EDITORIAL

Hacia una comunicación integrada
en el contexto de la ciencia abierta
Gisela Montiel-Espinosa

ARTÍCULOS

Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para
introducir la inferencia estadística informal en primaria
Soledad Estrella, Sergio Morales, Maritza Méndez-Reina,
Pedro Vidal-Szabó, Brahiam Ramírez, Alejandra Mondaca-Saavedra

Construcción y validación de rúbricas para valorar
la idoneidad didáctica de clases de matemática
María Virginia Figueroa, Omar Malet

Educación estadística y probabilística
para futuros docentes españoles de infantil y primaria:
características, enfoque y metodología
Ángel Alsina, Claudia Vásquez, Israel García-Alonso, Ainhoa Berciano

Uso de um artefato computacional para explorar
a covariação: um estudo das gêneses instrumentais
de licenciandos em matemática
César Thiago Silva, Verônica Gitirana

SOBRE LA RELIME

RELIME 27-1

02701

9 771665 243002

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 27, Núm. 1, marzo 2024

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 27, Núm. 1, 2024

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2024 Impresa en México

Volumen 27 – Número 1 – 2024

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2024

Volumen 27 Número 1 Marzo de 2024

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

5 Hacia una comunicación integrada
en el contexto de la ciencia abierta
Gisela Montiel-Espinosa

ARTÍCULOS

11 Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para
introducir la inferencia estadística informal en primaria
*Soledad Estrella, Sergio Morales, Maritza Méndez-Reina,
Pedro Vidal-Szabó, Brahiam Ramírez, Alejandra Mondaca-Saavedra*

43 Construcción y validación de rúbricas para valorar
la idoneidad didáctica de clases de matemática
María Virginia Figueroa, Omar Malet

73 Educación estadística y probabilística
para futuros docentes españoles de infantil y primaria:
características, enfoque y metodología
Ángel Alsina, Claudia Vásquez, Israel García-Alonso, Ainhoa Berciano

105 Uso de um artefato computacional para explorar
a covariação: um estudo das gêneses instrumentais
de licenciandos em matemática
César Thiago Silva, Verônica Gitirana

139 SOBRE LA RELIME

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

EDITORIAL

HACIA UNA COMUNICACIÓN INTEGRADA EN EL CONTEXTO DE LA CIENCIA ABIERTA

Towards an integrated communication in the context of open science

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

En la editorial donde reflexionamos en torno a *la revisión por pares como un diálogo* (Montiel-Espinosa, 2023) comenzamos a compartir algunos de los retos que enfrenta una revista en el contexto de la Ciencia Abierta (CA), y dejamos ver que algunos se relacionan con la infraestructura o las capacidades técnicas y tecnológicas que dan soporte a las revistas. Sin embargo, otros, quizá los menos visibles de forma inmediata, pero de gran impacto, se relacionan con generar condiciones de publicación (políticas y normas para la recepción, proceso de evaluación y difusión de artículos) que apoyen a que la producción de conocimiento científico sea, efectivamente, un quehacer inclusivo, equitativo y sostenible; tal como establece la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura en su *Kit de herramientas de Ciencia Abierta* (UNESCO, 2023).

Quizá el *acceso abierto* siga siendo la característica que más se asocie con las acciones para hacer accesible la investigación científica a todas y todos. Sin embargo, para ampliar el beneficio de este acceso en la sociedad, el acceso abierto se ha articulado con otras prácticas –*publicación continua*, *datos abiertos* y *revisión por pares abierta*, por mencionar las más notorias en la última década– y ha transitado del acceso al archivo del artículo científico –el PDF– al acceso a la información y a la aportación científica dentro de él (Montiel-Espinosa, 2017). Así, los buscadores, bases de datos, índices y diversas herramientas tecnológicas de investigación pueden tener acceso a las piezas clave del contenido de un artículo, distinguiendo el tipo de información con la que tratan.

Montiel-Espinosa, G. (2024). Hacia una comunicación integrada en el contexto de la ciencia abierta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(1), 5-10. https://doi.org/10.12802/relime.24.2710

Si a esto le sumamos el cambio de paradigma en relación con “el resultado de la investigación”, que transitó de poner atención solo en el producto final hacia reconocer aportaciones que se logran durante todo el proceso (transparente) de la investigación, la publicación en acceso abierto se convierte en un recurso para el diálogo, la formación y el impacto, tanto académico como social, si logramos conectar todas estas prácticas de CA en el quehacer científico.

Actualmente, al realizar el envío de un manuscrito a la Relime se solicita “Tener accesible información complementaria en archivos de apoyo durante el proceso de revisión, como pueden ser: diseños didácticos, datos empíricos, los análisis completos de datos, entre otros” (Relime, s.f.). Esto implica que solo las y los involucrados en el proceso de revisión tengan acceso a dicha información complementaria, sin embargo, en un contexto de CA lo indicado sería que todo aquello que diese soporte a la comunicación de instrumentos, métodos, análisis y conclusiones, incluyendo los datos, esté publicado en un repositorio para consulta de todo público.

Sin embargo, *abrir* esta información antes del proceso de evaluación de un manuscrito puede hacer pública también la identidad de al menos la persona responsable de cargar los documentos al repositorio en cuestión, lo que podría *dificultar* las tradicionales revisiones por pares doble-ciego. Hablamos de dificultad y no de imposibilidad porque, por un lado, pueden crearse perfiles auxiliares para cargar la información a los repositorios y mantener el anonimato del responsable de la investigación (aunque siempre se otorga crédito a la investigación de donde surgen los datos); pero incluso si el perfil personal que haga dicha carga fuese el responsable de producir los datos y cargarlos al repositorio, estos roles no son suficientes para considerar la autoría de un artículo de investigación (véase Montiel-Espinosa, 2022). Por otro lado, una vez que toda la información de una investigación se carga a un repositorio, ésta puede ser usada por cualquier persona para realizar una nueva investigación –por ejemplo, para realizar un análisis secundario con los datos– y, en ese sentido, la investigación y la comunicación de sus resultados corresponden a diferentes investigadores. En estos casos el anonimato de la autoría se podría mantener en la revisión.

Un primer paso hacia esta comunicación más integral y transparente de los procesos de la investigación, y no solo de los resultados, es que una vez aceptado un manuscrito se cargue la información al repositorio y se hagan los vínculos correspondientes entre ésta y el artículo.

Para bosquejar un ejemplo e ir reflexionando sobre los escenarios futuros (a corto y mediano plazo) y el potencial de estas prácticas de CA, voy a aprovechar que en este número de la Relime tenemos dos artículos que reportan investigaciones que llevaron a cabo *experimentos de enseñanza* en tanto estrategias de intervención didáctica, usando diseños fundamentados teóricamente, como parte de la metodología de producción de datos. En las investigaciones correspondientes se pueden identificar diferencias relevantes en los métodos y las técnicas particulares, tanto para la producción como para el análisis de los datos; naturalmente, porque cada orientación metodológica responde al objeto de estudio que cada una de estas investigaciones planteó de inicio. ¿Cómo podríamos aprovechar, en un proceso formativo, estos artículos para introducir, estudiar, discutir y reflexionar sobre los *experimentos de enseñanza*, en la investigación en Matemática Educativa?

Por un lado, tenemos el artículo de Estrella et al. (2024) donde se reporta el diseño, la implementación y la evaluación de una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* (THA). Esta trayectoria es producto de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño; con lo que se logra una THA con base teórica y empírica. Dentro de los métodos y técnicas utilizadas para la producción de datos, el experimento de enseñanza se acompañó de videograbaciones, fotografía y recolección de las hojas de trabajo de las y los estudiantes; mientras que el análisis requirió de transcripciones completas que, con una triangulación de investigadores y de datos, se interpretaron a la luz de las hipótesis e indicadores elaborados en la THA. La investigación responde a la demanda educativa y social de formar una ciudadanía competente en la toma de decisiones en situación de incertidumbre, y situada en el campo de la educación estocástica, lo hace con el diseño de actividades y materiales adaptados a las características cognitivas y de desarrollo del estudiantado.

