personal meaning making*
- *Semiotic mediation*
- *Dynamic object towards intended immediate object*
- *School geometry*
- *Activity of scientific nature*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 309 - 332.
Recepción: Agosto 28, 2017 / Aceptación: Agosto 1, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2233

RESUMO

Um estudo de pesquisa interpretativo é apresentado, em que através de uma entrevista a construção de um significado geométrico feito por um aluno da sétima série é traçado; o processo foi semioticamente mediada pelo entrevistador. A análise é feita a partir de uma perspectiva semiótica baseada na teoria de signo triádico de Peirce. Como resultado, a complexidade dos processos analisados na visão, mas também a possibilidade de dirigir esta complexidade. É evidente que a introdução a uma atividade de natureza científica pode se beneficiar significativamente da mediação semiótica de um especialista, em particular, para o aluno esclarecer, relacionar e expressar suas idéias.

PALAVRAS CHAVE:

- *Construção de sentido*
- *Mediação semiótica*
- *Objeto dinâmico converge para objeto imediato pretendido*
- *Geometria escolar*
- *Actividade de natureza científica*

RÉSUMÉ

Celle-ci est une étude de recherche interprétative qui suit la trace de la construction du sens d'un fait géométrique, à travers d'une interview non structuré à un étudiant de septième année. Le processus a été médiatisé sémiotiquement par l'intervieweur. L'analyse a été réalisée dans une perspective fondée sur la théorie du signe triadique de Peirce. Il est évident que l'introduction à une activité de nature scientifique peut bénéficier de manière significative de la médiation sémiotique d'un expert, en particulier, de sorte que l'étudiant clarifie, raconte et exprime ses idées.

MOTS CLÉS:

- *Construction de sens*
- *Médiation sémiotique*
- *Objet dynamique vers objet immédiat prétendu*
- *Géométrie à l'école*
- *Activité à caractère scientifique*

1. Introducción

Desde hace por lo menos dos décadas, investigadores en educación matemática y profesionales encargados de proponer políticas educativas en Colombia vienen promoviendo la idea de introducir a los estudiantes desde temprana edad en actividad científica y actividad demostrativa. Esta idea, a la cual la comunidad de profesores debe responder no sólo con propuestas sino con la respectiva implementación en el aula, ha tenido poca acogida. Desde la perspectiva de los profesores, la explicación puede estar centrada en la natural inmadurez de los estudiantes para participar en actividades de índole científica o demostrativa.

Durante 2015 y 2016, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) llevó a cabo el proyecto Geometría: vía al razonamiento científico, con el propósito de determinar rasgos característicos de ambientes de aprendizaje mediados por artefactos para la geometría escolar que propicien el razonamiento científico. Entendemos éste como el proceso cognitivo y social mediante el cual se aborda un fenómeno o un hecho del campo de las ciencias (formales, naturales y sociales) con miras a entenderlo, explicarlo y hacerlo parte del propio bagaje teórico. De dicho proceso destacamos tres acciones que conectan bien con la actividad demostrativa en geometría: la producción, a partir de evidencia obtenida por exploración empírica, de un enunciado relativo al fenómeno o hecho abordado en el que se explicita una relación causal o de dependencia; la explicación argumentada del asunto que plantea el enunciado; y la obtención de inferencias que van más allá de la experiencia directa. Para aportar al mencionado propósito realizamos una investigación cuyo escenario lo constituyeron las clases de geometría de séptimo grado en un colegio de Cajicá (Colombia), en las que se implementó, apoyado en el uso de un *software* de geometría dinámica, un currículo diseñado por las autoras de este artículo para propiciar razonamiento científico.

En este artículo documentamos y analizamos el trabajo de Andrew, un niño de 12 años, cuando en la última sesión de clase del proyecto y valiéndose de GeoGebra, aborda dos tareas en presencia de una profesora-investigadora que interactúa con él durante la sesión mientras construye significado de un hecho geométrico. Así, pretendemos presentar evidencia de la posibilidad real de involucrar a los estudiantes de educación secundaria en actividad científica.

Para realizar el análisis, recurrimos a un modelo de interpretación y conceptualización propuesto por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basado en la teoría del signo triádico de Peirce. Hemos usado esta herramienta analítica anteriormente (Camargo, Perry, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2015; Molina, Perry, Camargo y Samper, 2015; Perry, Camargo, Samper, Molina y Sáenz-Ludlow, 2016; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina, 2016). Debido a ello, reconocemos su utilidad para interpretar, profundizar en y detallar el proceso de aprendizaje de las matemáticas en términos de la construcción de significado, y también para interpretar las acciones del profesor cuando propicia esa construcción. Los artículos mencionados abordan la comunicación entre el profesor de un curso de geometría plana y sus estudiantes, quienes se preparan para ser profesores de matemáticas. Se enfocan en la comunicación en la que se hace construcción conjunta de significado sobre distintos aspectos de la actividad demostrativa, condición esta que no permite dar cuenta y razón del proceso de participantes individuales.

A diferencia de los análisis presentados en tales artículos, aquí abordamos la comunicación entre un estudiante de nivel escolar y una profesora - investigadora (PI, de ahora en adelante). Gracias a la presencia de PI durante la resolución de dos tareas por parte de Andrew, con los propósitos de mediar semióticamente en caso de considerarlo necesario y de obtener información para profundizar en las interpretaciones del estudiante, pudimos seguirle el rastro a la construcción de significado realizada por Andrew sin las restricciones que teníamos al seguimiento individual en las investigaciones previas. Al analizar el protocolo de la interacción de Andrew y PI, identificamos elementos que nos permiten mostrar en detalle la construcción de significado de un hecho geométrico, la mediación semiótica realizada y el razonamiento científico desplegado por Andrew.

2. Perspectiva semiótica

El significado, construido en interacción comunicativa, es una necesidad primordial para el aprendizaje porque es la fuerza conductora básica de toda actividad intelectual (Sfard, 2001). En la educación matemática, para autores como Godino y Llinares (2000), Radford (2000), Contreras y García (2011) la construcción de significado es la búsqueda de compatibilidad entre las ideas que tiene y comunica un individuo (significado personal) y las de la comunidad cultural de referencia (significado institucional). A partir de este planteamiento desarrollamos, enseguida, nuestra postura al respecto.

En la comunicación verbal (oral o escrita) no hay un paso directo de las ideas emitidas a través de signos a los mensajes recibidos a través de otros signos, ni de aquéllos al mensaje que se emite en respuesta. Toda comunicación, con otros o con uno mismo, pasa por la interpretación de quienes participan en la misma, y es ahí donde cada quien construye y refina sus significados personales como resultado del uso y la producción de signos; "los significados que se pretende que los signos acarreen son construidos, de manera conjunta, por emisor y receptor a través de sus propios procesos de interpretación" (Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016, p. 2), en una cadena de actividad semiótica. Por tanto, el significado no reside en los signos, es una construcción que depende de la mente que los interpreta, y el aprendiz no es un receptor pasivo sino un constructor autónomo de significado.

Haciendo eco a Sfard (2001), vemos implicaciones del planteamiento anterior: en la comunicación siempre hay construcción de significado, aunque no sea el esperado; la enseñanza debe considerar seriamente la necesidad que el aprendiz tiene de dar significado, pero no pretender protegerlo de la molesta experiencia de una significación insuficiente, ya que las matemáticas aprendidas sin esfuerzo sólo pueden ser triviales y carentes de inspiración; no es razonable creer en la posibilidad de un aprendizaje uniformemente significativo en todo momento, especialmente en matemáticas. Aceptar que el significado depende de la actividad del sujeto con el objeto, y ésta depende de la interpretación que el sujeto da al objeto puede verse como la fuerza conductora detrás del crecimiento incesante del conocimiento; "la comprensión de un concepto y la habilidad para aplicarlo son como dos piernas que hacen posible moverse hacia adelante gracias al hecho de que nunca están exactamente en el mismo lugar" (p. 109).

Esas implicaciones nos sugieren que para rastrear el proceso de construcción de significado en el aula es pertinente una perspectiva semiótica; en particular, una que destaque el papel de la interpretación de quienes participan en la comunicación. Así, recurrimos a la perspectiva que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basándose en la teoría del signo triádico de Charles Sanders Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean y usan "signos".

El "signo" de Peirce, denotado como SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger, refiere a la integración inseparable de tres relaciones diádicas en la que se articulan un objeto, una representación y una interpretación. El diagrama de la Figura 1 ilustra la estructura general del SIGNO como un todo.

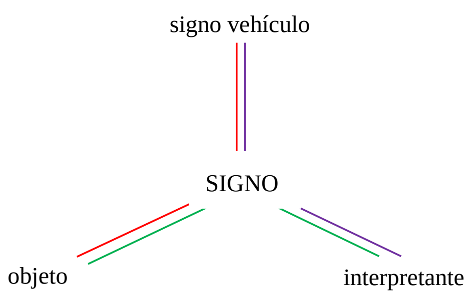


Figura 1. Diagrama de la estructura general del SIGNO

Interpretemos la articulación mencionada:

- La comunicación con otros o con uno mismo se enfoca en un *objeto*. Por ejemplo, en una clase se pretende establecer como válido el teorema (al que llamamos "Puntos medios en triángulo") según el cual: si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado; éste sería el *objeto de la comunicación*.
- El *objeto* de interés se representa en un *signo vehículo* (*e.g.*, gesto, palabra, oración, gráfico, notación, imagen interior) con el que se explicita lo que se quiere comunicar. Por ejemplo, el dibujo de un triángulo de vértices A, B y C, y del segmento de extremos D y E con D punto medio del segmento de extremos A y B, y E punto medio del segmento de extremos A y C, es un signo vehículo con el que el profesor puede representar los elementos geométricos implicados en el teorema que se quiere validar; también lo es la descripción textual del dibujo hecha aquí.

– Lo que el signo vehículo produce en la mente de quien lo percibe e interpreta es un *interpretante*. Por ejemplo, un estudiante dice: "Una relación sería que ambos son segmentos". Esta expresión discursiva, que a su vez es un *signo vehículo*, permite entrever, como posible *interpretante,* que el estudiante establece una asociación entre dos de los elementos de la figura: la de pertenecer a la misma clase, la de los segmentos.[1]

El modelo de interpretación y conceptualización de Sáenz-Ludlow y Zellweger incluye la mirada en profundidad que hace Peirce al objeto del SIGNO para destacar la complejidad de la comunicación. Tal mirada se enfoca en los aspectos del objeto acarreados en el signo vehículo, y en las características del objeto que construye quien interpreta el signo vehículo. Peirce hace referencia a tres objetos: el objeto real, el objeto dinámico y el objeto inmediato. El *Objeto Real* es una construcción social, cultural e histórica, asumida por una comunidad de discurso[2] dentro de la cual tiene lugar la comunicación; en nuestro caso, se trata del *Objeto Real Matemático* (*ORM*) que, siguiendo con el ejemplo, es el teorema "Puntos medios en triángulo". El *objeto inmediato* es un aspecto específico del Objeto Real, codificado y expresado en un signo vehículo. En nuestro ejemplo, en el signo vehículo "Una relación sería que ambos son segmentos" se expresa de manera más o menos explícita como objeto inmediato una relación entre un lado del triángulo y el segmento de extremos los puntos medios de los otros lados del triángulo. El *objeto dinámico* (*od*) es una interpretación particular del Objeto Real, generada en la mente del intérprete a partir de un signo vehículo. Esta interpretación generalmente dista de la pretendida. En el ejemplo, la interpretación del estudiante se enfoca en los segmentos y no en sus longitudes.

El aporte distintivo de Peirce a la tradicional noción de signo está en la decidida inclusión de la mente que interpreta. Esta inclusión destaca lo que señalamos en los párrafos iniciales: la comunicación no es un proceso in-mediato que permita pasar directamente un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente "objetivos" y asociados a aquellos objetos en los que se enfocan los signos vehículos que median; es imprescindible un proceso mediado e indirecto en el que la construcción de interpretantes de las personas involucradas desempeña un papel preponderante.

1 En el análisis ampliamos este ejemplo, pues hace parte del seguimiento a la construcción de significado. Acá lo mencionamos sólo con fines ilustrativos.

2 Los diferentes tipos de comunicación que agrupan a los individuos se denominan *discursos*. La membresía a una comunidad de discurso se gana participando en actividades de comunicación en colectivos que practiquen este discurso (Sfard, 2008, p. 91).

3. Construcción de significado personal en el aula y mediación semiótica del profesor

Desde la perspectiva planteada, entendemos que la *construcción de significado personal* de un objeto matemático, en el aula, es el proceso de interpretación personal a través del cual el individuo, en interacción con un experto, con sus pares y consigo mismo, va construyendo objetos dinámicos que pueden ser más o menos consistentes con los objetos inmediatos pretendidos, y que se pueden inferir a través de los signos vehículo del individuo. Así, el significado de cada SIGNO se localiza en dos mundos: el de los *significados pretendidos* y el de los *significados interpretados* (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012).

Los significados pretendidos (por el profesor de matemáticas) tienen como referencia el *significado objetivo o institucional* de algún *ORM*. El *significado interpretado, subjetivo o personal* que da un estudiante a un *ORM* es la integración de significados parciales y provisionales que se constituyen en el aula de clase, con la mediación semiótica del profesor. Cuando el estudiante interpreta un signo vehículo para dar sentido a lo que su proferente expresa, pone en juego su subjetividad al ir construyendo su propio significado del *ORM*, y genera un objeto dinámico. Por ejemplo, cuando interpreta una representación enfocándose en dos figuras geométricas (segmentos) y no en sus longitudes, como pretende el profesor. Este significado provisional se debería ir transformando en el curso de un proceso semiótico con otras personas y podría no terminar en la medida que el sujeto siga trabajando al respecto.

El profesor, en cuanto representante de la comunidad del discurso matemático, desempeña un papel especial en la construcción de significado. Llamamos *mediación semiótica del profesor* a sus acciones interpretativas y deliberadas que realiza con el propósito de que se logre la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia los objetos inmediatos pretendidos.

4. Aspectos metodológicos

La recolección de datos para el análisis tuvo lugar en el aula, en la última sesión de clase del proyecto, cuando se trabajaron, en pequeños grupos, dos tareas. PI tuvo una interacción cara a cara con Andrew, a través de una entrevista no estructurada. Andrew participa con regularidad en la clase, está dispuesto a interactuar con sus compañeros y a explicarles cuando ve la necesidad de hacerlo. Las condiciones de espacio y tiempo en las que tuvo lugar el trabajo de Andrew fueron las mismas que las de sus compañeros.

En la entrevista, el involucramiento de PI fue más allá de formular preguntas que tuvieran en cuenta los aportes de Andrew, pues la información que pretendíamos recoger no era la opinión del entrevistado sobre un asunto, formada previamente; era, en cambio, información sobre procesos en curso durante la entrevista: el proceso de construcción de significado mediado semióticamente por PI y las acciones asociadas a un razonamiento científico sugerido o guiado por PI. Las preguntas y los comentarios de PI a Andrew no siguieron un libreto; sin embargo, PI sí tenía en mente algunas ideas para guiar la mediación semiótica. También hubo momentos de observación no participante en los que PI observó las acciones de Andrew sin intervenir durante su realización y de ese modo permitirle expresar de manera completa sus ideas.

El intercambio comunicativo se registró en audio y video. Antes de esta entrevista, Andrew había tenido experiencias similares en las anteriores sesiones de clase que hicieron parte del proyecto; por esta razón, es factible pensar que la interacción con PI, la cámara y la grabadora de audio no fueron elementos perturbadores para su desempeño.

La información recogida durante 45 minutos se transcribió a partir de la grabación de audio y se complementó con la de video. Así, obtuvimos un escrito de la interacción comunicativa que incluye intercambios verbales y un recuento de acciones no verbales (*e.g.*, acciones en GeoGebra, momentos de silencio del emisor durante sus intervenciones)[3].

Una vez depurada la transcripción, hicimos recuentos de la interacción para tener una visión holística de la resolución de cada tarea. Posteriormente hicimos una lectura analítica para identificar los signos vehículos de Andrew que usaríamos para inferir objetos dinámicos de interés en la construcción de significado de un hecho geométrico. El signo vehículo que analizamos no siempre proviene de una sola intervención; a veces es la reunión de dos o más intervenciones de una misma persona para así presentar de mejor manera la idea expuesta.

El análisis tiene como referente el *ORM* subyacente en cada tarea. Está conformado por nuestra interpretación de los signos vehículos identificados en las transcripciones y por nuestras inferencias respecto a los objetos dinámicos de Andrew para rastrear la construcción de significado. Además, el análisis procuró vincular la construcción de significado con los actos de mediación externa. Por

[3] Los símbolos usados en la transcripción son: ( ) para incluir descripción de acciones o detalles del contexto; (…), (… …) o (… … …) para indicar silencio más o menos largo en la verbalización; "palabra"… para indicar un pare en lo que se estaba diciendo; [numeral] para indicar el puesto de la verbalización de la que fue tomada o parafraseada la cita; [ ] para incluir comentario que ayude a la claridad de la verbalización.

tal razón, optamos por presentarlo mediante viñetas que consideran la cronología del desarrollo de las actividades, la tarea en la que se involucra el estudiante, el intercambio comunicativo entre Andrew y PI y nuestras inferencias (Gavilán, García y Llinares, 2007).