Por otro lado, Silva y Gitirana (2024), en su propósito de profundizar en torno al papel que juega la tecnología digital en el desarrollo del razonamiento covariacional, llevan a cabo un experimento de enseñanza (remoto, en línea) fundamentado en, naturalmente, el razonamiento covariacional, la génesis instrumental y la transposición informática; siendo esta última, quizá, la que les permite ampliar la problematización de la tecnología en su objeto de estudio. La producción de datos se logra mediante la aplicación de un cuestionario, el experimento de enseñanza en sí mismo y una entrevista basada en tareas, y se registra toda la experiencia con grabaciones en vídeo de las pantallas y el audio (resoluciones en voz alta) de los participantes, las respuestas escritas e imágenes producidas en las hojas de trabajo en línea, las interacciones orales y de chat, así como las notas de los investigadores. Para el análisis de los datos, se recurrió al *estudio de casos*, donde la génesis instrumental de cada participante se asumió como un caso de análisis.

En sus resultados, ambas investigaciones logran lo que la comunidad ha consensuado como los dos propósitos de la investigación de diseño: el diseño didáctico y su implementación, y el desarrollo de explicaciones teóricas –o teorías locales– en relación con las formas de aprendizaje que se llevan a cabo en la implementación. Aunque por su comunicación, pareciera que la investigación de Estrella et al. (2024) está reportando solo el propósito relativo al diseño didáctico y su implementación, se debe considerar que la THA se compone de un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas y una *progresión hipotética de aprendizaje*. Integrada en esta progresión está lo que podemos considerar la explicación teórica local en torno al aprendizaje de la inferencia estadística informal que buscaban fundamentar teórica y empíricamente en la investigación.

Por otro lado, la investigación de Silva y Gitirana (2024), al partir de una problematización –más profunda que la identificada en sus antecedentes– sobre el papel de la tecnología en el desarrollo del razonamiento covariacional, daría la impresión de orientarse solo a las explicaciones teóricas en torno a su objeto de estudio; y que en este caso es la propuesta de la *transposición didáctica de segundo orden*. Sin embargo, se distingue con claridad la relación de esta aportación teórica con el diseño a partir de la caracterización del término como *proceso de diseño secundario llevado a cabo por profesores e investigadores que elaboran materiales en el software, creando nuevos objetos y significados.*

Claramente, por la extensión de los artículos es imposible ver en detalle cada momento de las metodologías, tanto del diseño de la investigación como de la producción, organización y análisis de sus datos; pero resultaría fundamental profundizar en ellos para situar, justificar y dar sentido al experimento de enseñanza como pieza de la metodología de producción de datos. Por ello, si en un proceso formativo quisiéramos aprovechar estos dos artículos para estudiar y reflexionar sobre el uso y la orientación de los experimentos de enseñanza, requeriríamos complementar su lectura con otras fuentes (tesis de grado donde esté la investigación original o investigaciones antecedentes y con relación directa, de los mismos autores) para entrar en detalle sobre las decisiones metodológicas, sobre todo las relacionadas con los datos. Es aquí donde las prácticas de CA complementan, transparentan y amplían la comunicación de la investigación en los artículos; particularmente con tres de los principios de la CA conocidos como: datos abiertos, análisis abierto y materiales abiertos (van Dijk et al., 2021).

Probablemente el mayor reto que enfrentamos en este momento es la poca claridad que tenemos en relación con el qué y cómo se comparte, en el contexto de la CA, lo que hacemos en la investigación en Matemática Educativa, particularmente en las investigaciones cualitativas (que, al menos en la Relime, sigue siendo la tradición metodológica más utilizada); pues como bien señalan Azevedo y Mendonça (2024), la discusión sobre datos cualitativos abiertos es reciente y en la investigación en Educación en Ciencias aún es escasa. La experiencia que reportan estas autoras puede servir como ejemplo o guía en la elaboración de normas y políticas editoriales que den soporte a los datos, el análisis y los materiales abiertos; y debiéramos iniciar con la interacción y la reflexión de la comunidad académica interesada, particularmente entre equipos editoriales y responsables de la autoría en el proceso de presentación y evaluación de manuscritos.

Tomando en cuenta las discusiones y reflexiones que ya hay en las disciplinas sociales y de las humanidades, sobre todo en aquellas relacionadas con la investigación educativa, y las respuestas que han ofrecido en torno al debate de la CA en las dimensiones éticas, ontológicas y epistemológicas; podemos configurar las estrategias adecuadas para compartir los datos, los análisis y los materiales, de forma responsable con la sociedad –principalmente con quienes participaron de la investigación original– (algunos planteamientos pueden consultarse en: Azevedo y Mendonça, 2024; Chauvette et al., 2019; Class et al., 2021; DuBois et al., 2018; Joyce et al., 2022; Mannheimer et al., 2019; van Dijk et al., 2021)

Hoy día contamos con recursos que pueden orientar una buena producción de datos con miras a compartirlos en el contexto de la CA: los principios FAIR (por las siglas en inglés: Findable, Accessible, Interoperable, Reusable) (GO FAIR, 2025), los principios CARE (por las siglas en inglés: Collective benefit, Authority to control, Responsibility, Ethics) (GIDA, 2025) y la Guía de Buenos Datos que propone "*The Good Data Manifesto*" (Trenham y Steer, 2019). Sin embargo, necesitamos acuerdos sobre el qué compartimos y cómo lo compartimos en la investigación particular en Matemática Educativa dada la diversidad de objetos de estudio, campos y escenarios de investigación, así como perspectivas, enfoques y teorías, que tenemos en la disciplina. Con estos acuerdos y nuestra participación en este ecosistema científico podremos aprovechar también las ventajas de la CA: la transparencia, la colaboración y la generación de nuevos tipos de investigación y de herramientas teórico-metodológicas.

Con estos acuerdos, que deben actualizarse con base en los resultados y demandas de la sociedad, también y como señalaron Azevedo y Mendonça (2024), estamos preparando "una nueva generación de investigadores y editores científicos equipados con las herramientas y los principios necesarios para promover prácticas de investigación y publicación más abiertas y éticas" (p.12), lo que es una responsabilidad de toda comunidad científica con las futuras generaciones.

Por ello, iremos avanzando hacia este contexto de Ciencia Abierta, poco a poco, y de la mano de nuestros Comités, Revisores, Autores y participantes del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa; quienes han apoyado y acompañado a la Relime en todas sus etapas y transiciones para crecer y adaptarse al contexto editorial global, respetando y protegiendo nuestra regionalidad.

Referencias

Azevedo, N. H. y Mendonça, P. C. (2024). Dados abertos na pesquisa em educação em ciências: perspectivas, desafios e possibilidades. *Ensaio. Pesquisa em Educação em Ciências*, 26, e51515. https://doi.org/10.1590/1983-21172022240172

Chauvette, A., Schick-Makaroff, K. y Molzahn, A. E. (2019). Open Data in Qualitative Research. *International Journal of Qualitative Methods, 18*. https://doi.org/10.1177/1609406918823863

Class, B., de Bruyne, M., Wuillemin, C., Donzé, D. y Claivaz, J.-B. (2021). Towards Open Science for the Qualitative Researcher: From a Positivist to an Open Interpretation. *International Journal of Qualitative Methods*, 20. https://doi.org/10.1177/16094069211034641

DuBois, J. M., Strait, M. y Walsh, H. (2018). Is it time to share qualitative research data? *Qualitative Psychology, 5*(3), 380–393. https://doi.org/10.1037/qup0000076

Estrella, S., Morales, S., Méndez, M., Vidal, P., Ramírez, B. y Mondaca, A. (2024). Diseño de una trayectoria de aprendizaje para introducir la inferencia estadística informal en primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *27*(1), 11-42. https://doi.org/10.12802/relime.24.2711

GIDA (2025). CARE Principles for Indigenous Data Governance. https://www.gida-global.org/care

GO FAIR (2025). FAIR Principles. https://www.go-fair.org/fair-principles/

Joyce, J. B., Douglass, T., Benwell, B., Rhys, C. S., Parry, R., Simmons, R. y Kerrison, A. (2022). Should we share qualitative data? Epistemological and practical insights from conversation analysis. *International Journal of Social Research Methodology,* 26(6), 645–659. https://doi.org/10.1080/13645579.2022.2087851

Silva, C. y Gitirana, V. (2024). Uso de um artefacto computacional para explorar la covariação: Um estudo das gênesis instrumentais de licenciados em matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *27*(1), 105-138. https://doi.org/10.12802/relime.24.2714

Mannheimer, S., Pienta, A., Kirilova, D., Elman, C. y Wutich, A. (2019). Qualitative Data Sharing: Data Repositories and Academic Libraries as Key Partners in Addressing Challenges. *American Behavioral Scientist*, *63*(5), 643–664. https://doi.org/10.1177/0002764218784991

Montiel-Espinosa, G. (2023). La revisión como diálogo. Una pieza clave para el crecimiento colectivo en la comunicación científica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *26*(1), 5–12. https://doi.org/10.12802/relime.23.2610

Montiel-Espinosa, G. (2022). Roles de participación y comunicación en la investigación en Matemática Educativa. ¿Cuáles serán los acuerdos de la Comunidad Latinoamericana? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(3), 253–262. https://doi.org/10.12802/relime.22.2530

Montiel-Espinosa, G. (2017). La transición de Relime al contexto editorial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(1), 5–7. https://doi.org/10.12802/relime.17.2010

Relime (s.f.). *Enviar una propuesta*. Recuperado el 17 de enero, 2025, de https://relime.org/index.php/relime/propuesta

Trenham, C. y Steer, A. (2019). The good data manifesto. En A. Daly, S. K. Devitt y M. Mann (Eds.), *Good Data* (pp. 37–53). Institute of Network Cultures.

UNESCO (2023). Kit de herramientas de ciencia abierta de la UNESCO: contenido. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000387983_spa.locale=es

van Dijk, W., Schatschneider, C. y Hart, S. A. (2021). Open Science in Education Sciences. *Journal of Learning Disabilities*, *54*(2), 139–152. https://doi.org/10.1177/0022219420945267

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Soledad Estrella, Sergio Morales, Maritza Méndez-Reina,
Pedro Vidal-Szabó, Brahiam Ramírez, Alejandra Mondaca-Saavedra

DISEÑO DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA INTRODUCIR LA INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL EN PRIMARIA

Design of a hypothetical learning trajectory to introduce informal statistical inference in primary school

RESUMEN

Mediante un estudio de diseño que desarrolla una trayectoria hipotética de aprendizaje para la inferencia estadística informal (ISI), se introdujo a estudiantes de grado 3 y 4 (n=23) en conceptos estadísticos clave, como variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica. La trayectoria de cinco pasos con un enfoque lúdico del experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas comprendía: obtener muestras; reconocer la incertidumbre y expresarla con lenguaje de posibilidades; contrastar predicciones mediante muestreo repetido; visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras; asignar niveles de posibilidades considerando la distribución muestral empírica al generalizar más allá de los datos. Los resultados indican que los estudiantes de ambos grados pueden acceder a conceptos de la ISI, logrando hacer inferencias informales y presentando niveles sofisticados en el razonamiento propio de la ISI.

PALABRAS CLAVE:

- *Estadística temprana*
- *Trayectoria hipotética de aprendizaje*
- *Inferencia estadística informal*
- *Muestreo repetido*
- *Educación primaria*

ABSTRACT

Through a design study to develop a hypothetical learning trajectory for informal statistical inference (ISI), students in grades 3 and 4 (n=23) were introduced to key concepts of variability, repeated sampling, and empirical sampling distribution. The five-step trajectory, with a playful approach to the randomized two-coin toss experiment, included: obtaining samples; recognizing uncertainty and expressing it with possibility language; contrasting predictions through repeated sampling; visualizing and recognizing variability among samples; assigning levels of possibilities, considering the empirical sampling distribution, when generalizing beyond the data. The results indicate that students at both grade levels can access ISI concepts, make informal inferences, and present sophisticated levels of ISI reasoning.

KEY WORDS:

- *Early statistics*
- *Hypothetical learning trajectory*
- *Informal statistical inference*
- *Repeated sampling*
- *Primary education*

Estrella, S., Morales, S., Méndez-Reina, M., Vidal-Szabó, P., Ramírez, B., Mondaca-Saavedra, A. (2024). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para introducir la inferencia estadística informal en primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(1), 11-42. https://doi.org/10.12802/relime.24.2711. Recepción: Septiembre 4, 2024 / Aceptación: Enero 10, 2025.

RESUMO

Através de um estudo de desenho que desenvolveu uma trajetória de aprendizagem hipotética para a inferência estatística informal (ISI), os alunos do 3.º e 4.º anos (*n*=23) foram introduzidos nos conceitos-chave de variabilidade, amostragem repetida e distribuição empírica da amostragem. A trajetória em cinco etapas, com uma abordagem lúdica à experiência aleatória do lançamento de duas moedas, incluía: obter amostras; reconhecer a incerteza e expressá-la com linguagem de possibilidades; contrastar previsões através de amostragem repetida; visualizar e reconhecer a variabilidade entre amostras; atribuir níveis de possibilidades, considerando a distribuição empírica da amostragem ao generalizar para além dos dados. Os resultados indicam que os alunos de ambos os graus de ensino conseguem aceder a conceitos ISI, fazendo inferências informais e mostrando níveis sofisticados de raciocínio ISI.

PALAVRAS CHAVE:

- *Estatística inicial*
- *Trajetória hipotético de aprendizagem*
- *Inferência estatística informal*
- *Amostragem repetida*
- *Ensino básico*

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une étude de design développant une trajectoire d'apprentissage hypothétique pour l'inférence statistique informelle (ISI), des élèves de 3e et 4e année (*n*=23) ont été initiés aux concepts clés de la variabilité, de l'échantillonnage répété et de la distribution d'échantillonnage empirique. La trajectoire de cinq étapes avec une approche ludique de l'expérience aléatoire du lancer de deux pièces de monnaie comprenait : l'obtention d'échantillons ; la reconnaissance de l'incertitude et son expression avec le langage des possibilités ; le contraste des prédictions par l'échantillonnage répété ; la visualisation et la reconnaissance de la variabilité entre les échantillons ; l'attribution de niveaux de possibilités en tenant compte de la distribution d'échantillonnage empirique lors de la généralisation au-delà des données. Les résultats indiquent que les élèves des deux classes peuvent accéder aux concepts de ISI, en faisant des déductions informelles et en montrant des niveaux sophistiqués de raisonnement de ISI.

MOTS CLÉS:

- *Statistiques précoces*
- *Trajectoire d'apprentissage hypothétique*
- *Inférence statistique informelle*
- *Échantillonnage répété*
- *Enseignement primaire*

1. Introducción

En la sociedad actual es esencial brindar a los estudiantes herramientas y habilidades para enfrentar con éxito los desafíos de la desinformación. La educación de la ciudadanía requiere superar los niveles tradicionales de alfabetización escolar y enfocarse en desarrollar habilidades críticas y argumentativas que permitan a los estudiantes comprender y abordar fenómenos sociales que son relevantes para su vida cívica (Engel et al., 2021; Estrella, 2017). En este contexto, la educación estadística desempeña un papel vital al fomentar la toma de decisiones fundamentadas en situaciones de incertidumbre.

Por tales razones, es necesario que los estudiantes sean introducidos al estudio de la estadística desde edades tempranas, tanto para comprender el mundo que les rodea, como desarrollar competencias estadísticas básicas y fomentar su interés en esta disciplina (Estrella, 2018). Para ello, se torna crucial diseñar —desde la educación primaria— actividades y materiales didácticos adaptados a las características cognitivas y de desarrollo de los estudiantes, lo que les permitiría construir de manera significativa sus ideas y conceptos sobre la estadística.