Las dos tareas asignadas fueron:

1. Con GeoGebra
    a) Representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{AB}$ y E punto medio del $\overline{AC}$. Construye el $\overline{DE}$.
    b) Busca una relación especial entre DE[4] y BC. Describe cómo la encontraste. Escribe cuál es la relación que existe.
2. ¿Existe un punto F en $\overline{BC}$ tal que el perímetro del ΔDEF sea la mitad del perímetro del ΔABC? Justifica tu respuesta.

Para responder la pregunta, recuerda la siguiente definición:

> El perímetro de un triángulo es la suma de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo.

La primera tarea posibilita llegar a enunciar el hecho geométrico, *Puntos medios en triángulo*, que se aceptará como resultado de una exploración empírica con geometría dinámica, pero sin una justificación teórica, porque no se cuenta con el contenido geométrico necesario. La segunda tarea posibilita generar una conjetura y justificarla deductivamente usando el hecho geométrico descubierto anteriormente. La resolución de las dos tareas ofrece la posibilidad de vivir una experiencia de razonamiento científico enfocada principalmente en dos aspectos: *(i)* la enunciación del hecho geométrico descubierto, y *(ii)* su uso en la justificación de la conjetura que resuelve la segunda tarea.

Los estudiantes resolvieron la primera tarea. Después, la profesora hizo en público, con la participación de algunos de ellos, una revisión de lo que consideraba relevante; en particular, institucionalizó el enunciado del hecho geométrico descubierto:

> *HG Puntos medios en triángulo*: Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados del triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Enseguida los estudiantes abordaron la segunda tarea. La profesora revisó las producciones en la siguiente sesión de clase.

[4] DE simboliza la medida de longitud de $\overline{DE}$.

5. Construcción de significado y mediación semiótica del hecho geométrico

En dos viñetas, cada una relativa a la realización de una tarea, presentamos, sin detalles, un recuento de la interacción entre Andrew y PI, y exponemos el análisis hecho para rastrear la construcción de significado que Andrew llevó a cabo y dar detalles de la mediación semiótica que realizó PI.

Viñeta 1

5.1. *Recuento de la interacción entre Andrew y PI*

Habiendo representado la situación en la tableta, Andrew propone una relación; PI le dice que él está confundiendo dos notaciones y le indica la diferencia entre éstas. Tras dicha aclaración, Andrew propone otra relación que, aunque responde acertadamente la pregunta hecha en la tarea, desde la perspectiva del estudiante no es relativa a cualquier triángulo. Enseguida, la interacción entre Andrew y PI lo lleva a realizar una exploración empírica conducente a ver que la segunda relación encontrada no se cumple sólo para el primer caso considerado. Con el propósito de mediar semióticamente la producción del enunciado del hecho geométrico descubierto se da una interacción entre PI y Andrew en la que éste logra hacer un recuento, expresado en términos generales, de las acciones geométricas realizadas y la relación encontrada.

5.2. *Descubrimiento y enunciación del hecho geométrico*

El *OR* geométrico implícito en la primera tarea es el hecho *Puntos medios en triángulo*. Se pretende que el estudiante construya discursivamente dos aspectos de aquél: *(i)* la relación entre las medidas de longitud de un lado de un triángulo y del segmento cuyos extremos son los puntos medios de los otros dos lados; *(ii)* el enunciado condicional general que establece el hecho descubierto.

El signo vehículo, “Una relación sería que ambos son segmentos”, que profiere Andrew como primera respuesta, es índice de que se ha enfocado en segmentos. Inferimos que, para Andrew, el término “relación” le significa asociación o conexión entre dos objetos, y que las dos notaciones $\overline{ED}$ y *ED* refieren indistintamente al mismo objeto (*i.e.*, el segmento *ED*); así lo corrobora su lectura del enunciado en voz alta: “punto medio del *AB*” y “relación especial entre *DE* y *BC*”. En el proceso de construcción de significado tenemos el primer objeto dinámico de

Andrew: *una conexión o asociación entre dos de los elementos de la figura que tiene en la pantalla es la de pertenecer a la misma clase, la de los segmentos* (od_1). Este objeto dinámico es poco consistente con el objeto inmediato pretendido cuyo foco es una relación entre las medidas de dos segmentos. Evidenciamos que la construcción del objeto pretendido con la mediación de la tarea le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente tanto el término "relación", como las notaciones geométricas para un segmento y la medida de su longitud.

Para mediar semióticamente el paso de od_1 a uno más consistente con el objeto inmediato pretendido, PI destaca explícitamente la diferencia entre las dos notaciones y precisa cómo se lee cada una de ellas; respecto a la notación *ED*, menciona dos maneras de leerla: *(i)* distancia entre los puntos *E* y *D*, y *(ii)* medida de la longitud del segmento *ED*. Posteriormente, se cerciora de que Andrew lea correctamente la notación *BC* de las dos maneras.

El signo vehículo de Andrew, "Tomar las medidas [de $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$]", proferido como plan para abordar la tarea, permite inferir que, de la explicación dada por PI, él advierte que su respuesta no es correcta, y que dar una respuesta pertinente requiere tener las medidas de los segmentos *DE* y *BC*.

El par de medidas obtenidas con GeoGebra —2.76 para $\overline{DE}$ y 5.52 para $\overline{BC}$— entendido por Andrew como un signo vehículo que materializa la relación que está buscando, parece evocar en él una comparación[5] multiplicativa entre los números que le permite expresar uno como la mitad del otro. Así, Andrew produce el signo vehículo: "[La relación es que] *DE* es la mitad de *BC*". A partir de éste, inferimos el segundo objeto dinámico de Andrew: *la asociación o conexión entre las medidas de longitud de los segmentos DE y BC*, de la figura construida, es la *relación "ser la mitad de"* (od_2).

Este objeto dinámico está en relativa consonancia con el objeto inmediato pretendido; sin embargo, debe evolucionar para trascender la especificidad: sólo concierne al triángulo que tiene en la pantalla. Inferimos esto ya que las únicas acciones visibles que precedieron a la determinación de la relación fueron la toma de medidas de interés en el triángulo construido y la observación de ellas; queda corroborado con la respuesta de Andrew en el siguiente intercambio verbal:

> PI: Ok. ¿Será que lo que acabas de encontrar se cumple en este triángulo específico o… será que eso es una propiedad de cualquier triángulo?
>
> Andrew: Eeee… Se cumple en este triángulo específico.

[5] La inferencia sobre la comparación se valida más adelante cuando para explicar cómo determinó la relación, Andrew dice haber visto que: "al multiplicar éste dos veces, me da éste".

La falta de alineación entre od_2 y el objeto inmediato pretendido en lo que respecta a la especificidad *versus* la genericidad y la generalidad deseables puede explicarse como una diferencia en el significado atribuido a la petición "Representa cualquier triángulo [...] busca una relación especial entre *DE* y *BC*". Tal signo vehículo parece evocar en Andrew la instrucción de representar *un* triángulo arbitrario, pero no genérico. Así, una vez representado un triángulo arbitrario, éste queda bien determinado y, por tanto, la petición de buscar la relación especial refiere sólo a las dos medidas particulares, situación coherente con una de las características del primer nivel de razonamiento del modelo propuesto por los esposos van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1995). Por el contrario, en el enunciado de la tarea, la expresión "cualquier triángulo" pretende sugerir un triángulo arbitrario y genérico, y la relación "especial entre *DE* y *BC*" refiere a una relación característica, compartida por todos los triángulos. Se evidencia entonces que la construcción del objeto pretendido con la mediación de la tarea también le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente el término "cualquiera".

Procurando mediar semióticamente el paso de od_2 a uno más consistente con el objeto inmediato pretendido, PI promueve una exploración empírica para verificar si la relación se cumple en otros triángulos. Al preguntarle a Andrew qué hacer para decidir si la relación se cumple para otros triángulos, él responde que tendría que hacer más triángulos. PI le sugiere entonces usar el arrastre. Así que, partiendo del triángulo construido (Figura 2), Andrew arrastra continuamente el vértice *C* hasta tener el triángulo que se muestra en la Figura 3.

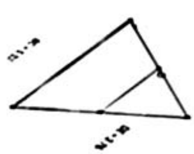


Figura 2

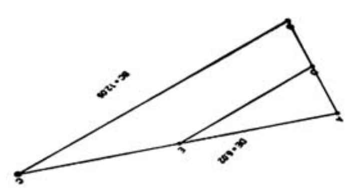


Figura 3

Dos casos de la situación

Con el signo vehículo "¿Este es un triángulo distinto al que acabas de hacer?", PI constata que Andrew nota que el triángulo obtenido es diferente al que se tenía al inicio. Luego, ella promueve un intercambio centrado en determinar para cada triángulo de los cinco obtenidos por arrastre si se cumple la misma relación entre *DE* y *BC* detectada en el triángulo inicial. Para responder, Andrew examina si, en cada caso, una de las medidas es el doble de la otra. En el primer triángulo examinado, las medidas son 12.05 y 6.02, y la respuesta de Andrew es negativa.

A la pregunta de PI: "¿Por qué no?", responde: "Por lo que aquí no debería ser un cinco sino un cuatro. […] Porque el doble de seis punto cero dos es doce punto cuatro" [*sic*]. PI comenta que es "un asunto de precisión debido a la cantidad de cifras decimales de las medidas" y le sugiere a Andrew que siga explorando. Él arrastra el vértice *B* de manera continua y llega a un triángulo en el que las medidas de interés son 4.01 y 8.01. Andrew afirma que en ese caso "tampoco" se cumple la relación. PI es un poco más explícita en su explicación del resultado obtenido: "No se cumpliría. ¿Por qué? Por una diferencia en las centésimas y lo que pasa es que el problema no es en la propiedad del triángulo sino en la precisión que te da el programa en casos específicos. Si ajustáramos ese asunto en GeoGebra, estoy segura de que si aquí dijera cuatro punto cero uno, aquí sería ocho punto cero dos. Es cuestión de ajuste en el programa". En los siguientes tres casos examinados, las medidas de interés son: 6.84 y 13.68, 2.58 y 5.16, y 6 y 12, situaciones en las que Andrew dice que la relación se cumple. Finalizada la experimentación, se da el siguiente intercambio verbal:

PI: (Tapando la pantalla con las manos) En este momento ¿cómo escribirías esa propiedad que encontraste? (… …) Teniendo en cuenta que tú tomaste varios, varios triángulos.
Andrew: (Escribe) La relación que existe es que la medida *DE* es la mitad de *BC* (…)
PI: ¿Estabas pensando en escribir algo más?
Andrew: Y que *BC* es el doble de *DE*.
PI: ¿Eso es otra forma de decir lo mismo o es una idea diferente?
Andrew: Lo mismo.

El signo vehículo de Andrew, "La relación que existe es que la medida *DE* es la mitad de *BC* y que *BC* es el doble de *DE*", coincide con el que dio lugar a od_2. No obstante, las circunstancias en las cuales surge tal signo (*i.e.*, exploración de varios triángulos, solicitud de escribir la propiedad teniendo en cuenta los varios triángulos explorados, escritura de ésta sin estar viendo el triángulo de la pantalla) nos permiten inferir un tercer objeto dinámico de Andrew en el que, en cierta medida, probablemente no del todo, está superada la particularidad de la relación descubierta en el triángulo construido inicialmente. Así, tenemos el tercer objeto dinámico: *la asociación o conexión entre las medidas de longitud de los segmentos DE y BC de un triángulo que representa a algunos de los triángulos explorados es la relación "ser la mitad de"* (od_3).

Para impulsar la evolución de od_3, PI involucra al estudiante en un ejercicio de relatar lo hecho y lo descubierto sin recurrir al uso de letras para especificar el triángulo y los elementos implicados en el hallazgo. Separamos en cuatro fragmentos la interacción ocurrida entre ellos durante el desarrollo del ejercicio.

PI: Ahora, imagina que la profesora que estuvo la semana pasada, Leonor, se encuentra contigo a la salida de esta clase y te pide que le cuentes qué descubriste en esta clase; no tienes la tableta a mano, ni papel. ¿Qué le contarías?

Andrew: Que lo que descubrimos fue la relación entre… las medidas de un triángulo, entre las medidas de… ¿qué? de… un segmento, ¿no?

PI: Sí, la medida de un segmento.

Andrew: Un segmento que es *DE* y otro segmento que es *BC*… La relación es que… *DE* es la mitad de *BC*.

PI: Ya. ¿Tú crees que con esa información así, Leonor podría imaginarse exactamente lo que es? (…) ¿O te faltaría precisarle un poquito más?

Andrew: Me faltaría precisar más.

El signo vehículo con el que PI formula el ejercicio presenta dos claves para la mediación semiótica que pretende llevar a cabo. Una de ellas es el destinatario del recuento. Es una persona que no estuvo presente en la clase y, por tanto, se requiere darle más información que la mera relación encontrada, si se quiere favorecer una comunicación exitosa. Además, como es una persona con un conocimiento suficiente del tema no se requiere entrar en explicaciones de detalles, situación que podría diferir si el destinatario fuera un estudiante de otro curso. La otra clave está constituida por la condición de no basar el relato en una representación específica, lo cual exige pasar de lo específico a lo genérico y general.

La respuesta de Andrew permite inferir que ha interpretado las dos claves de manera pertinente, aunque todavía no pueda expresar en su relato lo que ellas ponen en juego. Con su respuesta "[descubrimos] la relación entre… las medidas de un triángulo, entre las medidas de un segmento y […]" contextualiza en un triángulo el resultado descubierto. El inicio del alejamiento de lo específico consiste en el intento por referirse a los objetos involucrados en la relación mediante su descripción y no mediante su designación.

Andrew acepta que a su recuento le falta precisión. PI lo invita a que trate de nuevo, insistiéndole en que "como no están mirando una figura específica te va a tocar encontrar una manera distinta de decirlo". Andrew manifiesta explícitamente que no sabe cómo proceder. El signo vehículo de PI, "Se tomó un triángulo", le sugiere a Andrew hacer el recuento del proceso de construcción. Se da entonces el siguiente diálogo entre ellos (el texto en gris corresponde a las intervenciones de PI y el texto en negro, a las del estudiante):

> Se tomó un triángulo Se tomó un triángulo y se buscó la ¿Se tomó un triángulo cualquiera o uno especial? Un triángulo… ABC No hablemos del triángulo ABC. Se tomó un triángulo cualquiera, no tenía condiciones especiales ¿o sí? Un triángulo cualquiera… ¿y? Se buscó la relación… se ubicaron los puntos medios Ajá. Se ubicaron los puntos medios… de dos de

> los lados de dos de los lados. Y luego se unieron, se hizo un segmento Se construyó el segmento de extremos esos puntos medios esos puntos medios y luego se buscó… eee, las… ay, se me olvidó la palabra ¿La relación? la relación entre ese segmento y el segmento… uno de los segmentos. ¿Uno de los segmentos o uno de los lados? Uno de los lados. ¿Cualquiera de los lados? No. ¿Cuál? El de abajo… Pero ¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces? Sí, puede estar de lado. Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque… El lado *BC*. (…) Pero si no has dicho nada de letras…

Al examinar el diálogo se reconoce que PI interviene principalmente a partir de los aportes del estudiante y cuando éste parece requerir de la ayuda de su interlocutora. Así, ella completa información dada por Andrew (*e.g.*, los puntos medios “de dos de los lados”, se buscó “la relación”), parafrasea a Andrew pretendiendo expresar su idea en términos más apropiados (*e.g.*, “se construyó el segmento de extremos esos puntos medios” para remplazar a “se unieron [los puntos medios], se hizo un segmento”), hace preguntas para que el estudiante precise la información haciendo el cambio pertinente (*e.g.*, “¿uno de los segmentos o uno de los lados?”, “¿cualquiera de los lados?”, “¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces?”), pone objeciones invitando a Andrew a modificar lo que ha dicho (*e.g.*, “Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque…”, “Pero si no has dicho nada de letras”). Respecto a Andrew, es posible reconocer que pudo sostener el diálogo con PI y, algo muy importante, hacer buena parte de su relato sin recurrir a la designación. Aún le falta poder referirse al lado del triángulo implicado en la relación descubierta sin designarlo.

El signo vehículo, “En vez de decir el lado *BC* podemos decir el lado opuesto al segmento que hicimos de… los puntos medios”, con que Andrew pretende no recurrir a letras, que fue mediado por la representación que tiene en la pantalla, nos lleva a inferir que el estudiante ha comenzado a ver que la descripción es una manera de referirse a un objeto, diferente a la designación; este avance será fundamental para la evolución de od_3.

Con su signo vehículo, “De nuevo, ¿cómo podrías enunciar eso que descubriste?”, PI procura consolidar el avance de Andrew relativo al enunciado del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. En el cuarto fragmento de la interacción se da el siguiente diálogo entre ellos.

> Partimos ¿de qué? Partimos desde un triángulo Partimos de un triángulo cualquiera cualquiera, luego… buscamos los puntos medios… de dos de los lados… luego, eee... construimos el segmento de los puntos medios, después de haber hecho eso eee… utilizamos… ¿Qué encontraste? Una relación… entre el lado opuesto al segmento de los puntos medios o… tercer lado. ¿Cuál es esa relación? La relación era que el segmento de los puntos medios era la mitad de… del tercer lado, y también que el doble del segmento de los puntos medios era… la medida del tercer lado.