Esta investigación se enfoca en la inferencia estadística, la cual permite establecer conclusiones más allá de los datos disponibles, extendiéndose a un universo más amplio (Moore, 2005). En el marco de la estadística temprana (Estrella, 2018; Estrella et al., 2020, 2021; Leavy et al., 2018), la inferencia permite hacer predicciones con cierto grado de confianza a partir de patrones revelados por los datos obtenidos de muestras representativas de la población. La inferencia estadística informal (ISI) y el razonamiento inferencial informal (IIR) son cada vez más relevantes en la educación estadística (Makar et al., 2011; Makar y Rubin, 2009, 2018). A diferencia de la promoción de la apropiación de métodos formales estadísticos, y comprendiendo que éstos están fuera de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, la ISI busca que los estudiantes se acerquen de manera informal a la generación de inferencias empleando su razonamiento a partir de distribuciones de datos muestrales y la comparación entre sí (Pfannkuch, 2006), y lleguen a comprender la esencia de la inferencia estadística.

Desarrollar el razonamiento inferencial estadístico implica comprender conceptos clave como la variabilidad, el muestreo repetido y la distribución muestral empírica asociada a un estadístico. En particular, este enfoque informal implica realizar generalizaciones probabilísticas con evidencia basada en los datos que se extienden más allá de los datos recolectados (Makar y Rubin, 2009; 2018; Méndez-Reina y Estrella, 2024). En ese sentido, el presente estudio describe una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) de cinco pasos que integra tales conceptos clave, y fomenta los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre la ISI. Como en Inzunza e Islas (2019), la secuenciación en las actividades sigue una trayectoria que tiene al muestreo como base conceptual y la interrelación con los conceptos clave en el desarrollo de un IIR.

Esta investigación busca brindar a los estudiantes oportunidades para expresar conclusiones sobre una población a partir de muestras, y su propósito es diseñar, implementar y evaluar una trayectoria hipotética de aprendizaje destinada a estudiantes de 8 a 9 años de edad. Esta trayectoria se centra en el razonamiento inferencial informal y abarca conceptos estadísticos fundamentales: muestra, muestreo repetido, variabilidad muestral y distribución muestral empírica.

2. Marco Conceptual

2.1. *Razonamiento inferencial informal*

Zieffler et al. (2008) señalaban que el IIR es "la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que sustenten las inferencias hechas sobre la población desconocida" (p.44).

El propósito de la ISI es establecer las bases para el desarrollo del razonamiento inferencial estadístico con datos (Ben-Zvi, 2016; Makar y Rubin, 2009). La ISI es importante en la enseñanza estadística y requiere una revisión de cómo se construye el razonamiento inferencial estadístico sobre los conceptos de inferencia y cómo se enseña (Garfield et al., 2015).

La ISI se ha consolidado como un paradigma educativo que integra aspectos del IIR: *usar datos como evidencia* para establecer argumentos relacionados con algún problema, priorizando la evidencia que ofrecen los datos por encima de las experiencias personales u opiniones (Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch et al., 2015); *generalizar más allá de los datos* para comunicar conclusiones deducidas de datos particulares, lo que implica generar inferencias aplicables a un conjunto más amplio de casos (Rossman, 2008; Zieffler et al., 2008); *expresar la incertidumbre* para manifestar la falta de certeza en la generalización más allá de los datos, considerando que las afirmaciones no son seguras (Ben-Zvi et al., 2012); *considerar el agregado* para visualizar el conjunto de datos como un todo, enfocándose en características del comportamiento de los datos (Konold et al., 2015); e *integrar conocimiento contextual* para considerar posibles relaciones presentes en una situación, lo que permite profundizar en el razonamiento con datos en un contexto (Langrall et al., 2011).

2.2. *Inferencia informal en el currículo escolar chileno*

En las bases curriculares de los grados 1 a 6 de la asignatura Matemática (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018), no se incluyen objetivos de aprendizaje orientados a la elaboración de inferencias estadísticas informales. Aunque los contenidos asociados a ISI no se explicitan en este currículo escolar, es posible encontrar algunos contenidos relacionados con otras áreas curriculares, como Ciencias y Lenguaje, y explícitamente, en los estándares de formación inicial de profesores de primaria.

En los estándares actuales de formación inicial de profesores de primaria en el campo de las matemáticas (MINEDUC, 2022), se incluye el estándar «Datos y Probabilidades». En los estándares sobre conocimiento disciplinar estadístico, se señala "Recolecta datos para responder una pregunta del contexto escolar o comunitario, considerando toda la población o una muestra de ella, los organiza en tablas y/o gráficos, y discute su variabilidad, observando tendencias y realizando inferencias informales" (MINEDUC, 2022, p. 126). En el estándar de conocimiento didáctico del contenido estadístico, se señala "Secuencia actividades de aprendizaje que involucren la recolección de datos de una muestra o la totalidad del curso, su representación y análisis, para incentivar que sus estudiantes realicen inferencias informales y tomen decisiones basadas en la evidencia obtenida" (MINEDUC, 2022, p. 127).

2.3. *Conceptos estadísticos clave para la Inferencia Estadística Informal*

El IIR involucra una serie de conceptos estadísticos que respaldan las inferencias, requiriéndose varias experiencias con datos para llegar a realizar interrelaciones conceptuales (Makar et al., 2011). Considerando un experimento aleatorio no equiprobable como el lanzamiento de dos monedas, es plausible considerar conceptos clave como: muestra (asociados a otros conceptos como aleatoriedad, predicción, incertidumbre, y muestreo repetido), variabilidad muestral y distribución muestral empírica (asociados a frecuencia máxima y visualización).

En el experimento de lanzar dos monedas, la aleatoriedad se enmarca en la imprevisibilidad del resultado, en que cada lanzamiento es independiente del anterior y en cada uno existe una probabilidad asociada. Se ha considerado la predicción como una herramienta valiosa para estimar eventos, basándose en datos, aunque es importante tener en cuenta que la incertidumbre puede surgir debido a la complejidad del fenómeno que se está analizando y limitar la precisión de las estimaciones. También, la variabilidad, referida a cómo los datos están dispersos alrededor de una medida de tendencia central, puede afectar la precisión de las estimaciones y, por tanto, en la interpretación de los resultados.

La técnica de muestreo repetido permite obtener una muestra de una población e implica generar muestras bajo las mismas condiciones, con la repetición de este proceso muchas veces se obtiene una distribución muestral empírica, lo que puede ayudar a comprender mejor la variabilidad en los datos y a reducir la incertidumbre en las estimaciones. Ben-Zvi et al. (2015) han señalado la importancia del proceso de construcción de la distribución muestral, pues los estudiantes pueden experimentar y comprender mejor el proceso involucrado, en lugar de simplemente presentarles el resultado final. La técnica de muestreo repetido simulado posibilita la generación de distribuciones muestrales empíricas, lo cual es clave para analizar y desarrollar el razonamiento inferencial estadístico desde un enfoque informal. En este sentido, la distribución muestral empírica generada a través del muestreo repetido simulado permitiría que los estudiantes dedujeran propiedades similares a las del concepto teórico, siendo así un modelo más concreto del concepto teórico de distribución muestral (Sánchez et al., 2024; Silvestre et al., 2022).

Estos aspectos ISI sustentan teóricamente rutas de aprendizaje que incluyen actividades para desarrollar el pensamiento estadístico (Estrella et al., 2023; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Rubin et al., 2006). Van Dijke-Droogers et al. (2020) abordan el manejo de la variabilidad y la incertidumbre en un experimento aleatorio, considerando los conceptos de contraste de las predicciones, la observación de la variabilidad en las muestras, la visualización de la variabilidad en las frecuencias de datos, y la interpretación de la variabilidad mediante la distribución muestral empírica.

Existen diferentes énfasis en las tareas que fomentan el IIR, algunas de ellas implican la generación de inferencias sobre aspectos de una población (Pratt et al., 2008). En este sentido, los datos obtenidos de muestras se utilizan para hacer afirmaciones sobre una población finita a partir de la cual se extrajeron los datos, o sobre un proceso de muestreo que puede ser infinito en el caso de experimentos aleatorios. Estrella et al. (2023a, 2023b) argumentan que, a partir de las distribuciones empíricas representadas gráficamente para cada muestra, los estudiantes pueden identificar patrones, tendencias y agregados en los datos muestrales, tal como reportó Watson et al. (2013). En particular, tanto el muestreo aleatorio como el muestreo repetido otorgan un mayor grado de confianza en la generalización, siendo a menudo la variabilidad en los datos el resultado de la aleatoriedad, y la inferencia informal busca explicarla (Pratt et al., 2008; Watson et al., 2013).