Al examinar el diálogo anterior se pueden distinguir claramente los papeles que cada quien desempeña. PI estructura la conversación, es decir, determina de qué se habla y en qué orden, lo cual aporta un formato a la conversación (de dónde se parte–qué se encuentra). Por su parte, Andrew llena de contenido ese formato. En este paso de la construcción discursiva del objeto de interés se puede ver que el estudiante ha incorporado a su discurso casi todas las precisiones hechas por PI en sus intercambios anteriores y, sobre todo, que expresa su hallazgo sin recurrir a la especificación. De este análisis inferimos como objeto dinámico de Andrew: *la conexión o asociación entre las medidas de longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado del triángulo es la relación "ser la mitad de"* (od_4).

La estructuración del recuento en un cierto formato puede interpretarse como el primer paso de un proceso cuya meta es la expresión del hecho geométrico descubierto como una proposición condicional en la que se exprese claramente la relación de dependencia. Así, el objeto dinámico de Andrew tiene todavía camino que recorrer. En la experiencia relatada llegamos hasta od_4.

Viñeta 2

5.3. *Recuento de la interacción entre Andrew y PI*

La segunda tarea pregunta si existe un punto en el tercer lado del triángulo tal que el perímetro del triángulo cuyos vértices son los dos puntos ya determinados y el punto propuesto sea la mitad del perímetro del triángulo original, y pide justificar la respuesta. Andrew conoce la definición de perímetro de un triángulo dada en el enunciado. Luego de leer el enunciado de la tarea, Andrew enuncia una hipótesis y realiza un experimento en GeoGebra, por sugerencia de PI, que no lo lleva a obtener la relación numérica exacta para el caso considerado. Tras evaluar la hipótesis de Andrew como buena, PI le propone que justifique la relación entre los perímetros. La primera justificación de Andrew conecta la condición de que los vértices del triángulo pequeño son los puntos medios de los lados del triángulo grande con la posición del triángulo pequeño respecto al grande. Llegar a una justificación aceptable requirió volver a enunciar el hecho descubierto en la primera tarea y la sugerencia de usarlo para elaborar la justificación pedida.

5.4. *Uso del hecho geométrico como garantía para justificar la relación entre los perímetros*

Interpretar adecuadamente la pregunta de la segunda tarea requiere conectarla con la primera tarea para obtener como conjetura razonable una que enuncie algo como: "si los puntos medios de los lados de un triángulo son los vértices de otro triángulo, entonces el perímetro de…”. Dado que la principal intención didáctica de esta tarea no recae sobre la mencionada conjetura sino sobre su justificación teórica, esta última es el *ORM* que consideramos. El aspecto de este objeto cuya construcción de significado se pretende que el estudiante inicie es el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo en su calidad de garantía en la justificación de un hecho geométrico*.

La mediación de PI en el proceso de justificación se centra en nombrar y guiar ciertas acciones que hacen parte del metadiscurso relacionado con el razonamiento científico. El signo vehículo con el que PI inicia la mediación semiótica del significado que Andrew le está dando a la solicitud “Justifica tu respuesta” es el siguiente:

> Ahora tienes que explicar por qué el perímetro del triángulo *DEF* es la mitad del perímetro del triángulo *ABC* y para eso no vas a poder usar medidas, sino que debes basarte en hechos geométricos ya conocidos… específicamente, el hecho geométrico que acabas de descubrir. ¿Cómo puedes justificar la relación entre esos perímetros? (…) Decir algo como: “Ah, sí, tenía que ser así porque… (…) El perímetro del más pequeño tiene que ser la mitad del perímetro del triángulo más grande porque…”

La aclaración incluye varios elementos: en primer lugar, debe dar una razón y esta no puede basarse en algo empírico sino en algo teórico; en segundo lugar, se señala explícitamente cuál es el hecho geométrico que ha de usarse. Además, al proponer un tipo de frase como respuesta, se sugiere implícitamente la necesariedad (*i.e*., “tenía que ser así”, “tiene que ser”) de la conclusión que se pide justificar. Cabe anotar que con su manera de referirse a los triángulos en su última verbalización –descripción por el tamaño relativo– también sugiere que es aceptable usarla, sugerencia que Andrew acoge.

El signo vehículo de Andrew, “El triángulo pequeño está formado con los puntos medios. (…) Los tres puntos [vértices del ΔDEF] son puntos medios [de los lados del ΔABC] y… el triángulo… va a estar en la mitad… del grande. El pequeño está en la mitad del grande”, nos sugiere que podría estar gestando la idea de que describir con base en la representación de la pantalla puede servir para justificar. Inferimos entonces que el objeto dinámico es *una descripción, con base en una representación gráfica, en la que intervienen, por un lado, la relación entre los puntos medios del* ΔABC *y los que se constituyen posteriormente en vértices del* ΔDEF *y, por otro lado, la posición del triángulo generado respecto al triángulo inicial; probablemente, la segunda característica es consecuencia necesaria de la primera (“va a estar”)* (od_5). Este objeto dinámico tiene que evolucionar en tres sentidos: pasar de ser una descripción a ser un argumento deductivo; cambiar la garantía que sustenta la conclusión debe pasar de ser un hecho en el mundo empírico a uno del mundo teórico y, por ende, la conclusión necesaria tiene que ser la prevista en la garantía empleada y no una inventada.

La reacción de PI consiste en recordarle a Andrew que debe explicar por qué cuando los vértices son los puntos medios se da la mencionada relación entre los perímetros. Además de rechazar tácitamente la respuesta de Andrew, PI sugiere, por una parte, eliminar las medidas de la representación pues no las van a poder usar en la justificación y, por otra, no olvidar el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*.

En un esfuerzo por elaborar la justificación, Andrew inicia un intercambio con PI. Aceptando que la mediación de PI en ese intercambio se enfoca en animar a Andrew para que complete de manera clara el argumento cuya premisa es que se tienen los puntos medios de los lados del triángulo, podemos integrar en un sólo signo vehículo las intervenciones de Andrew:

> ¿Por qué? (… … …) Porque los puntos son puntos medios todos tres… [Pasa que] [p]ues es la mitad de la medida… del segmento. El *D* es punto medio de *BA*… entonces es la mitad… Y como es punto medio, esta debe ser la misma medida que acá (señala $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$).

Inferimos que Andrew está comenzando a gestar la idea de que justificar tiene que ver con obtener una conclusión particular a partir de una información particular que se tiene, con base en alguna regla general aceptada; es decir, al parecer está comenzando a vislumbrar el razonamiento deductivo como forma de justificar. Asociado a ello, inferimos como objeto dinámico *un argumento que conecta la condición de ser punto medio de un segmento con la condición necesaria* (i.e., *"debe ser"*) *de la igualdad de medidas a la que alude la definición de punto medio* (od_6). Aunque este objeto dinámico converge notoriamente al objeto inmediato pretendido por cuanto ha pasado de ser una descripción a ser un argumento, le falta evolucionar. El cambio que debe tener está relacionado con hacer un argumento cuya garantía teórica sea precisamente *Puntos medios en triángulo.*

PI no se detiene a considerar la respuesta de Andrew. Con su signo vehículo "Sí… sí, pero eso no es lo que descubrimos hoy" sugiere que hay algo aceptable en la respuesta del estudiante, pero dirige la conversación hacia el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. En un intercambio dialógico, no del todo fluido, vuelven a enunciar el mencionado hecho geométrico así:

> La relación que existe en el caso de un triángulo es que la medida de un segmento cuyos extremos son puntos medios de dos lados es la mitad del lado que se opone.

Inmediatamente después tiene lugar un intercambio verbal entre PI y Andrew:

> Eso fue lo que descubriste. Úsalo acá (señala la representación que se tiene en la pantalla), eso te ayuda a justificar lo que queremos justificar. ¡Aaaah! (indicando que ha advertido algo). Al tomar la medida de esto (con el índice recorre el segmento *DF*) Síii, esto es el segmento… *DF*, se tiene la mitad de uno de los lados que sería… *AC*. Muy bien. ¿Qué más? Lo mismo, *EF* sería la mitad de uno de los lados… *AB* La medida *EF* es la mitad de *AB*, y el segmento *DE* es igual a la mitad de *BC*. Ajá.

En su signo vehículo, el estudiante explicita las relaciones entre las medidas de los lados de los dos triángulos involucrados en la situación en respuesta a la sugerencia que le hace PI de usar el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. Inferimos que Andrew puede estar ratificando la idea de que justificar tiene que ver con obtener conclusiones deductivamente, y además puede estar gestando la idea de que los hechos geométricos permiten obtener conclusiones. Asociado a esta interpretación, proponemos como objeto dinámico el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo en su calidad de garantía* (od_7), que está en consonancia con el objeto inmediato pretendido. No obstante, el objeto dinámico puede y debe evolucionar con otras experiencias de uso, de manera que el significado del hecho geométrico incluya "las situaciones o contextos donde se puede utilizar" (Molina, 2014, p. 22).

El signo vehículo de PI permite afirmar que su papel en el intercambio tuvo dos tendencias: por una parte, encauzar la actividad de Andrew hacia el uso del hecho geométrico; por otra, hacer comentarios breves con el propósito de apoyar la comunicación exitosa de Andrew.

El último intercambio verbal de PI y Andrew en el caso que nos ocupa es el siguiente:

> Y entonces, en total… En total, al sumar todos los lados del triángulo pequeño (con el índice recorre el triángulo *DEF*) debe dar la suma total del triángulo grande. (… …) ¿O sea que el perímetro del chiquito es igualito al perímetro del grande? No… es la mitad del grande. Exacto. (… … …) O sea, al sumarlos y al multiplicarlos Al sumarlos ¿cuáles? Los lados del triángulo pequeño y al multiplicarlos… la suma por dos, se obtiene el perímetro del triángulo grande. Ya… Y lo que has usado para argumentar eso, para justificar eso es… (… …) El hecho geométrico… que descubrimos antes ¿sí? Sí, es ese hecho geométrico.

En su signo vehículo, Andrew completa, sin entrar en detalles, la justificación solicitada en la tarea. Se refiere a la suma de las medidas de los lados del triángulo pequeño, relacionándola con la suma de las medidas de los lados del triángulo grande; queda expresada como conclusión la relación entre los perímetros de los triángulos involucrados en la situación. Finalmente, explicita que en la justificación ha usado el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*.

6. Discusión

En una interacción comunicativa con PI, al resolver las dos tareas, Andrew participa en una actividad de índole científica. Al resolver la primera, hay: exploración empírica de una representación particular de la situación geométrica planteada, con miras a encontrar una relación especial; exploración empírica, usando arrastre con medidas, para averiguar si una cierta relación entre medidas se mantiene; enunciación del hecho geométrico descubierto. Al resolver la segunda tarea hay: una anticipación –respuesta intuitiva– que inmediatamente se expresó como una hipótesis relativa a un punto para el cual la condición de los perímetros se cumpliría; un experimento para verificar la hipótesis; establecimiento de una conjetura; justificación teórica de la conjetura, actividad muy cercana a la que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan actividad demostrativa.

No sobra decir, sin entrar en detalles, que las acciones mencionadas no se realizan en toda su dimensión como para poderlas considerar auténticas, no sólo porque la participación de Andrew en cierta medida es periférica sino porque las acciones mismas no tienen el grado de desarrollo deseable. Es necesario entenderlas como acciones de iniciación del estudiante en un aprendizaje de la actividad científica y la actividad demostrativa.

Al participar en dicha actividad, Andrew se involucra en un proceso de construcción de significado de un hecho geométrico, específicamente de dos aspectos de éste: su enunciación y su uso como garantía. El diagrama de la Figura 4 presenta un resumen de los objetos dinámicos que se fueron generando para aportar a un significado personal, provisional, del hecho.

En la mediación semiótica realizada por PI reconocemos dos rutas. Una, la que apunta a apoyar la construcción de significado de la enunciación de un hecho geométrico, la resumimos así:

> promover el descubrimiento de una relación → llamar la atención sobre la genericidad y la generalidad de la relación descubierta → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la reconstrucción de un procedimiento → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la explicitación del formato si-entonces.

La otra, la que apunta a apoyar la construcción de significado del uso de un hecho geométrico como garantía en la justificación de otro hecho, la resumimos así:

> reformular la solicitud de la tarea en términos operativos para sugerir la estructura del argumento que se ha de dar → impulsar la transformación de una explicación descriptiva hacia un argumento deductivo → impulsar la determinación de cuál garantía es aplicable → estructurar el argumento vía el uso del hecho geométrico descubierto.

Cabe hacer dos precisiones. Una, para las dos tareas abordadas, la mediación semiótica se realizó en términos particulares, es decir, las acciones que la conformaron se refirieron siempre a la correspondiente situación geométrica, y no a una abstracta. Dos, aunque la mediación en cada tarea tuvo un objetivo claro, ambas tuvieron que atender otros aspectos que de manera imbricada hacen parte de la construcción de significado del objeto matemático en cuestión. Así, por ejemplo, para mediar semióticamente el uso del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo* como garantía de otro hecho, inicialmente se apoyó al estudiante en su significado personal de "justificar", fuera el que fuera.

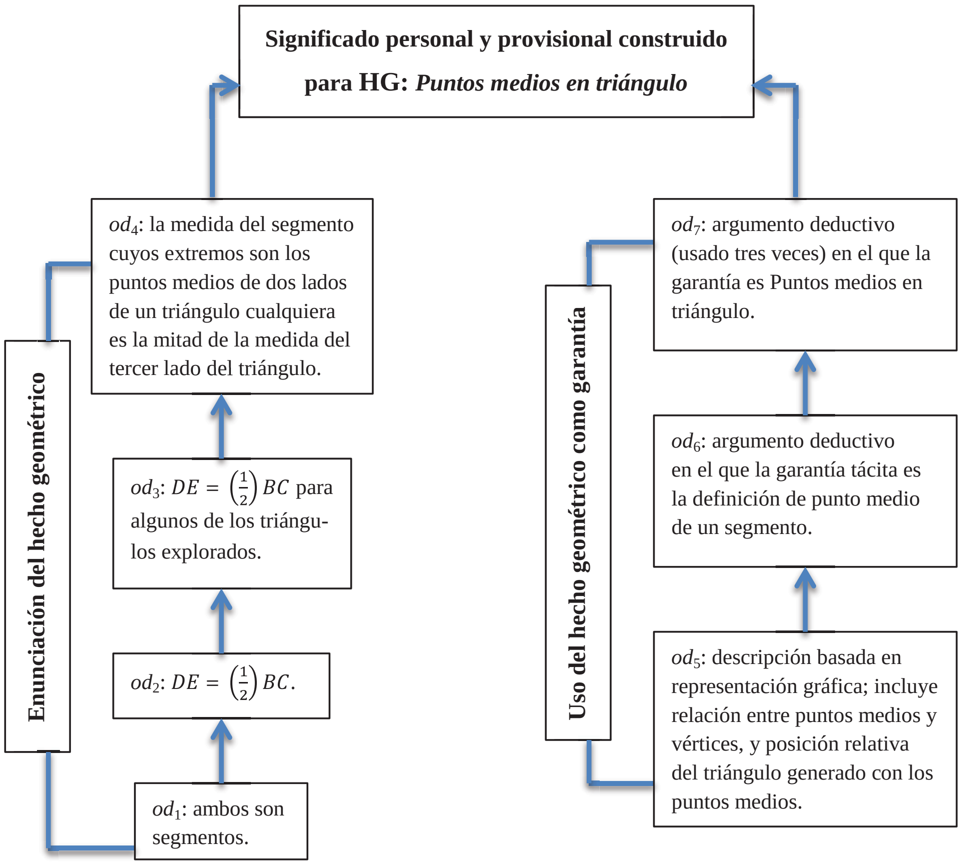


Figura 4. Objetos dinámicos por los que pasó la construcción de significado personal del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*

Al inicio del artículo insinuamos que una explicación para no propiciar actividades de índole científica o demostrativa en el aula de geometría de secundaria es la creencia en la natural inmadurez de los estudiantes para participar en actividades de este tipo. Esperamos que el caso que aquí se reporta sea aceptado por la comunidad de educación matemática como evidencia que apoya la hipótesis de que en la educación secundaria es posible que los estudiantes participen en actividad demostrativa. La concreción de tal posibilidad depende, por supuesto, de varios factores, entre los cuales están: entender y aceptar que aprender a participar es inevitablemente gradual y que requiere de la mediación semiótica de un experto por cuanto las reglas que rigen la comunicación especial eficaz en tal actividad no las puede "recrear" o inventar el estudiante (Sfard, 2008, p. 61).

Respecto al cuestionamiento que plantea el epígrafe, el análisis de la construcción de significado ocurrida durante la resolución de la segunda tarea indica que para Andrew no fue provechosa de manera inmediata la mera sugerencia, dada por PI, de usar *Puntos medios en triángulo* para justificar la relación entre los perímetros. Antes de llegar a usarlo como garantía, el estudiante pasó por una descripción de la representación gráfica que veía en la pantalla; luego un argumento en el que usó como garantía la definición de punto medio, y la reformulación del hecho, acciones que probablemente junto con la realimentación de PI pueden haberle aportado elementos para progresar en la construcción de significado del objeto justificación en matemáticas. Este suceso nos permite ver que no por decirle algo al estudiante, éste actuará como quisiera el profesor. En el caso que nos ocupa, decirle que usara el hecho geométrico descubierto hizo parte de la mediación para, por una parte, hacerle ver que la argumentación esperada no era una descripción sobre la representación particular de la pantalla y, por otra, hacerle ver que del hecho geométrico salían las razones particulares para armar la argumentación.

7. Para terminar

Como dijimos al inicio, el análisis presentado aquí recurre a la teoría semiótica sugerida por Sáenz-Ludlow y Zellwger (2012), que usamos en otras ocasiones. Conviene entonces puntualizar posibles avances o cambios en nuestra interpretación y uso de la teoría.

Un avance consiste en que en este artículo refinamos la definición de significado personal que habíamos insinuado en Molina, Perry, Camargo y Samper (2015).

En Camargo, Perry, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina (2015) mostramos la utilidad de la teoría para analizar construcción de significado de un objeto geométrico (*i.e.*, rayo) cuando su definición se emplea como garantía en una demostración. En Molina, Perry, Camargo y Samper (2015) pusimos en funcionamiento la teoría para analizar la compleja construcción de significado de un teorema específico, destacando, gracias a la teoría, los retos interpretativos que impone tal uso cuando hay que verificar las propiedades mencionadas en el antecedente del teorema en situaciones específicas. En Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina (2016) de nuevo usamos la herramienta para analizar construcción de significado de la demostración de un teorema específico, en este caso de existencia, con la mediación semiótica enfocada en el proceso mediante el cual, dado que su enunciado es de la forma $p \rightarrow (q \wedge r)$, se requiere crear un objeto geométrico que satisfaga una de las condiciones, q o r, y construir una ruta deductiva a partir de ese objeto para demostrar que cumple la otra condición. En Perry, Camargo, Samper, Molina y Sáenz-Ludlow (2016), aprovechamos la teoría para capturar y exponer la complejidad en la transición de formas empíricas de proceder al resolver problemas a formas teóricas de validar los hallazgos.

En el presente análisis usamos la teoría para rastrear muy de cerca el inicio de la construcción de significado, por parte de un estudiante de secundaria, de dos procedimientos fundamentales para las matemáticas y otras disciplinas científicas: presentar un hecho descubierto en términos de una formulación general, y usar un hecho aceptado como garantía para justificar una conjetura; además, esbozamos dos rutas para mediar semióticamente dichos procedimientos.

Agradecimientos

Este artículo se produjo en el marco de los proyectos DMA-399-15 y DMA-489-19, financiados por el Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

Referencias bibliográficas

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, Ó. y Sáenz-Ludlow, A. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 99-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1594

Contreras, Á. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 277-310.

Gavilán, J. M., García, M. M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica de un profesor de matemáticas, implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(2), 157-170. http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-14/numero-14-3/484-201101c

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 70-92. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/06Godino.pdf

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/674/1/Gutierrez1998Geometria.pdf

Molina, Ó. (2014). Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. http://funes.uniandes.edu.co/6691/1/2014Ca-MolinaEnunciado.pdf

Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática, 27*(2), 37-66. http://somidem.com.mx/revista/2016/05/12/vol27-2-2/

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, Ó. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). Instead of the circle… what? En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp. 127-153). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789463003377_008

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria%20Plana-2.pdf

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática,12*(1), 51-69. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/05Radford.pdf

Sáenz-Ludlow, A. y Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789463003377_002

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching - learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Seoul, South Korea: ICME

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 35-50. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9683-x

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los *Estándares del NCTM* a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas (P. Perry y H. Alfonso, Trads.). *Revista EMA, 6*(2), 95-140. http://funes.uniandes.edu.co/1125/

Sfard, A. (2008). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (P. Perry y L. Andrade, Eds. y Trads.) (pp. 39-63). Cali: Universidad del Valle.

Autores

Patricia Perry. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. pperryc@yahoo.com.mx

Leonor Camargo. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. lcamargo@pedagogica.edu.co

Carmen Samper. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. csamper@pedagogica.edu.co

Alfonso F. Díaz-Cárdenas, Alfonso Díaz-Furlong,
Héctor Adrián Díaz-Furlong, M. Rayo Sankey-García,
Gemma Zago-Portillo

MULTIPLICATION AND DIVISION OF FRACTIONS: NUMERICAL COGNITION DEVELOPMENT AND ASSESSMENT PROCEDURES

RESUMEN

El número y sus operaciones básicas se pueden conceptualizar dentro de un sistema general de relaciones. Los niños necesitan construir un sistema de números dentro del cual puedan sumar, restar, multiplicar y dividir cualquier número racional. Los productos y los cocientes se pueden definir en términos de esquemas relacionales generales. En este estudio, examinamos si los niños de escuela primaria pueden construir un sistema de números tal que la multiplicación y división de fracciones se basan en la construcción de esquemas relacionales generales. Los grupos de estudiantes no son homogéneos y los niños progresan a diferentes ritmos. Para una evaluación confiable, los maestros necesitan métodos para examinar las diferencias individuales y de desarrollo en las representaciones cognitivas de los conceptos y operaciones matemáticos. Una curva de regresión logística ofrece una visualización del proceso de aprendizaje como una función de las notas promedio. El análisis de elementos de multiplicación y división de fracciones muestra una mejora en la probabilidad de respuesta correcta, especialmente para estudiantes con una calificación promedio más alta.

PALABRAS CLAVE:

- *Esquemas relacionales*
- *Enseñanza de multiplicación de fracciones*
- *Curva de regresión logística*
- *Evaluación del desarrollo educativo*

ABSTRACT

The number and its basic operations can be conceptualised within a general system of relations. Children need to construct a system of numbers within which they can add, subtract, multiply and divide any rational number. Products and quotients can be defined in terms of general relational schemes. In this study, we examine whether elementary school children can construct a system of numbers such that fraction multiplication and division are based on the construction of general relational schemes. Groups of students are not homogeneous and children progress at different rates. For reliable assessment teachers need methods to examine developmental and individual differences in cognitive representations of mathematical concepts and operations. A logistic regression curve offers a visualisation of the learning process as a function of average marks. The analysis of fraction multiplication and division items shows an improvement on correct response probability, especially for students with a higher average mark.

KEYWORDS:

- *Relational schemes*
- *Fraction multiplication teaching*
- *Logistic regression curve*
- *Educational development assessment*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 333 - 362.
Recepción: Julio 25, 2018 / Aceptación: Noviembre 15, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2234

RESUMO

O número e suas operações básicas podem ser conceituados dentro de um sistema geral de relações. As crianças precisam construir um sistema de números dentro do qual possam somar, subtrair, multiplicar e dividir qualquer número racional. Produtos e quocientes podem ser definidos em termos de esquemas relacionais gerais. Neste estudo, examinamos se as crianças do ensino fundamental podem construir um sistema de números de tal forma que a multiplicação e divisão de frações são baseadas na construção de esquemas relacionais gerais. Grupos de estudantes não são homogêneos e as crianças progridem em taxas diferentes. Para uma avaliação confiável, os professores precisam de métodos para examinar diferenças individuais e de desenvolvimento nas representações cognitivas de conceitos e operações matemáticas. Uma curva de regressão logística oferece uma visualização do processo de aprendizagem como uma função das notas médias. A análise dos itens de multiplicação e divisão de frações mostra uma melhoria na probabilidade de resposta correta, especialmente para os alunos com uma nota média mais alta.

PALAVRAS CHAVE:

- *Esquemas relacionais*
- *Ensino de multiplicação de frações*
- *Curva de regressão logística*
- *Avaliação do desenvolvimento educacional*

RÉSUMÉ

Le nombre et ses opérations de base peuvent être conceptualisés dans un système général de relations. Les enfants ont besoin de construire un système de nombres au sein duquel ils peuvent additionner, soustraire, multiplier et diviser n'importe quel nombre rationnel. Les produits et les quotients peuvent être définis en termes de schémas relationnels généraux. Dans cette étude, nous examinons si les enfants des écoles élémentaires peuvent construire un système de nombres tel que la multiplication et la division des fractions sont basées sur la construction de schèmes relationnels généraux. Les groupes d'étudiants ne sont pas homogènes et les enfants progressent à des rythmes différents. Pour une évaluation fiable, les enseignants ont besoin de méthodes pour examiner les différences de développement et individuelles dans les représentations cognitives des concepts et des opérations mathématiques. Une courbe de régression logistique offre une visualisation du processus d'apprentissage en fonction des moyennes. L'analyse des éléments de multiplication et de division des fractions montre une amélioration de la probabilité de réponse correcte, en particulier pour les étudiants ayant une note moyenne plus élevée.

MOTS CLÉS:

- *Schémas relationnels*
- *Enseignement de la multiplication de fractions*
- *Courbe de régression logistique*
- *Évaluation du développement de l'éducation*

1. Introduction

The conceptual development of number and its basic operations (addition and multiplication) has constituted an essential part of research on cognitive development (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 2015; Empson &

Levi, 2011; Empson, Levi, & Carpenter, 2011; Piaget, 1952; Lamon, 2005; Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015; Piaget, 1952; Piaget & Inhelder,1958; Siegler, et al., 2010; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015; Vygotsky, 1986). Scholastic education is one of the principal sources of the children's scientific and mathematical concepts and is also a powerful force in directing their development (Vygotsky, 1986). The main educational goal in elementary mathematics is that children develop mathematical descriptions and explanations and use mathematical tools to solve academic and real problems (Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD), 2016). It has been proposed that elementary school children's development of fraction knowledge (including decimals, percentages, ratios, rates, and proportions) seems to be especially important for overall mathematics achievement and later academic success. Moreover, children's understanding of decimals simultaneously draws on their understanding of fractions. In addition to their importance for educational and occupational success, fractions are crucial for theories of numerical development (Siegler and Lortie-Forgues, 2015; Torbeyns, *et al*., 2015).

However, elementary school teachers and students tend to understand arithmetic as a collection of procedures, and students often are taught computational procedures with fractions without an adequate explanation of how or why the procedures work (Siegler, *et al*., 2010; Empson, *et al*., 2011). Although elementary school teaching focuses on both conceptual understanding and procedural fluency teachers should emphasise the connections between them (Siegler, *et al*., 2010). Academic tasks at elementary school create the necessary demands and conditions to conceptualise the number and its basic operations.

According to Vygotsky (1986), systematic learning plays a leading role in the conceptual development of elementary school children. Vygotsky upholds that the development of spontaneous concepts knows no systematisation and goes from the particular event, object or situation upward toward generalisations. In an opposite way, the development of mathematical and scientific concepts is the consequence of a systematic cooperation between the children and the teacher. The mathematical and scientific concepts, therefore, stand in a different relation to the events, objects or situations. This relation is only achievable in conceptual terms, which, in its turn, is possible only through a system of concepts. Vygotsky (1986) emphasises that the acquisition of academic concepts is carried out with the mediation provided by already acquired concepts. In general, Gergen (2009) contends that the meaning of a word is not contained within itself but derives from a process of coordinating words and that language (and other actions), in essence, gain their intelligibility in their social use.

In addition, Piaget (1952; Piaget & Inhelder, 1958) suggests that in formal thought there is a reversal of the direction of thinking of reality and possibility, and it is the reality that is now secondary to the possibility. Children conceive, for the first time, that the given facts form part of a set of possible transformations that has actually come about from a system of relationships. According to Piaget (1952), *every totality is a system of relationships just as every relationship is a segment of totality. The possibilities entertained in formal thought are by no means arbitrary or equivalent to imagination freed of all control and objectivity. Quite to the contrary, the advent of possibilities must be viewed from the dual perspective of logic and physics; this is the indispensable condition for the attainment of a general form of equilibrium*. Children recognise relations, *which in the first instance* they assume *as real, in the totality of those which* they recognise *as possible*.

The number and its basic operations can be conceptualised within a system of relations. At the beginning, certain aspects of objects are abstracted and generalised into the concept of number and the mathematical basic operations (addition and multiplication). However, mathematical concepts represent generalisations and schematic representations of certain aspects of numbers, not objects, and thus signify a new level of cognitive processes (Zapatera Llinares, 2017). This new processing level transforms the meaning of the first conceptualisations of number and its basic operations. This produces the construction of one general system of numbers.

Generalisations can be developed using different approaches. Children in the first courses of elementary school can develop concepts about fraction numbers through counting or measuring activities. Simona, Placab, Avitzurc, & Karad (2018) show how students can develop a measurement concept of fractions. Their proposal is consistent with the E-D approach developed by Davydov & Tsvetkovich and the Japanese text series, Tokyo Shoseki, developed by Fujii & Iitaka. From the perspective of the E-D curriculum, measurement is not just a basis for fraction numbers, but for numbers in general from the first elementary grades. The proposal is based on the idea that number should be developed as a general concept, and that any number, whole or fraction, does not require a change in the general basic concept.

In contrast to the counting and measuring cognitive activities, we focus on children's understanding of fractions based on relational schemes. Our activities promote children's generalisation of multiplication and division computational procedures to include whole and fraction numbers in general schemes. The images children construct might imply measuring cognitive activities, but measuring does not play a central role in our learning sessions. The core of our programme is the concept of number as a relational scheme.

Our proposal is based on the construction of generalised conceptualisation of, at least, rational numbers and the development of generalised procedures to perform rational numbers mathematical operations.

1.1. *Cognitive schemes of fractions and their basic operations*

As a general rule, instruction in fraction numbers, i.e. a number that can be represented by an ordered pair of whole numbers a/b (Musser, Burger, & Peterson, 2008), and their basic operations begins with addition and subtraction of fractions with common denominators, proceeds to instruction in those operations with unequal denominators and to fraction multiplication, and then moves to fraction division. We propose that the best approach to present this subject is to begin with fraction multiplication and fraction division. That is because children need to know how to multiply and/or divide fractions in order to obtain equivalent fractions with the aim of adding, subtracting or comparing fractions with unequal denominators. Consequently, in this paper, we constrain our research to multiplication of rational numbers and its related operation, division. The focus of our inquiry is on children's schemes that define multiplication as a mathematical process whereby a rational number multiplied by another rational number results in a third rational number.

1.2. *Cognitive construction of rational numbers*

Elementary school children do not discriminate between the set of natural numbers and the set of rational numbers. Numbers, in general, are signs or symbols representing an amount or total and they can be conceptually understood in relation to other numbers. Every natural number is specifically represented by a unique symbol (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). However, in general, any number can be represented in a great variety of mathematical relationships. Vygotsky (1986) asserts that through the study of arithmetic, children learn that any number can be expressed in countless ways because the concept of any number contains also all of its relations to all other numbers. For example, a whole number can be represented as a fraction and hence has an infinite number of fraction equivalences (Musser, Burger & Peterson, 2008). The number one, for instance, can be expressed as the difference between any two consecutive numbers, or as any number divided by itself, or in a myriad of other ways. According to this relational perspective, every number can be represented by infinite expressions. The number *5* can be defined or represented as:

$$5 = 4 + 1 = 6 - 1 = 3 + 2 = \frac{10}{2} = \sqrt{25} = 7\left(\frac{5}{7}\right)$$

In view of this, we conclude that children's cognitive structures conceptualising numbers constitute relational schemes. A relational scheme can be defined as any scheme whose essential characteristic or feature is a relationship between at least two concepts, objects or situations (Díaz-Cárdenas, Sankey-García, Díaz-

Furlong, & Díaz-Furlong, 2014). In Vygotskian words, we cannot study concepts as isolated entities but we must study the "fabric" made of concepts. We must discover the connections between concepts based on the principle of the relation of generality, not based on either associative or structural relationship.

Teacher instruction relying on the typical mathematical tasks of elementary school create the conditions that engender children's need to construct a system of numbers within which they can add, subtract, multiply and divide. Scholastic tasks like calculating the number which added to five equals three, or calculating the number which multiplied by five equals thirty one, constitute the basis for expanding the number system, restricted at first, to the positive integers to include the negative and rational numbers. Natural numbers are not closed under subtraction and they are not closed under division either. Therefore children need to expand the numbers system to include zero, negative numbers and fractions. At least, they need to understand and conceptualise the rational numbers ($\mathbb{Q}$, from quotient). Within $\mathbb{Q}$ they can subtract and divide any number (except divide by zero). This number system includes a variety of relations in terms of comparisons and equivalences of spatial or temporal magnitudes and quantities (length, surfaces, volumes, units of weight or time) or abstract numbers.

In this paper we present data about a very important issue related to opposing approaches to the introduction of fraction multiplication and division. One research perspective that contends that fractions and decimals need to be treated differently from whole numbers, and a second approach, which we adopt, that is based on the construction of general relational schemes for any mathematical basic operation that combines two real numbers to form a single real number. In this study, we examine whether elementary school children can construct a system of numbers such that fraction multiplication and division are based on the construction of general relational schemes. We also want to test the hypothesis that children achieve an improvement on correct response probability, especially those students with a higher average mark.