Dada la importancia del IIR y los conceptos clave de la inferencia estadística, las preguntas abordadas en esta investigación son ¿Cómo manifiestan los estudiantes los conceptos ISI en los grados 3 y 4? ¿Cómo los pasos de THA fomentan los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre el IIR?

3. Metodología

3.1. *Trayectoria hipotética como instrumento de investigación de diseño*

La THA es un concepto que se utiliza para diseñar la enseñanza de disciplinas escolares, como matemáticas o estadística. Consiste en un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas y una progresión hipotética de aprendizaje. Una THA pretende describir una "posible ruta de aprendizaje compartida para la comunidad del aula" (Gravemeijer et al., 2003, p. 52) y entregar una secuencia de patrones de pensamiento cada vez más sofisticados, basados en la teoría y evidencia de la investigación, que se espera que la mayoría de los niños sigan hacia el logro del objetivo de aprendizaje. Este constructo se puede aplicar a diferentes unidades de enseñanza (una lección, una secuencia de lecciones, el aprendizaje de un concepto durante un período prolongado de tiempo) planificadas para el aprendizaje conceptual (Simon, 2020). Una THA busca una progresión de desarrollo que especifica niveles de razonamiento más sofisticados, a los cuales los estudiantes podrían llegar (Clements y Sarama, 2004; Lobato y Walters, 2017). Debido a que muchas de las ideas estadísticas que se están considerando en la ISI no se encuentran actualmente en todos los currículos escolares, varios educadores estadísticos han estudiado los procesos de razonamiento de los estudiantes mediante el uso de THA junto con métodos basados en el diseño, tanto con fines de investigación como de enseñanza (Arnold et al., 2018).

Mediante una investigación de diseño se realizó un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000), que se caracterizó por un refinamiento progresivo del diseño de la THA, constantemente revisada en ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño, basándose en evidencias obtenidas en el transcurso de la investigación, la colaboración con las profesoras y tomando registros sobre lo que los estudiantes aprenden. Si bien el diseño de la THA se ha implementado desde 2020 a 2022 en tres escuelas, en este escrito se da cuenta solo del último rediseño en una de las escuelas.

3.2. *Participantes*

Los casos seleccionados pertenecen a una muestra por conveniencia y corresponden a 23 estudiantes de 8 a 9 años de edad, de dos cursos de una misma escuela, —uno de grado 3 (n=12), y otro, de grado 4 (n=11)—, que vivieron el experimento de enseñanza a través de la THA, cuyas lecciones fueron implementadas por las profesoras del respectivo grado. Se contó con el consentimiento informado de la directora, profesores y de todos los apoderados de los estudiantes que participaron de las lecciones.

El consentimiento utilizado contenía seis elementos: 1) explicación del propósito del estudio, 2) información sobre la participación voluntaria en el estudio y que los participantes podían retirarse en cualquier momento, 3) garantía de que las respuestas proporcionadas no estaban relacionadas con ninguna calificación del curso, 4) no divulgación de información que pudiera identificar a los participantes, 5) descripción del proceso de almacenamiento de los datos recopilados, y 6) información de contacto para que los participantes o sus apoderados pudieran hacer preguntas vinculadas al desarrollo del estudio y sus alcances éticos.

3.3. *Tarea*

Corresponde a la situación central de la THA, que puede ser asociada al concepto de probabilidad, puesto que trata del experimento aleatorio no equiprobable del lanzamiento de dos monedas en un contexto lúdico, denominado la carrera de los conejos (ver Figura 1). Desde la perspectiva inferencial que orienta esta investigación, mediante esta tarea se obtienen muestras a través del uso del tablero de juego que permite registrar el avance de los conejos etiquetados como 1, 2 y 3. Cada tablero de un juego finalizado se considera una muestra, y se espera que cada estudiante obtenga tres muestras.

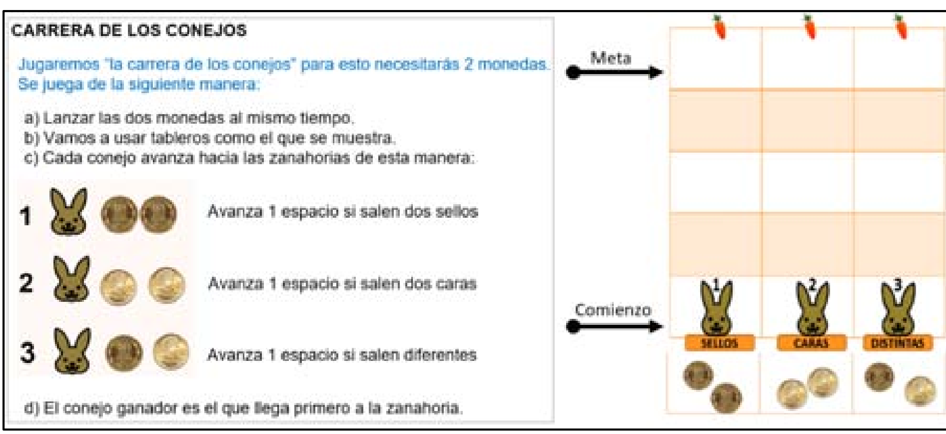


Figura 1. Instrucciones del juego y tablero

3.4. *Trayectoria hipotética de aprendizaje de ISI*

El estudio busca obtener una THA con base teórica y empírica para iniciar a los estudiantes de grados 3 y 4 en la comprensión de conceptos clave de la inferencia estadística.

La THA propuesta comprende un refinamiento y ampliación de la anteriormente planteada por Estrella et al. (2023a) que consideraba solo 4 pasos. La nueva THA se amplía a cinco pasos, añadiendo un Paso 0 que introduce la incertidumbre de situaciones y su expresión mediante el lenguaje de probabilidad, antes del muestreo. Además, en esta THA que se propone, se amplían los conceptos, incorporando la distribución muestral empírica desde el Paso 3, donde los estudiantes asignan niveles de posibilidad basándose en la regularidad observada en las muestras y en la representación gráfica de las frecuencias máximas.

En el diseño teórico de la THA, se levantaron hipótesis sobre el aprendizaje de los conceptos variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica. Para ello, se consideraron cinco pasos en la THA, a saber: [Paso 0] Reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje natural de probabilidad, asociado a las posibilidades; [Paso 1] Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido; [Paso 2] Visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras; [Paso 3] Asignar nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica; [Paso 4] Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre (ver Tabla I).

Cada paso de la THA, basado en Estrella et al. (2023a), describe las actividades diseñadas, las hipótesis correspondientes e indicadores del comportamiento de aprendizaje de los estudiantes que respaldan dichas hipótesis. En lo que sigue, se detallan las hipótesis asociadas a las dos lecciones de la THA.

Lección 1

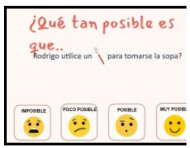
Paso 0: *Reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje de posibilidades*

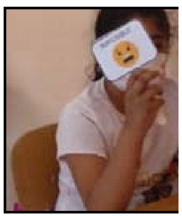
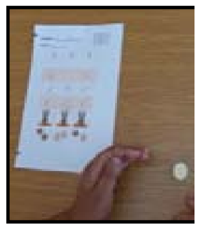
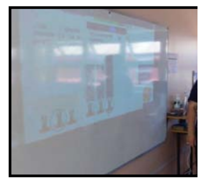
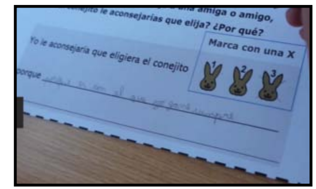
El objetivo es fomentar en los estudiantes la expresión de la incertidumbre de situaciones a través de tipos específicos de tareas de pensamiento (Sannomiya et al., 2021), junto a imágenes asociadas al modelo de urnas. Para lograr este objetivo, se busca que los estudiantes se apropien y utilicen cualificadores modales (en el sentido toulminiano) expresando posibilidades de acuerdo con las condiciones de las situaciones en contexto.