1.3. *Fraction multiplication*

Research on the direction of effects of fraction arithmetic operations suggests that learner' incorrect predictions about products and quotients result from the belief that multiplication yields answer greater than both factors, and that dividing yields answer smaller than the dividend (Siegler, *et al*., 2015; Graeber, Tirosh & Glover, 1989). This question depends on the particular case and it can be answered if the student understands the multiplication scheme or the division scheme in itself. Basically, students must develop a sound understanding of fraction operations so as to analyse and modify their misconceptions about multiplication and division

(Greer, 1988). Therefore we need to help children to develop a reconceptualization of number that includes the fractional basic operations. In developing general cognitive schemes it is not a relevant issue if a product or quotient is greater o smaller than any of the factors or the division elements. Fraction multiplication and division must be developed as cases of general relational schemes and, basically, as a conceptual generalisation of these operations with natural numbers. Elementary school children can construct a system of numbers such that multiplication and division, products and quotients, are defined by every number comprised in the system.

Multiplication can be expressed by the words "*multiplied by*" or "*times*" (the corresponding Spanish words are "*por*" and "*veces*" respectively). An algebraic expression of a product c is $a \times b = c$. This can be read as *a times b or b times a equals c*. Likewise, it can be transcribed as *the product c results from taking a times the number b or taking b times the number a*. In a similar way children can say that a product results from adding a number to itself a particular number of times.

To prevent students' belief that multiplication should always yield answers larger than either factor we introduce gradually fraction multiplication exercises that result in products that can be at the same time greater than one of the factors and smaller than the other factor. Cognitive systems, according to Piaget (1975), never reach a final equilibrium point but they are evolving in a continuous process of progressive equilibration. Cognitive schemes are constantly modified by school exercises so they become able to give a comprehensive account of number multiplication and division. Elementary school children commonly learn to calculate a product that can be the result of taking:

a) a whole number of times a whole number
b) a whole number of times a non-whole number or fraction number
c) a non-whole number or fraction number of times a whole number
d) a non-whole number or fraction number of times a non-whole number or fraction number.

Children learn multiplication and its properties multiplying whole numbers, the first multiplication case (a). Children's understanding of fractions based on relational schemes can be introduced by (b) or (c) multiplications. They can conceptualise multiplication by fraction numbers as taking a whole number times a fraction number (b) or taking a fraction times a whole number (c). If we use the same numbers in both cases children have a fractional multiplication example of the Commutative Property for Number Multiplication ($18 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 18$) (see the section *learning procedure*). Finally, children must be able to take a fraction times another fraction, understanding that they can get a correct mathematical answer if they take a non-whole number times a fraction, that they can take a part of a part, for example, two fifths times five sevenths. Most elementary school children understand that multiplication computational procedures apply in the same way to fractions when they are provided with opportunities to solve multiplications involving fractions.

Problem solving in mathematics requires an understanding of the relations involved in a problem and developing a corresponding translation into a mathematical relation (Vygotsky, 1986). Children can be helped to quickly recognise patterns of information and to organise data in schemes and they will be able to develop relational schemes that generalise these math relations. Products and quotients can be defined in terms of relational schemes (Díaz-Cárdenas, *et al*., 2014). A general multiplication scheme must include any rational number (decimal or fraction). According to Empson and Levy (2011) children must think of a fraction as a number.

Product defined in relational terms

factor	*product xy is*	*factor*
y	*y times x*	*x*
y	*x times y*	*x*
y	*the y-ple of x*	*x*
y	*the x-ple of y*	*x*

In conceptualising different objects in a name or a category it is necessary to select a set of common properties or qualities and determine those that contrast them with other elements belonging to other categories (Díaz-Cárdenas, *et al*., 2014; Rogers & McClelland, 2004). Children understand that all four multiplications above-mentioned represent a mathematical operation that results from taking one number a number of times. One contrasting feature is the procedural knowledge that produces the resulting factor of:

1) Taking a whole number of times a whole number,
2) Taking a whole number of times a part of another number that is an equivalent operation to taking specific fraction times a whole number.
3) Taking specific fraction times a fraction number.

1.4. *Fraction division*

Children learn that there is a number that multiplied by 3 equals 9, and there is a number that multiplied by 3 equals 10. But if there is a Closure Property for Fraction

Multiplication there must be a number that multiplied by 3 equals 10 and another number that multiplied by 3 equals 11 (see the section *learning procedure*). Here we can introduce the division of fractions. On the subject of division students also need to avoid some common misconceptions, and a significant number of children and their teachers believe that the quotient must be a whole number (Graeber, *et al.*, 1989). They hardly represent the remainder as a fraction part of the quotient. On the other hand, incorrect responses to the direction of effects on division tasks are by-products of a misconstruction of products and quotients. Therefore, we begin by considering division as a mathematical process that results in dividing a rational number by another rational number that produces a third rational number named quotient and we basically apply the missing-factor approach (Musser, *et al.*, 2008). This means that division consists of three mathematically related numbers: a dividend, a divisor, and a third number called the quotient or missing factor. The children´s task is to find the number that multiplied by the divisor equals the dividend and they can define division for every two numbers within only one general scheme for all rational numbers.

Quotient (q) defined in relational terms

dividend	*relationship*	*divisor*
y	y contains / comprises / includes q times x	$x \neq 0$
y	y equals q times x	$x \neq 0$
y	q is the number that multiplied by x equals y	$x \neq 0$

1.5. *School Assessment Analysis*

The second, but no less important objective of this study, is based on elementary school teachers' need for reliable assessment methods to examine developmental and individual differences in cognitive representations of fractions and in the effects of interventions aiming at improving conceptual knowledge of fractions.

The second, but no less important objective of this study, is based on elementary school teachers' need for reliable assessment methods to examine developmental and individual differences in cognitive representations of fractions and in the effects of interventions aiming at improving conceptual knowledge of fractions.

Assessment as part of the learning process is very effective when it is designed to reflect the understanding of how students learn. It is important to know how students progress in learning academic procedures and content. Assessment is an essential ingredient both in research and education processes. A valid assessment system implies a model of student cognition and learning in a specific topic, a set of beliefs about the kinds of data that will provide evidence of students' cognitive processes in learning, and an analysis and information processing for making sense of the evidence (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, 2018). Assessment design and analysis are becoming as essential as other elements of teaching in Mexico. Teachers must include in their didactic planning detailed rubrics. These must contain evaluation parameters and procedures for performance analysis.

In elementary school, children's learning depends on different individual factors. Groups of students are not homogeneous and children progress at different rates. Therefore, when teachers base their analysis on group average achievement, they cannot see how students are differentially progressing.

The logistic function depicts the probability of success on an item as a function of a students' specified parameter, i.e. it is possible to analyse learning progress in relation to any variable that can be evaluated with non-categorical scales. With this tool, teachers or researchers can perform basic item analysis in relation to an ability parameter based on academic grades, psychological test scores, or performance on a cognitive scale. To attempt a first approximation analysis, we selected average marks as the parameter that can be related to the probability of right answer to an item. We decided to study children´s average mark or grade as the ability parameter. Average mark is basically a socially defined index that represents academic performance, and this index is only one element of the universal set of social indexes designed to assess and analyse learning processes.

2. Method

2.1. *Participants*

Fifth graders attending two elementary middle-income schools in Puebla city, México, participated in this study (N = 104). There were two fifth-grade groups studying in each school. One school pertains to the public school system and the other one is a private school. Only students with parental consent were included in the study. According to the official requirements of the *Secretaría de Educación Pública* (the Secretary of Education), fifth-grade children participating in this program had their tenth birthday during the year of the study. Tests and learning sessions were developed in the children´s schools. One group played a part as a control group and the other participated as the fraction multiplication and division learning group in each school. As the group A would be the learning group in the private school we decide to take the group B as the learning group in the public school. Therefore, we have two control groups and two learning groups (see Table I).

TABLE I
Distribution by sex, academic group, and school system in control and learning groups

Treatment	*School*	*Sex*	*Group* A	*Group* B	*Total*
Learning group	Public	Female		20	20
		Male		20	20
	Private	Female	10		10
		Male	9		9
	Subtotal	Female	10	20	30
		Male	9	20	29
		Total	19	40	59
Control	Public	Female	12		12
		Male	13		13
	Private	female		11	11
		male		9	9
	Subtotal	female	12	11	23
		male	13	9	22
		Total	25	20	45
		Female total			53
		Male total			51
		Participant total			104

2.2. *Learning procedure and methods of microgenetic analysis*

The learning instruction period was necessarily brief because of our commitment to working the same learning sessions with the control group before the academic year finished. During the learning sessions, we asked children to write a verbal expression that makes visible a conceptual understanding of the fraction multiplication, as well as the standard mathematical expression and, when possible, to draw a picture or diagram representing the multiplication. When children calculate products that involve greater numbers they do not need to make a drawing (see *Figure 1* as an example of tasks solved in school).

Figure 1. An example of one student´s multiplication exercises

Sessions with the fractions multiplication/division learning groups were delivered in a whole-class arrangement in half-hour periods two times per week for three and a half weeks. The first author had charge of the learning sessions and the school teachers did not intervene in the teaching of multiplication or division of fraction. Control groups did not receive any special intervention. To prevent parents or teachers intervention in the multiplication and division learning process we did not assign any homework.

Some researchers have suggested that children make of errors that reflect inappropriate generalization from the corresponding whole number arithmetic procedures (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015, Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). According to them an important factor that contributes to the difficulty that children commonly encounter with fraction arithmetic is the opposite direction of effects of multiplying and dividing positive fractions below and above one. Siegler & Lortie-Forgues affirm that understanding the direction of effects of multiplying and dividing proper fractions poses special problems for learners. Multiplying natural numbers always results in an answer greater than either multiplicand but multiplying two proper fractions invariably results in answers less than either multiplicand. Similarly, dividing by a natural number never results in an answer greater than the number being divided, but dividing by a proper fraction or decimal always does. Both an important number of students and some teachers show poor understanding of the directional effects of fraction and decimal multiplication and division (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). These researchers recommend that understanding fractions requires recognizing that many properties of natural numbers are not properties of numbers in general. An instructional implication is that teachers and textbooks should emphasize that multiplication and division produce different outcomes, depending on whether the numbers involved are greater than or less than 1, and should discuss why this is true (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015, Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). For this reason, we designed school activities that give rise to the construction of a system of numbers such that fraction multiplication and division are based on the development of general relational schemes.

In addition, by definition a fraction multiplication can be expressed as: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, but in order to avoid a simple mechanistic procedure we do not use this definition to solve fraction multiplications during learning sessions, and neither do we use the "invert-the-divisor-and-multiply" procedure for fraction division ($\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, *with* $b \neq 0$ *and* $c \neq 0$). In our programme children did not learn to multiply fractions in the traditional method for multiplication, whereby numerators and denominators of the multiplying fractions are treated as if they were independent multiplication problems with whole numbers.

Microgenetic methods offer a promising way to meet the challenges inherent in trying to understand change processes (Chen & Siegler, 2000, p.12). The brevity of the analyzed period allows us to assume that the observed effects will be largely a result of the interventions carried out, since the other social factors remain, on the whole, without significant changes. Obtaining a precise understanding of cognitive change requires observing such changes while they are occurring and to define the path of change, i.e. the sequence of knowledge states that the child passes through while gaining competence, constitutes a dimension that had proved useful in microgenetic studies (Fazio & Siegler, 2013). Our hypothesis is that children can go through the following path in learning fraction multiplication:

a) multiplication of a whole number by a fraction (*how much is seven times one fifth*? ¿cuánto es siete veces un quinto?).
b) multiplication of fractions whose numerators are 1, i.e. unitary fractions, by a whole number (*how much is one fifth times twenty*? ¿cuánto es una quinta vez veinte?).
c) multiplication of a nonunitary fraction by a whole number (*how much is three fifths times twenty*? ¿cuánto es tres quintas veces veinte?). In this case children can initially use the strategy of calculating first the product of a unitary fraction by the whole number (*how much is one fifth times twenty*? *Four* ¿cuánto es una quinta vez veinte? cuatro) and, finally multiplying this product by the remaining whole numerator (*three times four equals twelve;* tres veces cuatro es igual a doce).
d) multiplication of fractions whose numerators are 1, i.e. unitary fractions *(how much is one half times one fifth*? ¿cuánto es media vez un quinto?).
e) multiplication of a unitary fraction by a nonunitary fraction (*how much is one half times ten fifths*? ¿cuánto es media vez diez quintos?).
f) multiplication of nonunitary fractions (*how much is seven thirds times six fifths*? ¿cuánto es siete tercias veces seis quintos?). Similarly, as mentioned above, children can initially use the strategy of calculating first the product of a unitary fraction by the other nonunitary fraction and finally multiplying this product by the remaining whole numerator (*how much is one third times six fifths*? *two fifths*, and *seven times two*

fifths equals fourteen fifths; Un tercio de vez seis quintos son dos quintos, y siete veces dos quintos es igual a catorce quintos).

The comprehension activities that we applied to the different types of fraction multiplication were:

- Understanding and solving fraction multiplication word problems
- Drawing a picture or diagram representing fraction multiplication
- Understanding and solving fraction multiplication problems represented numerically

Consequently, we began to work with exercises like the following products (we use in the learning sessions examples not included in the evaluation tests):

$$2 \times \frac{1}{3} = \qquad 2 \times \frac{1}{5} = \qquad 2 \times \frac{1}{7} =$$

Once these are read, respectively, as *two times one-third equals*, *two times one-fifth equals*, *two times one-seventh equals*, most children correctly answer that the respective products are two-thirds, two-fifths, and two-sevenths. Incidentally, in session discussions, children agree, at least some of them that two-thirds are greater than one-third and smaller than two wholes, i.e. they acknowledge that the product is at the same time greater than one factor and smaller than the other factor. We then calculate products that involve greater whole numbers. For example:

$$60 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 60 =$$

This kind of exercise let the children generalise the multiplication relational scheme applied before to greater whole numbers and to apply the associated commutative law for multiplication ($a \times b = b \times a$). These activities help students to recognize that n times a fraction equals n times the fraction. Therefore *sixty times one third equals sixty thirds*. But this is equivalent to saying *one third times sixty* or *one third of sixty*. Most fifth-grade children correctly answer that *one third of sixty equals twenty*. Therefore, students understand and arrive at the conclusion that *sixty thirds equals twenty* (see Fig. 1).

We worked immediately after on the multiplication of two fractions. Yet again, we used the word *times* (*veces*) to help children to apply the same product relational scheme when multiplying fractions. Children conceptualise multiplication by *one half* as a product that results from taking a half times of a fraction. In general, multiplying by one half represents dividing in two halves a fraction and taking away one half of the original fraction (see Fig. 1). The result produces fractions with a denominator equal to two times the original denominator. Therefore, *one half times one third equals one sixth*, and similarly, *one half times one sixth equals one twelfth*.

We finish working with the children in multiplication with fractions with a numerator greater than one. We tried to use simple justifications to build schematic relationships. Let´s examine two multiplication cases, $15 \times \frac{3}{5}$ (a very similar fraction multiplication exercise to those analysed by Empson and Levy, 2011, p. 85), and $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$. Children, in the first instance, only need to understand the equivalence of these mathematical expressions to $\frac{3}{5} \times 15$ and $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ respectively (commutative property of multiplication). Students can immediately construct, correspondingly, these multiplications as *three times one fifth times fifteen* and *three times one fifth times one fourth*, that correspond, in the same order, to the mathematical representations: $3 \times \frac{1}{5} \times 15$ and $3 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$. The next step is to calculate *one fifth times fifteen* (5) or *one fifth times one fourth* ($\frac{1}{20}$) (associative property). As a final point, children, easily, calculate *three times* those partial products and it reinforces the procedural knowledge to calculate the product of a whole number (3) times a unitary fraction ($\frac{1}{5}$) [*tres veces un quinto son tres quintos*]. This kind of scholastic tasks helps children to consolidate and apply a general relational scheme of multiplication and two basic properties of this number operation.

As a final point, we briefly introduce fraction division basically applying the missing-factor approach in which the children's task is to find the number that, multiplied by the divisor, equals the dividend (Musser, *et al*., 2008). Succinctly children calculate how many times the divisor is contained in the dividend. In the first instance, fraction division problems were designed with the aim of defining multiplication for any integer number and extending the system of numbers. Consequently, children conceptualise division within only one general scheme for all rational numbers. To understand the need of rational numbers children calculated the numbers that multiplied by three equals nine or twelve, which are two and three respectively. But which numbers multiplied by three equals ten and eleven? Children must use rational numbers to answer this question and the resulting sequence would be like this:

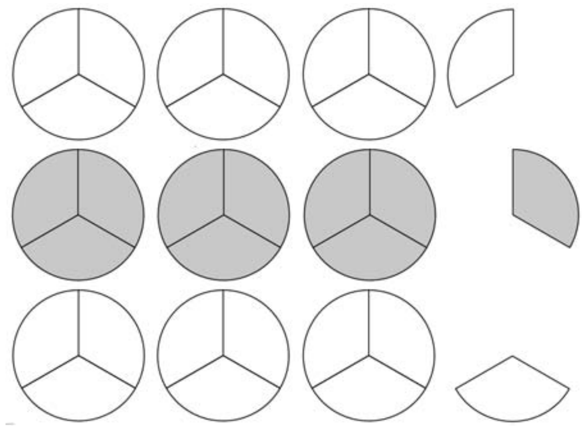
$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times \frac{10}{3} = 10$$

$$3 \times \frac{11}{3} = 11$$

$$3 \times 4 = 12$$

Children also can draw a picture or diagram representing every multiplication. For example, three times ten thirds equals ten can be represented as:



Therefore, the product sequence (9, 10, 11, 12) is completed if we introduce the numbers ($\frac{10}{3}$) and ($\frac{11}{3}$). To avoid some previously mentioned misconceptions about fraction division students calculated quotients resulting from the division of an integer by a fraction number. For instance, to divide *seven* by *one half* children must find a *number* that multiplied by *one half* equals *seven*, or a *number* whose *half* equals *seven*. The result derived from fraction multiplication schemes used before is $14 \times \frac{1}{2}$ *or* $\frac{1}{2} \times 14$. It is important for children to analyse and to understand that the quotient resulting from dividing $7 \div \frac{1}{2}$ is not really greater than seven. The quotient is not an abstract and absolute 14. The meaning of this quotient is that *fourteen* times *one half* equals *seven*, i.e. fourteen halves are contained in seven wholes, and it does not mean that fourteen wholes or units are contained somehow in seven wholes or units. This procedure could also be approached as a division process that solves the question of how many halves are contained in seven units.