La hipótesis asociada al "Paso 0" considera que los estudiantes manifiesten el nivel de posibilidades acerca de la ocurrencia de un suceso, mediante cualificadores como "imposible", "poco posible", "posible", "muy posible", "seguro"; pudiendo usarse otros adverbios de duda (quizá, quizás, acaso, probablemente, posiblemente, ojalá) o el uso de verbos modales (deber, querer, saber, poder, soler), distinguiendo las circunstancias, favorables o desfavorables, de una situación de incertidumbre. Esta hipótesis comprende el indicador:

TABLA I

Elementos de la trayectoria hipotética de aprendizaje de cinco pasos sobre la IIR

	Lección 1		*Lección 2*		
	Paso 0	*Paso 1*	*Paso 2*	*Paso 3*	*Paso 4*
Tareas centrales	¿Qué tan posible es..? [Indicando mediante paletas icónicas los niveles de la escala: *imposible*, *poco posible*, *posible*, *muy posible y seguro*] 	Antes de cada juego, ¿Cuál conejo piensas que ganará? ¿Por qué?  Juguemos y registremos en los tableros. ¿Qué pasó luego de jugar?	Luego del registro en 4 tableros de juego (muestras), observamos los tableros (detectando la frecuencia máxima y categoría asociada) **¿Qué conejo pensaste que iba a ganar? Y después de jugar, ¿qué sucedió?* ** Si jugáramos de nuevo, ¿Pasaría lo mismo?* 	Vistos los tableros de tus juegos y los de tus compañeros *¿Qué tan probable es que gane (el conejo 1, 2, 3)?* 	Si para ganar el juego, tuvieras que dar un consejo a un amigo, *¿Cuál conejo le aconsejarías? ¿Por qué?* 
Actividad de enseñanza	Promover el reconocimiento de la incertidumbre en la ocurrencia de situaciones inusuales o sucesos	Conducir el juego, registrando los datos resultantes en un tablero exhibido al curso (muestra). Permitir el registro y	Exhibir, al menos, un tablero completado (muestras) de cada uno de los estudiantes. Señalar el conejo elegido (predicción) y	Completar con la estimación de posibilidades que entrega cada estudiante, mediante la escala	Promover la inferencia informal sobre una decisión futura empleando niveles de posibilidad, y basándose en la regularidad detectada [en la

	probabilísticos asociados al modelo de urnas.	la visualización del comportamiento de los datos categóricos.	el conejo ganador (la categoría de la frecuencia máxima: moda). Completar un pictograma de los conejos ganadores (moda) según las muestras consideradas.	con niveles de posibilidad (imposible, poco posible, posible, muy posible o seguro).	distribución muestral empírica de la moda].
Actividad del estudiante	Expresar en forma oral, escrita o icónica, la incertidumbre o nivel de posibilidad de una situación 	Predecir, realizar el juego y registrar los datos resultantes de acuerdo a cada categoría.  Comparar sus predicciones con los datos resultantes entre las muestras propias.	Visualizar la variación muestral y detectar una regularidad en las muestras propias y las de los demás, y en el pictograma que se va conformando. 	Reconocer el patrón de variación en el pictograma [distribución muestral empírica de la moda] Estimar y verbalizar el nivel de posibilidad.   	Comunicar y justificar por escrito su inferencial informal.  *Fuente:* elaboración propia

0.a Expresa (o elige la expresión de) la posibilidad de ocurrencia de un suceso, a través de la escala imposible, poco posible, posible, muy posible, seguro.

Paso 1: *Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido*

Al inicio, y para introducir la obtención de muestras, la profesora realiza como ejemplo un juego grupal mediante un tablero proyectado en la pizarra (Figura 1) que todos observan, y antes de empezar a jugar, los estudiantes enmarcan el posible suceso ganador en un tablero de juego propio. Al iniciar este juego grupal y hasta terminarlo, la profesora, en conjunto con los estudiantes, van registrando con una X los resultados obtenidos al lanzar dos monedas. Al finalizar, —esto es, uno de los conejos avanzó cuatro casillas del tablero— los estudiantes contrastan las predicciones propias con lo ocurrido en el juego grupal completado.

Posteriormente, se transita a una etapa en que el estudiante predice el suceso ganador para cada uno de sus juegos, y va jugando hasta completar un total de tres tableros (tres muestras). Una vez completado cada tablero de juego, el estudiante contrasta los resultados empíricos con su predicción. Así, en la lección 1, entre juegos, cada estudiante podrá mantener o cambiar su predicción sobre el resultado en el próximo juego. Se considera que los estudiantes pueden: (1) expresar una conjetura acerca de la ocurrencia futura de un suceso; (2) registrar los datos de sus muestras, en un contexto lúdico y de incertidumbre en el que hay variabilidad; (3) contrastar las predicciones propias con los datos que obtienen en cada una de sus muestras; y (4) comparar las muestras propias e identificar alguna regularidad en estas.

La hipótesis asociada al "paso 1" sostiene que al realizar predicciones y contrastarlas con los datos obtenidos mediante muestreo repetido, se prepara a los estudiantes para visualizar la variabilidad y regularidad de las muestras, así como la incertidumbre de la situación. Los indicadores del comportamiento de aprendizaje de los estudiantes que soportan la hipótesis:

1.a Elige uno de los sucesos de la experiencia aleatoria (predice).
1.b Efectúa acción iterativa de artefactos aleatorios concretos, identificando el suceso resultante.
1.c Registra la ocurrencia de cada uno de los sucesos (muestra).
1.d Establece la frecuencia máxima (o altura) de las ocurrencias de cada suceso en el tablero.

1.e Contrasta si su predicción se cumplió o no, respecto a los datos resultantes de la experiencia aleatoria, pudiendo mantener o cambiar predicción.
1.f Compara las muestras propias obtenidas de cada experiencia aleatoria y nota alguna regularidad.
1.g Vivencia de la incertidumbre presente en la experiencia aleatoria.

Lección 2
Paso 2: *Visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras*

Se seleccionó una muestra (tablero completado) por cada estudiante en la lección 1, digitalizada para ser proyectada y analizada en el pleno en la lección 2. En esta lección, los estudiantes visualizan las muestras (una por estudiante), se inician en el reconocimiento de la variabilidad muestral y entre muestras. Al aumentar la cantidad de muestras y exhibirlas al pleno, visualizan que el comportamiento de los datos de su muestra no es necesariamente coincidente con otras muestras, pero pudiendo detectar cierta regularidad entre ellas. A su vez, los estudiantes observan el registro de las categorías asociadas a la frecuencia máxima (modas) en un pictograma, según cada muestra seleccionada. Así, tras el muestreo repetido, los estudiantes pueden comprender progresivamente que la mayoría de los resultados de las muestras dan cuenta de cierta tendencia al haber aumentado el número de muestras, y que la distribución muestral empírica de la moda (representada en el pictograma) les es útil para comprender la variabilidad asociada con la estimación de la moda.

La hipótesis del paso 2, sostiene que los estudiantes toman conciencia de la aleatoriedad en la experiencia, al observar distintas muestras y visualizar la variabilidad a medida que aumentan las muestras en la completación dinámica del pictograma, percibiendo cierta regularidad entre las categorías asociadas a la frecuencia máxima. Los indicadores para esta hipótesis son:

2.a Compara frecuencias y detecta la categoría que tiene frecuencia máxima en la muestra (variabilidad muestral, categoría modal).
2.b Compara frecuencias de las categorías tras varias repeticiones (variabilidad muestral).
2.c Compara las categorías de las frecuencias máximas representadas en el pictograma, observando el comportamiento de las modas en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica de la moda; aleatoriedad; visualización).

Paso 3: *Asignar nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica*

A partir de los datos obtenidos tras el muestreo del Paso 2, los estudiantes visualizan el comportamiento de las frecuencias máximas obtenidas (suceso ganador) en cada muestra seleccionada (distribución muestral empírica). Posteriormente, se completa una tabla de posibilidades de ganar de cada uno de los conejos, según la asignación otorgada por cada estudiante del nivel de posibilidades (“imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible” y “seguro”).