2.3. *Pre- and post- assessments*

The only way to find out how children learn is to study them closely while they are learning (Chen & Siegler, 2000). If we examine thinking before and after changes occur, we can identify those children that move between different levels or stages from those who do not move to an advanced one. Participants solved 5 items on a multiplication fraction problem; three of them were verbally represented (eg, *how much is one-third of 18*? *¿Cuánto es un tercio de 18*?) while the rest were presented in a standard mathematical form (eg, *what is* $18 \times \frac{1}{3}$? *¿Cuánto es* $18 \times \frac{1}{3}$?). The assessment also included 5 items on a division problem; this part once again contained three word items (eg, *which number that multiplied by one half equals seven*? ¿qué número multiplicado por un medio nos da siete?) and two numerical items (eg, *find* $7 \div \frac{1}{2}$ *¿Cuánto es* $7 \div \frac{1}{2}$?). These fraction problems were administered before and after treatment, to both control and learning groups.

2.4. *Data analysis*

The logistic function describes the relationship between the probability of correctly answering an item and the corresponding examinee's specified ability. The item response curve depicts the probability of success on an item as a function of a person's specified parameter ability. We employ here the two-parameter logistic model based on the following function:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta - b)}}$$

where θ is an ability parameter, a stands for the item difficulty (the required ability level for an individual to have a probability of $\frac{1}{2}$ to respond correctly to an item), and b is the item discrimination according to item response theory (Fan & Sun, 2013; Baker, 2001). Item discrimination is an important index for assessing the quality of an item for differentiating students by ability levels on the basis of probability of successful response to an item (Wu, 2013; Baker, 2001). The unit on the ability parameter scale is known as logit (abbreviation for "log of odds unit" or logarithm of the odds). While the theoretical range of ability is from negative infinity to positive infinity, practical considerations usually limit the range of values from (-3 *to* $+ 3$) (Baker, 2001). Higher values of logit represent higher level of the attribute related to the correct answer probability (DeVellis, 2017). If the item response curve reach the point $P(\theta) = .50$ within the defined range (-3 *to* $+ 3$) the value of logit corresponds to the parameter defined as the item difficulty according to the item response theory. Three of the authors of this paper developed an application to be used in the common ® Microsoft Excel program (a copy of this macro can be obtained freely by request from the authors. As a result, we get an item response curve that constitutes the best fit of children′s item responses to a logistic function calculated using a genetic algorithm.

From the perspective of item response theory students who obtained the correct answer are of higher average ability than students who obtained the incorrect answers. However, an item response curve also could be interpreted as showing that students of higher average ability have a better chance of being successful on an item than students of lower average ability. We assumed that item difficulty is not fixed but it changes as learning develops. Abilities are not fixed, and successful item response probability, at least for academic assessments, varies as a function of cognitive development and learning.

There are two extreme cases for which the IRT ability estimation procedure fails. First, when children do not answer correctly any of the items, and second when students answer the test items without any mistakes. In both cases, it is impossible to obtain an ability estimate for the examinee (Baker, 2001). The item response curve is either very low or very high and essentially flat. If there are no answer differences between students calculation of an ability parameter is not possible. Therefore the item contributes very little to our knowledge about children's ability, as it does not differentiate between students with lower versus higher ability (Fan & Sun, 2013). It is not uncommon to find those situations at elementary school, either at the beginning of a learning process or at the final stage of this process.

In the case of learning fractions, children show a tendency to answer incorrectly most numerically represented items of a diagnostic test before instruction of this topic begins. As the course progresses, children's responses to fraction mathematics diverge. We analise here an ability parameter that teachers could bring into play that is related to fraction knowledge progress: children′s average mark or grade. In this way, children's item responses along with children′s average mark, as an ability parameter, are the basis for analysing the development of those responses with a logistic function. An item response curve is a useful aid to visualise, item by item, children's progress as a function of their average mark and teachers can compare, per item, correct answer probabilities $P(\theta)$, odds ratio $\left({}^{P(\theta)}/_{1-P(\theta)}\right)$, and logit by average mark level (Díaz-Furlong, Díaz-Furlong, & Díaz-Cárdenas, 2017; Pardo & Ruiz, 2012).

3. Results

Commonly teachers use overall group test scores to analyse academic improvements. The simplest way to do this is to apply a Student's two-tailed paired *t*-test (Pardo, Ruiz, & San Martín, 2009). Table II presents the results of a dependent samples *t*-test to compare general pre-test/post-test scores of learning groups (teachers do not usually compare their results with control groups) on multiplication items (word and numerical forms), division items (word and numerical forms), and total fraction items (word, numerical, and final total). There are statistically significant differences between any general scores, except for word multiplication items. Fifth-grade children can solve correctly word problems that involve fraction multiplication calculations, although they do not perform any multiplication. They calculate one-third of 18 calculating the third part of 18. On the other hand, they are not able, in general, to make any operation to calculate a quotient for a fractional division problem at the time of the pre-test.

TABLE II
Mean differences, standard deviations, standard error differences, and Student's two-tailed paired *t*-test values of learning group pre-test/post-test scores

	Paired Differences							
	Mean Difference	*Std. Deviation*	*Std. Error Difference*	*95% Confidence Interval of the Difference*		*t*	*df*	*Sig. (two-tailed)*
				Lower	*Upper*			
word multiplication items	-0.127	1.402	0.189	-0.506	0.252	-0.673	54	0.504
numerical multiplication items	-1.164	0.958	0.129	-1.423	-0.905	-9.011	54	0.000
multiplication items	-1.291	1.873	0.252	-1.797	-0.785	-5.113	54	0.000
word division ítems	-0.964	1.186	0.160	-1.284	-0.643	-6.027	54	0.000
numerical division ítems	-0.709	0.786	0.106	-0.922	-0.497	-6.692	54	0.000
division ítems	-1.673	1.806	0.244	-2.161	-1.185	-6.869	54	0.000
word ítems	-1.091	2.057	0.277	-1.647	-0.535	-3.933	54	0.000
numerical ítems	-1.873	1.441	0.194	-2.262	-1.483	-9.639	54	0.000
fraction ítems	-2.964	3.055	0.412	-3.789	-2.138	-7.195	54	0.000

3.1. *Word multiplication items*

We present here an alternative form of item examination to analyse, item by item, improvements as a function of previous academic marks. The item response curve constitutes a very useful visual device to appreciate changes in correct response probability related to academic mark levels. In the first place, it is important to assess children's knowledge of verbal expressions related to fraction multiplication. Fifth-grade children have informal fraction knowledge, they already understand a fraction as a part of a collection, and they are able to answer a problem expressed in words (*how much one-third of 18 are* or *what is third of 18; ¿cuánto es un tercio de* 18). *Figure 2* shows the item response curves for the word item: *how much is one-third of 18*? Students show a relatively good performance in solving this word fractional problem. There is no noticeable change either in control or learning groups.

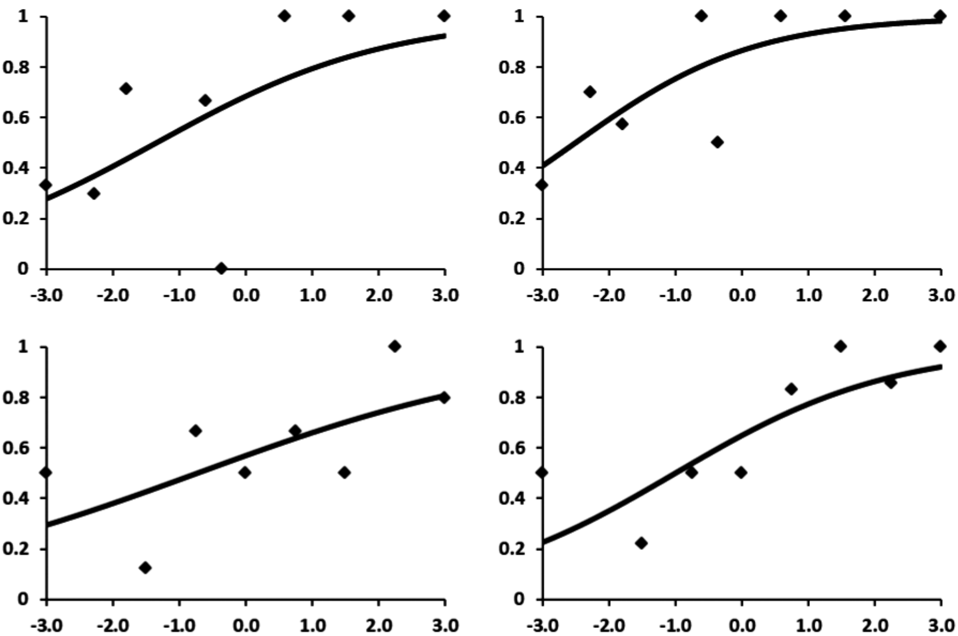


Figure 2. Item response curves depicting the probability of success on the item *how much is one – third of* 18? as a function of children´s average academic mark, taken as the ability parameter. The horizontal axis is the ability level: from the left to the right, the ability level goes from lower (-3) to higher (+3) levels. The unit on this scale is known as logit (abbreviation for "log of odds unit"). Control groups graphs (above) and learning groups curves (below) show no distinctive differences between pre-test (left) to post-test (right) answers.

We performed a one-way repeated-measures ANOVA on these data using Tukey's HSD (Honestly Significant Difference) test for post hoc comparisons (Pardo & San Martín, 2010). This analysis compares the item responses by average mark with the aim of validating the item response curve result. As expected, post hoc comparisons of the item responses of the learning groups show that there is no significant difference for any average mark level (see Table III).

TABLE III
Mean differences, standard error, and significance values by average mark resulting from Tukey's HSD of learning group pre-test/post-test answers to the item *How much is one-third of 18?*

Average mark	*Mean differences*	*Standard Error*	*Sig.*	*95% Confidence Interval of the Difference*	
				Lower	*Upper*
5.5	.000	.304	1.000	-1.07	1.07
6.5	-.125	.215	1.000	-.88	.63
7.0	.286	.230	0.997	-.52	1.09
7.5	.000	.215	1.000	-.76	.76
8.0	-.167	.248	1.000	-1.04	.71
8.5	-.600	.272	0.689	-1.56	.36
9.0	.143	.230	1.000	-.67	.95
9.5	-.200	.192	1.000	-.88	.48

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

3.2. *Numerical multiplication items*

The analysis of responses to problems expressed in numerical terms gives a different result. Most of the children give an incorrect answer at pretest when the problem is represented numerically ($\frac{1}{3} \times 18$). Based on our learning sessions children might solve this question as follows:

$$\textit{What is } 18 \times \tfrac{1}{3}? = \textit{What is } \tfrac{1}{3} \times 18?$$

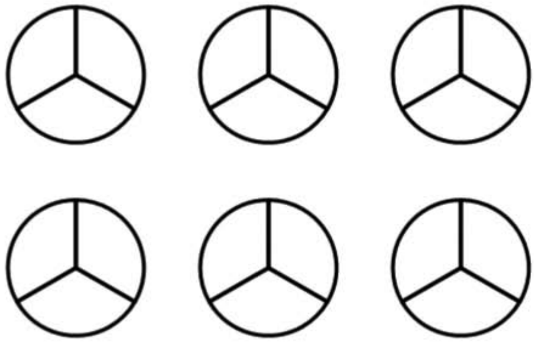
$$18 \times \frac{1}{3} = \frac{18}{3} = 6 = \frac{1}{3} \times 18 = 6 \qquad \text{(standard mathematical expression)}$$

18 *times one third equals eighteen thirds that equals six wholes* (verbal expression)

(solution drawing)

18 *times*

equals eighteen thirds that equals six wholes



or

$$\frac{1}{3} \times 18 = 6$$

one third of 18 equals six

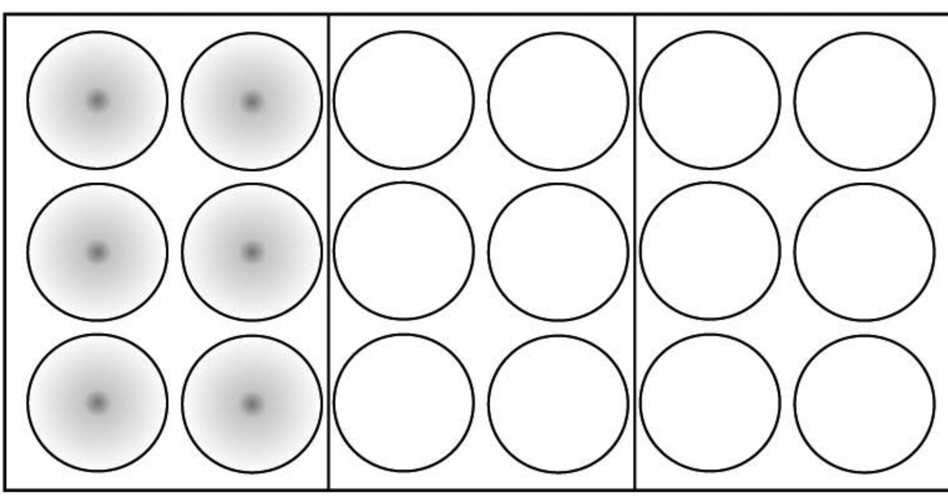


Figure 3 presents the item response curves for the numerical item: *What is* $18 \times \frac{1}{3}$? Here, the learning groups reveal an improvement on correct response probability, especially for students with a higher average mark.

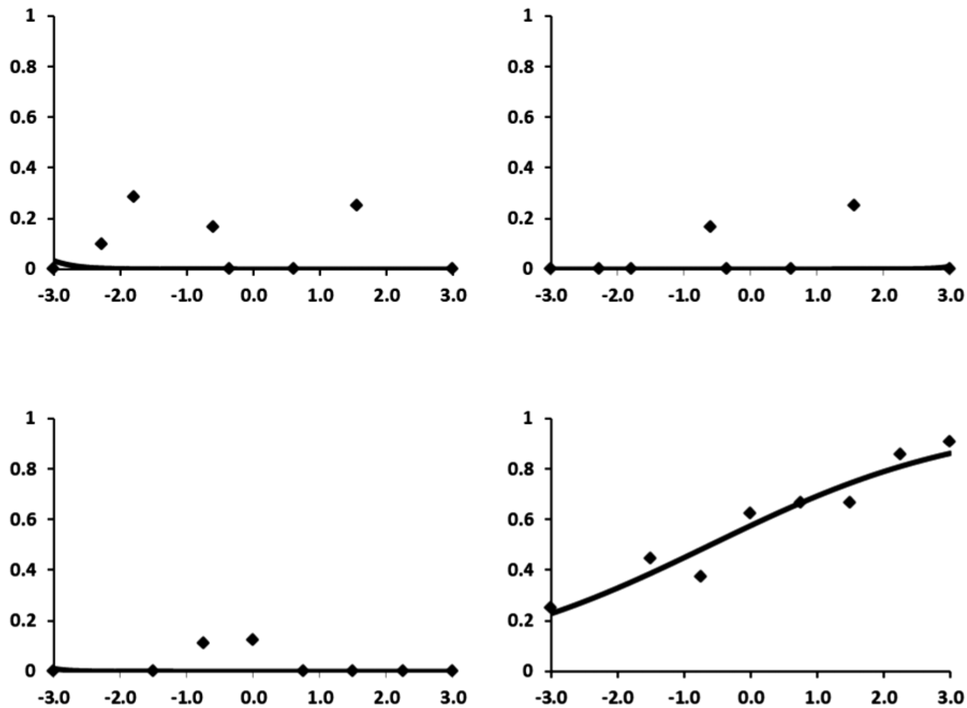


Figure 3. Item response curves depicting the probability of success on the item *What is* $18 \times \frac{1}{3}$ as a function of children´s average academic mark, taken as the ability parameter. Control groups graphs (above) show no distinctive differences between pre-test (left) to post-test (right) answers, whereas learning groups curves (below) show post-test (right) marked improvements in the probability of correct answer, in particular for those children with the higher average academic mark.

In a similar way, we apply a Tukey's HSD test to compare the item responses by average mark. In this case, post hoc comparisons of the item responses revealed that students with an average mark greater than or equal to 8.0 showed a significant improvement on item response ($p < .05$). Groups with an average mark less than or equal to 7.5 showed no significant difference on item response for any average mark level (see Table IV). The item response curve indicates that children with these lower average marks are less likely to answer successfully to the item: *What is* $18 \times \frac{1}{3}$?. This means that for these children this question remains a difficult item.