En este paso, la hipótesis sostiene que los estudiantes pueden interpretar la regularidad en la distribución muestral empírica y la aleatoriedad presente al observar que hay diferentes frecuencias por categoría según el tablero, siendo uno de ellos más frecuente que los demás. A partir de esto, pueden reconocer la variabilidad entre los sucesos y la frecuencia máxima muestral, lo que les permite asignar un nivel de posibilidades a cada suceso y determinar su posibilidad de ocurrencia utilizando un lenguaje.

Para sostener la hipótesis se han considerado los siguientes indicadores:

3.a Compara frecuencias tabuladas para visualizar el comportamiento regular de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; variabilidad muestral; frecuencia máxima muestral; visualización).

3.b Asigna un nivel de posibilidades a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (aleatoriedad; incertidumbre).

Paso 4: *Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre*

A partir de la vivencia de los estudiantes en las actividades propuestas por cada lección, se esperaba que identificaran algún comportamiento regular pudiendo asignar un nivel de posibilidades mayor a una determinada categoría. Luego, para integrar los aprendizajes alcanzados, a los estudiantes se les pide generalizar más allá de los datos, interpretando la distribución muestral empírica para hacer una inferencia futura sobre el suceso que tiene más posibilidades de ganar; y se les pide bosquejar una posible distribución de frecuencias en una futura muestra.

Este paso considera como hipótesis, que los estudiantes en sus conclusiones reconocen el efecto del aumento de muestras, identifican el comportamiento regular en la variabilidad de los datos y la incertidumbre en lanzamientos potenciales de monedas; pudiendo expresar en esa conclusión la confianza en las posibilidades del suceso ganador (regularidad) y bosquejar dicho comportamiento en una futura muestra hipotética.

Los siguientes indicadores se consideraron que soportaban las hipótesis:

4.a Concluye más allá de los datos sin justificar ni expresar nivel de posibilidades (predicción).
4.b Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras sin expresar un nivel de posibilidades (distribución muestral empírica; variabilidad muestral; frecuencia máxima muestral).
4.c Concluye más allá de los datos obtenidos, sin explicitar justificaciones y expresa cierto nivel de posibilidades (aleatoriedad, incertidumbre).
4.d Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras y expresando un cierto nivel de posibilidades (distribución muestral empírica; aleatoriedad; incertidumbre).
4.e Bosqueja una distribución de frecuencias imaginando el comportamiento de una próxima muestra (distribución muestral empírica; visualización; aleatoriedad).

3.5. *Indicadores de las hipótesis de la THA*

La puesta en escena de los cinco pasos de la THA incorporó el aumento de la complejidad de los conceptos clave y sus conexiones (ver Tabla II), aspectos que proveyeron las instancias de análisis de datos. La THA se compone de cinco pasos, los cuales permiten avanzar en los conceptos y sus interrelaciones, comenzando desde lo concreto e instando a los estudiantes a realizar predicciones basadas en su intuición. Luego, se establecen situaciones cuya resolución exige superar ciertos conflictos cognitivos previstos en la fase de diseño (dado el experimento aleatorio no equiprobable), se les anima a observar y buscar regularidades en los datos experimentales. En la Tabla II se presenta una descripción general del aumento de la complejidad de la THA en función de estos aspectos de ISI.

La Tabla II precisa los nueve conceptos asociados a ISI que abarca la THA. Para simplificar el análisis de los datos, se procedió a recategorizar de manera consensuada dichos conceptos: englobando en “muestras” (muestra, muestreo repetido) y “distribución muestral empírica” (frecuencia máxima muestral, distribución muestral empírica, visualización); conservándose las categorías conceptuales de predicción, incertidumbre, aleatoriedad y variabilidad muestral.

TABLA II
Indicadores asociados a conceptos ISI y a cada paso de la THA

Aumento de complejidad ⇒	*Paso 0* Reconocer la incertidumbre y expresarla con lenguaje de posibilidades	*Paso 1* Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido	*Paso 2* Visualizar y reconocer la variación entre muestras	*Paso 3* Asignar nivel de confianza a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica	*Paso 4* Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre
Predicción		1a; 1e			4a
Incertidumbre	0a	1b; 1g		3b	4c; 4d
Muestra		1c; 1f			
Muestreo repetido		1f			
Variación muestral			2a; 2b	3a	4b
Frecuencia máxima muestral		1d: 1f		3a	4b
Distribución muestral empírica		1d; 1f		3a	4b
Visualización			2c	3a	4b; 4d; 4e
Aleatoriedad	0a	1e; 1f	2c	3b	4c; 4d; 4e

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Tabla II, se puede apreciar la presencia de varios indicadores en dos conceptos fundamentales de la inferencia estadística: la incertidumbre y la aleatoriedad. Así se identificaron seis indicadores asociados a la incertidumbre y ocho indicadores que abarcan todos los pasos de la THA relacionados con la aleatoriedad. Es relevante destacar que, dado que el muestreo repetido es una técnica empleada por los estudiantes, solo se identifica un indicador en la tabla. Esto se debe a que los participantes no expresaban verbalmente esta técnica, en uso, durante el proceso.

3.6. *Recolección de datos*

Se videograbaron dos lecciones impartidas a estudiantes de grados 3 y 4, correspondientes a las lecciones 1 y 2 de la THA, con una duración total de seis horas. La recolección de datos incluyó la transcripción completa de las lecciones, así como el registro fotográfico de momentos relevantes y producciones de los estudiantes. Además, se consideraron interacciones entre el profesor - investigador (observador participante) con estudiantes.

El análisis de la transcripción de las lecciones se enfocó en la identificación de los indicadores de IIR asociados a las hipótesis de la THA, y en la selección de episodios clave para describir la caracterización sistemática del razonamiento inferencial informal. La unidad de análisis corresponde a cada intervención de los estudiantes. El criterio de selección de episodios clave consideró la manifestación de las hipótesis a través de los indicadores definidos y la riqueza de las producciones orales y escritas de los estudiantes durante interacciones de aula (profesora - estudiante, y estudiante - estudiante).

Se emplearon técnicas de triangulación para el análisis de datos: la triangulación por investigadores y de fuentes de datos. En la primera, cuatro investigadores identificaron de manera independiente los indicadores de la THA en la transcripción de las lecciones, compararon sus resultados y llegaron a un consenso total sobre los episodios seleccionados para el análisis. Por otro lado, la triangulación de fuentes de datos consistió en analizar las transcripciones de los videos y los registros de datos en los tableros de los estudiantes para estudiar el comportamiento de los indicadores de las hipótesis de la THA según grado. Esta técnica permitió cuantificar las intervenciones asociadas a los indicadores y relatar episodios que evidencian la sofisticación del razonamiento de algunos estudiantes.

4. Análisis y resultados

Primeramente, se presentan manifestaciones de los conceptos ISI por parte de los estudiantes. Asumimos que el aprendizaje es esencialmente mental y ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo y tras una diversidad de experiencias, teniendo en cuenta que su manifestación está restringida por el lenguaje y las acciones de algunos estudiantes. Luego, se presentan evidencias de indicadores de las hipótesis de la THA en las dos lecciones impartidas en los grados 3 y 4 (la primera lección consideraba los Pasos 0 y 1; y la segunda lección abarcaba los Pasos 2, 3 y 4 de la THA). Estas perspectivas de análisis proporcionan un panorama más completo y detallado del proceso de enseñanza y aprendizaje en el marco de la THA.

4.1. *Manifestación de conceptos asociados a ISI*

Durante el análisis de las videograbaciones de las lecciones que componen los cinco pasos de la THA, se identificaron algunos conceptos asociados a ISI (predicción, incertidumbre, muestra, variabilidad muestral, distribución muestral empírica y aleatoriedad). Las intervenciones realizadas por los estudiantes en las lecciones permitieron detectar la manifestación de todos los conceptos ISI propuestos en la THA (Tabla III). En cada grado, se observa que tales conceptos clave se manifestaron en las intervenciones de los estudiantes, existiendo una estabilidad de estas manifestaciones entre los grados. Esto sugiere que hubo un comportamiento similar en ambos grados en cuanto a la comprensión y aplicación de conceptos, manifestándolos de forma oral o escrita.