TABLE IV

Mean differences, standard error, and significance values by average mark resulting from Tukey's HSD of learning group pre-test/post-test answers to the item What is 18×1/3?

Average mark	Mean differences	Standard Error	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
5.5	-.250	.227	.999	-1.05	.55
6.5	-.375	.160	.598	-.94	.19
7.0	-.429	.172	.482	-1.03	.18
7.5	-.500	.160	.145	-1.06	.06
8.0	-.833*	.185	.002	-1.49	-.18
8.5	-1.000*	.203	.000	-1.71	-.29
9.0	-1.000*	.172	.000	-1.60	-.40
9.5	-.900*	.144	.000	-1.41	-.39

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Teachers also can compare correct answer probability and odds ratio by average mark. Table V presents those data for control and learning groups.

TABLE V

Control groups' and learning groups' correct answer probability and its correspondent odds ratio by average mark level to the item *What is 18 × 1/3?*

	Correct answer probability				*Odds ratio*			
	control groups		*learning groups*		*control groups*		*learning groups*	
average mark	*pre-test*	*post-test*	*pre-test*	*post-test*	*pre-test*	*post-test*	*pre-test*	*post-test*
5.5	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	1.00
6.5	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.50
7	0.00	0.00	0.11	0.25	0.00	0.00	0.13	0.33
7.5	0.33	0.00	0.13	0.63	0.50	0.00	0.14	1.67
8	0.00	0.00	0.00	0.67	0.00	0.00	0.00	2.00
8.5	0.00	0.00	0.00	0.67	0.00	0.00	0.00	2.00
9	0.25	0.25	0.00	0.86	0.33	0.33	0.00	6.00
9.5	0.25	0.00	0.00	0.82	0.33	0.00	0.00	4.50

We performed a covariate analysis (ANCOVA) to statistically evaluate the effect of the average mark on item response. ANCOVA represents a recommended data statistical analysis in our case and it is a combined application of ANOVA and regression analysis (Kline, 2009; Pardo & Ruiz, 2012). Here we take the average mark as a covariate, i.e. a variable that predicts the outcome but is ideally unrelated to the independent variable (Kline, 2013). The obtained results indicate (once the effect of the average mark was controlled): 1) a significant improvement on item response to the items *What is* $18 \times \frac{1}{3}$? (F = 31.52, p = .000) and *What is* $\frac{1}{3} \times 18$? (F = 34.42, p = .000); 2) there is a significant difference between pre-test post-test answers to both items (F = 38.33, p = .000 and F = 36.69, p = .000 respectively); 3) there is a significant difference between the learning condition groups and the control groups in post-test correct response to those items (F = 59.89, p = .000 and F = 59.02, p = .000 respectively); and, 4) the average mark as covariate is related to differences on pre-test post-test answers to both items (F = 6.92, p = .010 and F = 8.46, p = .005 respectively).

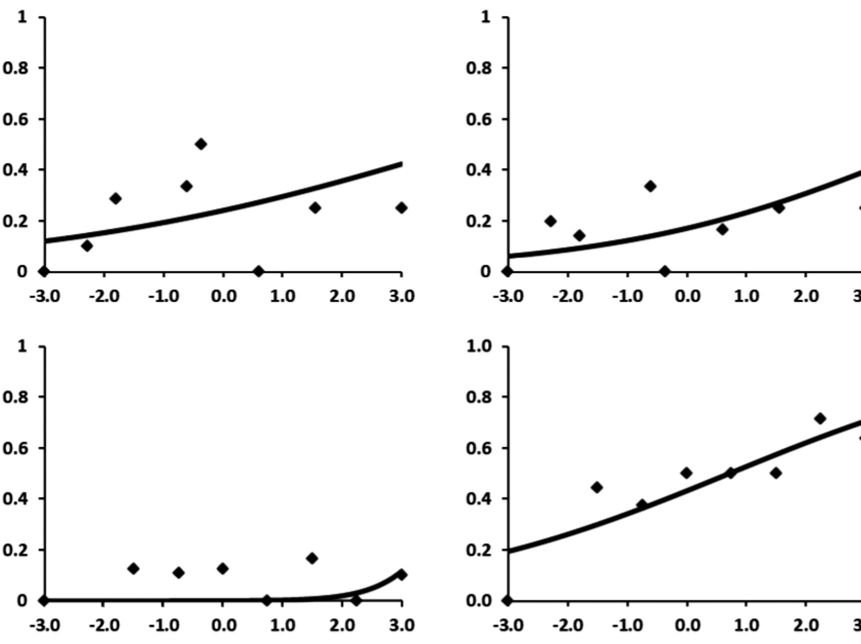


Figure 4. Item response curves depicting the probability of success on the item *Which is the number that multiplied by one half equals seven*? as a function of children´s average academic mark, taken as the ability parameter. Control groups graphs (above) show no distinctive differences between pre-test (left) to post-test (right) answers, whereas learning groups curves (below) show post-test (right) marked improvements in the probability of correct answer, in particular for those children with the higher average academic mark.

3.3. *Numerical division items*

On the other hand, to solve fraction division items, even when they are represented verbally, implies difficult concepts for many children. *Figure 4* displays the item response curves for control and learning groups corresponding to the item: *Which is the number that multiplied by one half equals seven?* The increase in correct response probability is lower than in the multiplication item reviewed before.

If teachers perform a Student's two-tailed paired t-test to analyse the differences observed in this item they can observe that the learning group, in general, showed better results at post-test assessment: $t(54) = -6.465$, $p = .000$. But the item response curve indicates that only children with greater average marks have a better post-test performance. Teachers can corroborate it with a Student's two-tailed paired t-test applied to each average mark. This method produces the calculations displayed in Table VI and they confirm that only children with average marks greater than or equal to 9.0 showed a significant improvement on item response ($p < .01$).

TABLE VI

Mean differences, standard deviations, standard error differences, and Student's two-tailed paired *t*-test values by average mark level of learning group pre-test/post-test answer to the item *Which is the number that multiplied by one half equals seven*?

	Paired Differences							
Average mark	*Mean Difference*	*Std. Deviation*	*Std. Error Difference*	*95% Confidence Interval of the Difference*		*t*	*df*	*Sig. (two-tailed)*
				Lower	*Upper*			
9.5	-.600	.516	.163	-.969	-.231	-3.674	9	.005
9.0	-.714	.488	.184	-1.166	-.263	-3.873	6	.008
8.5	-.400	.548	.245	-1.080	.280	-1.633	4	.178
8.0	-.500	.548	.224	-1.075	.075	-2.236	5	.076
7.5	-.375	.518	.183	-.808	.058	-2.049	7	.080
7.0	-.286	.488	.184	-.737	.166	-1.549	6	.172
6.5	-.375	.518	.183	-.808	.058	-2.049	7	.080
5.5	.000	.000	.000					

4. Conclusions

We present a microgenetic study that focuses on specific proximal influences in cognitive change (Siegler & Chen, 1998). The learning instruction period was brief, three and a half weeks; therefore, we can assume that most important social factors affecting learning remained unchanged for learning and control groups except our instruction sessions with the first groups.

As mentioned above, in this paper we present data about a very important issue related to opposing approaches to the introduction of multiplication or division of fractions: One point of view that contends that fractions and decimals need to be treated differently from whole numbers, and a second approach, which we adopt, that is based on the construction of general relational schemes for any basic mathematical operation. We propose here that fraction multiplication and division must be developed as relational schemes and, basically, as a conceptual generalisation of these operations with natural numbers. We have designed activities in order to develop a general relational scheme of the multiplication and division of numbers. We do not agree that children must understand that fraction multiplication and division produce different outcomes, depending on whether the numbers involved are greater than or less than 1. We could promote the construction of two different sets of numbers if we teach children that understanding fractions requires recognizing that many properties of natural numbers are not properties of numbers in general (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015, Siegler, Thompson, & Schneider, 2011), and this would produce the need of a different procedural scheme to multiply or divide fraction numbers.

On the other hand, we avoid mechanistic procedures ($\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; the "invert-the-divisor-and-multiply" procedure) because using them children can develop a fraction definition as if it is composed of two whole numbers (numerator and denominator) that must be conceptualised separately in multiplication and division, obscuring the fraction concept as a unity.

Our approach probably allows elementary school children to construct a system of numbers such that multiplication and division, products and quotients, are defined by every number comprised in the system. At the elementary school level, that system corresponds to rational numbers, $\mathbb{Q}$. Within that system, every number can be expressed as the product or quotient of, at least, two other numbers. That is, every two numbers of the system can be related according to the definitions of multiplication and division to a number termed product or quotient. For example, 15 can be represented as the product of one-half times ten, or the quotient of five divided by one third, i.e. the number that that multiplied by one third equals five.

The authors attempt a first approximation analysis and select students' average mark as the parameter that could related to the probability of a right answer to an item. We describe here an analysis procedure that permits a visualisation of the learning process as a function of average marks and we present data that supports the validity of this approach. According to the social constructionism approach (Gergen, 2001), we assume that all learning is an active process of social construction. Average marks and item difficulty can be modified by social interaction processes. Children can improve or worsen their academic marks as a result of different social factors. The probability of success in answering an item depends on the average mark of the student. Average mark is basically a socially defined index that represents academic performance, and this index is only one element of the universal set of social indexes designed to assess and analyse learning processes. The item difficulty depends on the learning process. Children pick up a good deal of expertise in the learning process and consequently, the item difficulty diminishes substantially. The logistic function depicts the probability of success on an item as a function of a person's specified parameter, i.e. it is possible to analyse learning progress in relation to any variable that can be evaluated with non-categorical scales. Consequently, it is necessary to research further significant relationships among other relevant social factors and the probability of success in an item. Here a tool is offered to analyse the relationships between some of these variables and the methods of assessment that teachers apply in their courses.

In this study, we examined whether elementary school children can construct a system of numbers such that fraction multiplication and division are based on the construction of general relational schemes. Learning groups increase their performance following this kind of program. There are statistically significant differences between any general scores, except for word multiplication items. Finally from a Bayesian sequential analysis, we obtained that the results are statistically robust.

Acknowledgments

ADF acknowledge PRODEP for the grant of the NPTC project (BUAP-PTC-457, DSA / 103.5 / 16/11069); ADF acknowledge the Sistema Nacional de Investigadores (SNI) and CONACyT. ADF and AFDC acknowledge to the authorities of the department of psychology, BUAP.

References

Baker, F. B. (2001). *The Basics of Item Response Theory.* 2nd ed. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). Children's mathematics: Cognitively guided instruction. 2nd ed. Portsmouth, NH: Heinemann.

Chen, Z., & Siegler, R. S. (2000). Across the great divide: Bridging the gap between understanding of toddlers' and older children's thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *65*, v–96.

DeVellis, R. F. (2017) *Scale Development. Theory and Applications.* 4th ed. Thousand Oaks, CA: SAGE

Díaz-Cárdenas, A. F., Sankey-García, M. R., Díaz-Furlong, A., Díaz-Furlong, H. A. (2014) Educación por competencias y desarrollo social del procesamiento cognitivo. In Patiño Tovar, H. y López Cortés, A. (comp.) *Prevención y Evaluación en Psicología*. (pp. 75 – 97). México: Manual Moderno.

Díaz-Furlong, H. A., Díaz-Cárdenas, A. F., Díaz-Furlong, A. (Eds.) (2017). *Literacy and cognition: Development and learning.* Berlin: Verlag/Publisher. LAP Lambert Academic Publishing.

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals.* Portsmouth: Heinemann.

Empson, S. B., Levi, L., and Carpenter T. P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In J. Cai, E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*, pp. 409 – 428. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi 10.1007/978-3-642-17735-4_22

Fan, X., & Sun, S. (2013). Item Response Theory. In Timothy Teo (Ed.), *Handbook of Quantitative Methods for Educational Research* (pp. 45–67). Rotterdam: Sense Publishers.

Fazio, L. K. & Siegler, R. S. (2013). Microgenetic Learning Analysis: A Distinction without a Difference. *Human Development*, 56: 52 – 58. doi: 10.1159/000345542

Gergen, K. J. (2001). From mind to relationship: The emerging challenge. *Education Canada-Toronto-*, 41(1): 8 -11.

Gergen, K. J. (2009). Pragmatics and pluralism in explaining human action. *Behavior and Philosophy*, *37*, 127-133

Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Preservice Teachers' Misconceptions in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (1), 95 – 102.

Greer, B. (1988). Nonconservation of multiplication and division: Analysis of a symptom. *The Journal of Mathematical Behavior.*

Kline, R. B. (2009). *Becoming a behavioral science researcher: a guide to producing research that matters.* New York: The Guilford Press.

Kline, R. B. (2013). *Beyond significance testing : statistics reform in the behavioral sciences.* 2nd ed. Washington, D.C.: American Psychological Association.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* 2nd ed. Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201 – 221. doi: 10.1016/j.dr.2015.07.008

Musser, G.L., Burger, W.F., & Peterson, B. E. (2008). Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach. 8th ed. Jefferson City: John Wiley & Sons

National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2018). *How People Learn II: Learners, Contexts, and Cultures.* Washington, D.C.: The National Academies Press. doi: https://doi.org/10.17226/24783

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* Paris: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264255425-en

Pardo, A., Ruiz, M. A., & San Martín, R. (2009). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud I.* Madrid: Editorial Síntesis.

Pardo, A., & Ruiz, M. A. (2012). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud III.* Madrid: Editorial Síntesis.

Pardo, A., & San Martín, R. (2010). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud II*. Madrid: Editorial Síntesis.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Piaget, J. (1975). *L'Équilibration des Structures Cognitves*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basil Books, Inc.

Rogers, T. T. & McClelland, J. L. (2004). *Semantic cognition. A parallel distributed processing approach*. Cambridge, MA: The MIT press

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE #2010-4039). Washington, D.C.: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from whatworks.ed.gov/ publications/practiceguides.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62, 273–296. http://dx.doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R. S. and Lortie-Forgues, H. (2015) Conceptual Knowledge of Fraction Arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*, (3), 909 – 918. http://dx.doi.org/10.1037/edu0000025

Siegler, R. S., & Chen, Z. (1998) Developmental differences in rule learning: A microgenetic analysis. *Cognitive Psychology*, *36*, 273 – 310. doi: 10.1006/cogp.1998.0686

Simona, M. A., Placab, N., Avitzurc, A. & Karad, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52: 122 – 133. doi: 10.1016/j.jmathb.2018.03.004

Torbeyns, J., Schneider, M, Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents *Learning and Instruction*, *37*, 5 -13. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Vygotsky L. S. (1986) *Thought and language*. Cambridge, MA: The MIT Press

Wu, M. (2013) Using Item Response Theory as a Tool in Educational Measurement. In M. Mo Ching Mok (ed.), *Self-directed Learning Oriented Assessments in the Asia-Pacific, Education in the Asia-Pacific Region: Issues, Concerns and Prospects 18*. (pp.: 157 – 185), Dordrecht: Springer. DOI 10.1007/978-94-007-4507-0_9

Zapatera Llinares, A. (2017). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 20 (3): 87 - 114. doi: 10.12802/relime.18.2114

Autores

Alfonso F. Díaz-Cárdenas. Universidad Autónoma de Puebla. México. diazcard@yahoo.com

Alfonso Díaz-Furlong. Universidad Autónoma de Puebla. México. alfonso.furlong@correo.buap.mx

Héctor Adrián Díaz-Furlong. Universidad Autónoma de Puebla. México.
hector.diazfurlong@correo.buap.mx

M. Rayo Sankey-García. SEP Puebla. México. ryathome@hotmail.com

Gemma Zago-Portillo. SEP Puebla. México. gemmazagop@hotmail.com

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

En este último número del vigésimo segundo volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Aarón Víctor Reyes Rodríguez	Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
Agustín Grijalva Monteverde	Universidad de Sonora, México
Alberto Camacho	ITESM - Campus Monterrey, México
Ana María Ojeda	Cinvestav-IPN, México
Ana Serradó Bayes	Universidad de Cádiz, España
Antonio Estepa Castro	Universidad de Jaén, España
Aurélie Chesnais	Universidad de Montpellier, Francia
Aurora Gallardo	Cinvestav-IPN, México
Bertha Ivonne Sánchez Luján	Instituto Tecnológico Nacional de México, México
Blanca Ruiz Henrandez	ITESM- Campus Monterrey, México
Cecilia Crespo Crespo	Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico - UTN, Argentina
Crisólogo Dolores	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Cristina Ochoviet	Consejo de Formación en Educación, Uruguay.
Daniela Soto	Universidad de Santiago de Chile, Chile
David Block Sevilla	Cinvestav-IPN, México
David Zaldívar	Universidad Autónoma de Coahuila, México
Diana Torres	Cinvestav-IPN, México
Eduardo Carrasco	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
Evelia Reséndiz	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
Flor Rodríguez	Uniersidad Autónoma de Guerrero, México
Francisco Cordero	Cinvestav-IPN, México
Gabriel Sánchez	Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
Gabriela Buendía Ábalos	Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, México.
Gisela Montiel Espinosa	Cinvestav-IPN, México
Guadalupe Cabañas	Unicen, Argentina
Guadalupe Simón Ramos	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

Gustavo Martínez	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Ida Ah Chee	The University of Hong Kong, China
Ileana Gómez Flores	Facultad de Artes, Universidad Autónoma de Chihuahua, México
Javier García García	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Jesús Enrique Pinto Sosa	Universidad Autónoma de Yucatán, México
João Pedro da Ponte	Universidad de Lisboa, Portugal
Joaquín Giménez Rodríguez	Universidad de Barcelona, España
Jorge Ávila Contreras	Universidad de los Lagos, Chile
José Armando Albert Huerta	Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México
José Carrillo Yañez	Universidad de Huelva, España
José Luis Cortina	Universidad Pedagógica Nacional, México
Josep Gascón Pérez	Universitat Autònoma de Barcelona, España
Leonora Díaz	Independiente, Chile
Liliana Mabel Tauber	Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Luis Manuel Cabrera Chim	PIDPDM, Cinvestav-IPN, México
Luis Radford	Laurentian University, Canadá
Marcel David Puchulu	Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Marcela Ferrari Escolá	Universidad Autónoma de Guerrero, México
María del Mar Moreno Moreno	Universidad de Lleida, España
María Fernanda Delprato	Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
María Guadalupe Amado Moreno	Instituto Tecnológico de Mexicali, México
María Teresa Fernández Blanco	Universidad de Santiago de Compostela, España
Mario Caballero	Cinvestav-IPN, México
Matías Arce Sánchez	Universidad de Valladolid, España
Nuria Planas	Universitat Autònoma de Barcelona, España
Paola Valero	Aalborg Universitet, Dinamarca
Pedro Nicolás	Universidad de Murcia, España
Pilar Moreno Crespo	Universidad de Huelva, España
Pilar Peña Rincón	Universidad Católica de Chile, Chile
Rebeca Flores	PIDPDM, Cinvestav-IPN, México
Rosa María Farfán	Cinvestav-IPN, México
Ruth Rodríguez	ITESM- Campus Monterrey, México
Sabrina Garbin Dall' Alba	Universidad Simón Bolivar, México
Salvador Llinares	Universidad de Alicante, España
Silvia Elena Ibarra Olmos	Universidad de Sonora, México
Uilises Xolocotzin	Cinvestav-IPN, México
Víctor Larios Osorio	Universidad Autónoma de Querétaro, México

VOLUMEN 0, 1997

Presentación de Relime / R. M. FARFÁN / La investigación en matemática educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior.