TABLA III
Manifestación de categorías conceptuales asociadas a ISI según las intervenciones de estudiantes de los grados 3 y 4 en las lecciones asociadas a la THA

Categorías conceptuales	*predicción*	*incertidumbre*	*muestras*	*variabilidad muestral*	*distribución muestral empírica*	*aleatoriedad*
grado 3	7%	23%	7%	12%	26%	25%
grado 4	9%	25%	8%	11%	22%	25%

Nota. En las transcripciones fueron identificadas 276 intervenciones de indicadores asociados a los conceptos en el grado 3; y 216 intervenciones en el grado 4.

4.2. *Manifestación de indicadores de la THA*

Para analizar el comportamiento de los indicadores de las hipótesis de la THA, se cuantificaron las intervenciones de los estudiantes asociadas a estos. La Tabla IV resume la manifestación de los indicadores de la trayectoria en relación con el total de intervenciones realizadas por los estudiantes en cada paso. Los resultados confirman las hipótesis respecto a la evidencia de estos indicadores.

TABLA IV
Manifestación de indicadores de los Pasos de la THA en los grados 3 y 4

THA	*Paso 0*	*Paso 1*	*Paso 2*	*Paso 3*	*Paso 4*
grado 3	15%	31%	14%	18%	22%
grado 4	15%	43%	18%	7%	17%

A continuación, se precisan los indicadores, y se analizan dos lecciones, relatando episodios que ilustran la sofisticación del razonamiento de algunos estudiantes (la primera lección, que consideraba los Pasos 0 y 1; y la segunda, los Pasos 2, 3 y 4 de la THA).

4.2.1. *Análisis de Paso 0 y Paso 1 de la THA*

En el Paso 0 de la THA, los estudiantes pudieron expresar la incertidumbre de las situaciones, confirmándose la hipótesis asociada; esto es, manifiestan el nivel de posibilidades acerca de la ocurrencia de un suceso, mediante los cualificadores "imposible", "poco posible", "posible", "muy posible" y "seguro"; pudiendo distinguir las circunstancias, favorables o desfavorables, de una situación de incertidumbre. En la Tabla V (ver Anexo 1), se muestran los resultados que dan cuenta de la manifestación del indicador en ambos grados, observándose una manifestación similar en estudiantes, en las intervenciones como en el uso de la escala de incertidumbre.

A continuación, se presentan cinco episodios, uno por cada Paso de la THA. El primer episodio referido a la evaluación de situaciones usuales o inusuales (Sannomiya et al., 2021) y la estrategia docente de sistemáticamente formular preguntas que respaldan la manifestación del indicador.

Episodio Paso 0. La profesora ilustra dos situaciones mediante una lámina (ver Figura 2) y pregunta al curso ¿qué tan posible es que…? Los estudiantes responden eligiendo las paletas con íconos para expresar la posibilidad de ocurrencia de aquel suceso. En este episodio, estudiantes de grado 3 y 4 reconocen las situaciones contextuales presentadas y asocian un nivel de posibilidad asociada a la incertidumbre de la situación, confirmándose la hipótesis del Paso 0.

Figura 2. Ejemplo de dos situaciones inusuales y expresiones de la posibilidad de ocurrencia con uso de escala de incertidumbre, por dos estudiantes de grado 3 y 4.

En el Paso 1 de la THA, y a través del muestreo repetido, los estudiantes pudieron contrastar predicciones con los datos obtenidos, observándose manifestaciones de indicadores y confirmándose la hipótesis del Paso 1.

En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 1, con un 31% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 43% del grado 4 del Paso correspondiente. Desde el análisis de los tableros individuales se observa que la totalidad de los estudiantes registraron la elección de un suceso y los datos en ellos (Anexo 1, Tabla V).

Episodio Paso 1. Los estudiantes realizan la predicción y comienzan el lanzamiento de monedas, registrando el resultado en cada tablero numerado (muestras), luego contrastan su elección con las muestras obtenidas. Catalina interactúa con la profesora B respecto a su siguiente predicción y argumenta según su experiencia en tableros previos.

Profesora B: Catalina, ¿cuál elegiste? [Catalina lanza monedas y señala el conejo 3]
Profesora B: el tres y ¿por qué?
Catalina: porque es el [conejo] que más gana.
Profesora B: y ¿tú crees que va a ganar de nuevo?
Catalina: Sí.
Profesora B: ¿por qué?
Catalina: porque siempre salen esos números.
Profesora B: ¿va a salir siempre así? [lanzan las monedas y obtienen varias veces cara-sello].
Profesora B: [nuevamente lanza las monedas] ¿ahí qué dio?
Catalina: cara-cara.
Profesora B: ¿siempre sale cara-sello?, ¿o no siempre?
Catalina: No siempre.

La estudiante predice el conejo que puede ganar en su tercer tablero justificando que el conejo 3 ha ganado en los tableros anteriores. Este episodio hace evidente que la estudiante compara sus muestras de cada experiencia aleatoria y nota la regularidad en ellas, y la intervención de la profesora provoca que vivencie la incertidumbre y observe la variabilidad del comportamiento de los datos.

4.2.2. *Análisis de Paso 2, Paso 3 y Paso 4 de la THA*

En el Paso 2 de la THA los estudiantes pudieron visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras, confirmándose la hipótesis del Paso 2. En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 2, con un 14% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 18% del grado 4 del Paso correspondiente (Anexo 2, Tabla VI).

Episodio del Paso 2, discusión del curso. Finalizado el juego individual, la profesora pregunta al pleno: "el conejo que les ganó en esta ocasión (tablero 3) ¿creen que volverá a ganar?". En esta instancia varios estudiantes comentan el comportamiento de los datos.

Profesora: Isidora dice que primero eligió al [conejo] 2 y luego se cambió al [conejo] 3 porque siempre, siempre ganó. ¿Alguien vivió una experiencia diferente, no ganó el [conejo] 3?
Daniela: No, porque cuando yo jugué al último juego [tablero III], llegó el [conejo] 1 y ganó el [conejo] 1.
Profesora: y ¿tú habías elegido cuál?
Catalina: el [conejo] 3.
Profesora: ¿por qué habías escogido el [conejo] 3?
Catalina: Porque es el mejor.
Profesora: ¿Por qué piensas que es el mejor?
Benjamín: Porque siempre gana.
Profesora: y ¿por qué siempre gana?
Daniela: Porque las [caras de las] monedas no se eligen.
Benjamín: Puede salir cara-cara, sello-sello o los dos [diferentes].

En este episodio los estudiantes expresan la tendencia de los resultados de la experiencia, indicando que el conejo 3 es "el mejor" [Catalina] o "porque siempre gana" [Benjamín]. La discusión integra la variabilidad de los resultados del experimento aleatorio, conjuntamente con la impredecibilidad de un resultado próximo debido a las características del artefacto aleatorio, pues "las monedas no se eligen" [Daniela] y "puede salir cara-cara, sello-sello o los dos [Benjamín].

En el Paso 3 de la THA los estudiantes asignaron un nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica, confirmándose la hipótesis del Paso 3. En ambos grados se observa una manifestación de todos los indicadores del Paso 3, con un 18% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 7% del grado 4 del Paso correspondiente. Desde el análisis de los tableros individuales se observa que la totalidad de los estudiantes asignan un nivel de posibilidades a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (Anexo 3 Tabla VII).

Episodio del Paso 3, discusión del curso. Tras el muestreo repetido los estudiantes comparan los resultados registrados en la tabla de frecuencias de los sucesos ganadores, con ese conocimiento asignan niveles de posibilidades a cada suceso.

Profesora: Recuerden que estamos tomando en cuenta el resultado general del curso. Mateo, ¿sigues pensando que puede ser imposible que el conejo 2 gane?
Mateo: [Hace gestos con la mano indicando poco posible]
Profesora: Ah, poco posible...
Profesora: ¿Entonces será imposible?

Mateo: Poco [posible]
Profesora: Ya, poco posible. ¿Y Judith?
Judith: El mío lo quiero cambiar [había señalado anteriormente imposible].
Profesora: ¿A cuál lo quieres cambiar?
Judith: A poco posible.