VOLUMEN 1, 1998

I. GUZMÁN / Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. L. RICO / Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. M. ARTIGUE / Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? F. CORDERO / El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones.

VOLUMEN 2, 1999

H. J. DE LEÓN / Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. V. A. LÓPEZ / Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. L. D. MELGAREJO / Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en tutoriales inteligentes. E. MORALES / Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9º grado de educación básica.

M. ANIDO, H. E. RUBIO / Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya. B. GÓMEZ / Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías”. C. RIZO, L. CAMPISTROUS / Estrategias de resolución de problemas en la escuela. L. RADFORD / La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica.

VOLUMEN 3, 2000

D. DENNIS, J. CONFREY / La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. B. D’AMORE, B. MARTINI / Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. E. DUBINSKY / De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. M. SIERRA, M. T. GONZÁLEZ, C. LÓPEZ / Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad.

Y. O’FARRILL / Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. Óptima-Geometría. G. MUÑOZ / Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. M. B. FERNÁNDEZ / Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. C. CUBILLO, T.ORTEGA / Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. M. F. LASALVIA, J. D. PIQUET / Construcción de gráficos de funciones: “Continuidad y prototipos”.

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D. E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

M. A. ANIDO, R. LÓPEZ, H. E. RUBIO / Las superficies en el aprendizaje de la geometría. V. LARIOS / La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. A. L. LAVALLE, E. B. MICHELI, N. RUBIO / Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Y. OTÁLORA, M. OROZCO / ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco? E. RESENDIZ / La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. R. UICAB, A. OKTAÇ / Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.

RELIME ESPECIAL, 2006

L. RADFORD / Introducción. Semiótica y Educación Matemática. M. OTTE / Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. R. DUVAL / Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? R. CANTORAL, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA, G. MARTÍNEZ / Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. L. RADFORD / Elementos de una teoría cultural de la objetivación. J. D. GODINO, V. FONT, M. WILHELMI / Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

A KOUKKOUFIS, J. WILLIAMS / Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers. B. D´AMORE / Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. A. GAGATSIS, I. ELIA, N. MOUSOULIDES / Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? A. SÁENZ-LUDLOW / Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth. G. T. BAGNI / Everyday and Mathematical Language 100 Years after the Publication of "On Denoting" by Bertrand Russell. F. ARZARELLO / Semiosis as a Multimodal Process. B. D'AMORE / Conclusiones y perspectivas de investigación futura.

VOLUMEN 10, 2007

F. CORDERO, R. FLORES / El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. B. D´AMORE, M. I. FANDIÑO / Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. C. DOLORES, I. CUEVAS / Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. C. L. OLIVEIRA, G. da SILVA NUNES / Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível. A. ROMO, A. OKTAÇ / Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. L. ZUÑIGA / El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo.

R. CANTORAL / Índices, bases de citas y factor de impacto. ¿Una política editorial para Relime? B. D´AMORE, J. D. GODINO / El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. T. M. MENDONÇA, S. M. PINTO, I. M. CAZORLA, E. RIBEIRO / As estruturas aditivas nas séries iníciais doensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. J. G. MOLINA, A. OKTAÇ / Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. G. TORREGROSA, H. QUESADA / Coordinación de procesos cognitivos en geometría.

R. CANTORAL / ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? A. ALSINA i PASTELLS / ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. J. J. DÍAZ, V. BERMEJO / Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. U. MALASPINA / Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. C. R. MURO, P. CAMARENA, R. C. FLORES / Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. M. L. RODRÍGUEZ, L. RICARDO / El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana.

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL, T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A. R. CORICA, M. R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B. GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J. A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J. P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. A. VIGGIANI, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C. ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO, C. CEN, L. SUÁREZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA, R. ROA / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

R. CANTORAL / Relime en ERIH. J. L. BELMONTE, M. SIERRA / Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. E. CANUL, C. DOLORES, G. MARTÍNEZ-SIERRA / De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. J. GASCÓN / Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. V. Y. KATAOKA, A. C. S. de OLIVEIRA, A. de SOUZA, A. RODRIGUES, M. SILVA / A Educação Estatística no Ensino Fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção.

R. CANTORAL / Quince años y nuevos retos para Relime. A. CONTRERAS, M. GARCÍA / Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. M. L. MAGALHÃES / O ensino de aritmética na escola nova: Contribuições de dois escritos autobiográficos para a história da educação matemática (Minas Gerais, Brasil, primeiras décadas do século xx). A. T. de OLIVEIRA, G. de la ROCQUE / O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. M. POCHULU, V. FONT / Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa.

VOLUMEN 15, 2012

R. CANTORAL / *Nani gigantum humeris insidentes*. Relime y el Acceso Abierto. C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES / Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. G. MARTÍNEZ / Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. J. J. ORTIZ, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS */* Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. M. RIBEIRO, R. MONTEIRO, J. CARRILLO / Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / 0.167. J. M. ANDRADE, M. J. SARAIVA / Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. A. ASSIS, J. D. GODINO, C. FRADE / As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. D. VEGA-CASTRO, M. MOLINA, E. CASTRO / Sentido estructural de estudiantes de Bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

R. CANTORAL, V. GARNICA / 2012, año nuevo: Relime – Bolema. A. BARBOSA, I. VALE, P. PALHARES / Pattern tasks: thinking processes used by 6th grade students. F. CORDERO, H. SILVA-CROCCI / Matemática educativa, identidad y latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. M. A. LONJEDO, M. P. HUERTA, M. CARLES FARIÑA / Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. M. L. OLIVERAS, M. E. GAVARRETE / Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. M. STEPHENS, A. RIBEIRO / Working towards algebra: the importance of relational thinking.

VOLUMEN 16, 2013

R. CANTORAL / Tendencias: Los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. N. CLIMENT, J. ROMERO, J. CARRILLO, M. C. MUÑOZ, L. C. CONTRERAS / ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. A. ALVARADO, M. T. GONZÁLEZ / Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. E. ALONSO / Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. S. SANHUEZA, M. C. PENALVA, M. FRIZ / Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría.

R. CANTORAL / *Relime:* DOI y OJS. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO / Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. S. INZUNSA, J. V. JIMÉNEZ / Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. M. JARERO, E. APARICIO, L. SOSA / Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. J. RUIZ, P. DÁVILA, J. ETXEBERRIA, J. SARASUA / Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005.

R. CANTORAL / El talón de Aquiles. L. ALBARRACÍN, N. GORGORIÓ / Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. A. M. OLLER, J. M. GAIRÍN / La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. J. PRIOR, G. TORREGROSA / Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. L. A. DE SOUZA, A. V. MARAFIOTI GARNICA / As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro.

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / El quehacer del matemático educativo: el pasaje del *sujeto* a su *entorno*. I. M. ESCUDERO, J. M. GAVILÁN, G. SÁNCHEZ / Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. P. LEGER, G. GÁLVEZ, M. INOSTROZA, L. CUBILLOS, G. LUCI, E. TANTER, D. COSMELLI, J. SOTO / ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares. G. OBANDO, C. E. VASCO, L. C. ARBOLEDA / Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. S. E. PARADA, F. PLUVINAGE / Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: *Relme*, *Clame* y *Relime*. / J. JUSTIN, C. L. OLIVEIRA, L. MORENO / Registros de representação semiótica e geometría analítica: uma experiência com futuros professores. S. PALMAS, D. BLOCK / Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. H. J. RUIZ, Y. RIASCOS / ¿4^3 se puede leer como “cuatro subido a la tres”?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación polinomial. C. SÁENZ, A. LEBRIJA / La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz.

R. CANTORAL / No hay revista sin comunidad, ni comunidad sin diálogo. V. ALBANESE, F. J. PERALES / Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. C. FONSECA, J. GASCÓN, C. OLIVEIRA / Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. A. MORALES, F. CORDERO / La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. F. VISEU, L. MENEZES / Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2014

A. KUZNIAK, P. R. RICHARD / Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. J. C. RAUSCHER, R. ADJIAGE / Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. B. PARZYSZ / Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. A. BRACONNE / Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ? K. NIKOLANTONAKIS, L. VIVIER / Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. S. COUTAT / Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? X. XISTOURI, D. PITTA, A. GAGATSIS / Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. P. MICHAEL, A. GAGATSIS / Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. E. MONTOYA, A. MENA, J. MENA / Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. I. ELIA, K. EVANGELOU, K. HADJITTOOULI, M. VAN DEN HEUVEL / A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

R. I. BARRERA / Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en evidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : mediation semiotique et parcours des élèves. A. GAGATSIS, E. DELIYIANNI / Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. V. CARRIÓN, F. PLUVINAGE / Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. D. TANGUAY, L. GEERAERTS / Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : Comment intégrer le travail avec les LGD ? M. TESSIER, P. R. RICHARD, N. LEDUC, M. GAGNON / Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : genèse d'un espace de travail géométrique idoine. M. BLOSSIER, P. R. RICHARD / Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. J. MITHALAL / Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géométrie dynamique 3D. I. M. GÓMEZ, J. ESCRIBANO / Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. A. KUZNIAK / Travail mathématique et domaines mathématiques. S. R. DE COTRET / Espaces de travail / espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? D. ZALDÍVAR, C. CEN, E. BRICEÑO, M. MÉNDEZ, F. CORDERO / El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. O. FIGUERAS, P. FLORES, F. PLUVINAGE / La mediación docente y los espacios de trabajo matemático.

VOLUMEN 18, 2015

R. CANTORAL, G. MONTIEL, D. REYES-GASPERINI / El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. J. ARRIETA, L. DÍAZ / Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. A. MAZ-MACHADO, L. RICO / Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX. L. SOLANILLA, A. CELI TAMAYO, G. A. PAREJA / Memoria sobre la emergencia de las funciones elípticas. V. H. G. DE SOUZA, R. NOGUEIRA DE LIMA, T. M. M. CAMPOS / A functional graphic approach to inequations.

P. PEÑA-RINCÓN, C. TAMAYO-OSORIO, A. PARRA / Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. A. P. AIRES, H. CAMPOS, R. POÇAS / Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. B. D'AMORE, M. FANDIÑO, M. IORI, M. MATTEUZZI / Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". J. GARCÍA-GARCÍA, F. M. RODRÍGUEZ, C. NAVARRO / Las estrategias utilizadas por los niños *Tee Savi* en la resolución de problemas aritméticos. V. C. LLANOS, M. R. OTERO / La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado.

P. VALERO, M. ANDRADE-MOLINA, A. MONTECINO / Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. G. A. MARMOLEJO, M. T. GONZÁLEZ / Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA, E. MONTOYA-DELGADILLO, A. MORALES, M. PARRAGUEZ / El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. J. PEIXOTO / Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação. E. A. SÁNCHEZ, A. L. GÓMEZ-BLANCARTE / La negociación de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística.

VOLUMEN 19, 2016

A. MÁRQUEZ, I. ORDORIKA, A. DÍAZ-BARRIGA, R. CANTORAL, W. DE VRIES / Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. P. ARTEAGA, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS, G. CAÑADAS / Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. M. J. CARVALHO, A. FREITAS / Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no ensino secundário português. M. POCHULU, V. FONT, M. RODRÍGUEZ / Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. R. RODRÍGUEZ, S. QUIROZ / El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

R. CANTORAL / Retos y logros para la comunidad de Matemática Educativa... / J. B. BÚA-ARES, M. T. FERNÁNDEZ, M. J. SALINAS / Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. T. GARCÍA, P. GONZÁLEZ, J. A. GONZÁLEZ, C. RODRÍGUEZ, L. BETTS / On-line assessment of the process involved in maths problem - solving in fifth and sixth grade students: self - regulation and achievement. C. DIAS, L. SANTOS / Portefólio reflexivo de matemática enquanto instrumento de autorregulação das aprendizagens de alunos do ensino secundário. D. LAGO-PEREIRA, M. DE CARVALHO-BORBA / Seres humanos - com - internet ou internet - com - seres humanos: uma troca de papéis?

R. CANTORAL / La publicación científica y algunos fenómenos emergentes. M. DEL P. BELTRÁN, G. MONTIEL / La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. C. STEEGMAN, A. PÉREZ-BONILLA, M. PRAT, A. A. JUAN / Math-Elearning@cat: Factores claves del uso de las TIC en Educación Matemática Secundaria. P. GÓMEZ, M. C. CAÑADAS / Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. M. P. HUERTA, P. I. EDO, R. AMORÓS, J. ARNAU / Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional.

VOLUMEN 20, 2017

G. MONTIEL / La transición de Relime al contexto editorial digital. / C. ALMEIDA, L. CASAS, R. LUENGO / Estudo da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º anos (17-18 anos de idade) de escolaridade sobre o conceito de Probabilidade: O contributo das teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold. A. ANDRADE, A. LOTERO, E. ANDRADE / La hipótesis de los cuadros de significado en la solución de problemas matemáticos. J. P. DA PONTE, J. MATA, M. QUARESMA, I. VELEZ / Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. S. MARTÍNEZ, J. M. MUÑOZ, A. M. OLLER, T. ORTEGA / Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / Nuevo factor de impacto en WoS. M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato. J. GASCO / La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). A. MALLART, J. DEULOFEU / Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. K. PÉREZ, J. E. HERNÁNDEZ / La elaboración de preguntas en la enseñanza de la comprensión de problemas matemáticos.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / Identidad y visibilidad. El binomio ideal. Relime en los índices nacionales, regionales y mundiales. F. J. ALMUNA / The role of context and context familiarity on mathematics problems. D. ARECES, M. CUELI, T. GARCÍA, C. RODRÍGUEZ, P. GONZÁLEZ / Intervención en dificultades de aprendizaje de las

R. FIORAVANTI, I. M. GRECA, J. A. MENESES / Caminhos do ensino de estatística para a área da saúde. J. GALLARDO, V. A. QUINTANILLA / El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI, B. CASTRO PÉREZ, D. W. RÍOS JARQUÍN / ¿Qué sabemos de los lectores de Relime? V. MOLFINO, C. OCHOVIET / Enseñanza de la matemática para la justicia social en cursos de postgraduación. D. MATO-VÁZQUEZ, R. CHAO-FERNÁNDEZ, A. CHAO-FERNÁNDEZ / Efectos de enseñar matemáticas a través de actividades musicales. F. CORDERO, T. DEL VALLE, A. MORALES / Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. A. SAORÍN VILLA, G. TORREGROSA GIRONÉS, H. QUESADA VILELLA / Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico.

R. CANTORAL / Formas de difusión institucional del conocimiento: un papel para *Relime*. P. HERNÁNDEZ, G. BUENDÍA / Significados para la matemática escolar a partir de su uso en un escenario extraescolar. Un ejemplo con la propiedad periódica. C. POMPEU, I. M. GÓMEZ / Aprendizaje matemático y estrategias de identidad. Un caso de Educación de Personas Adultas en Brasil. P. PERRY, L. CAMARGO, C. SAMPER / Puntos medios en triángulo: un caso de construcción de significado personal y mediación semiótica. A. F. DÍAZ-CÁRDENAS, A. DÍAZ-FURLONG, H. A. DÍAZ-FURLONG, M. R. SANKEY-GARCÍA, G. ZAGO-PORTILLO / Multiplication and division of fractions: Numerical cognition development and assessment procedures.

Suscripción a Relime

Costo del volumen 22 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 22, Número 3

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Noviembre de 2019
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes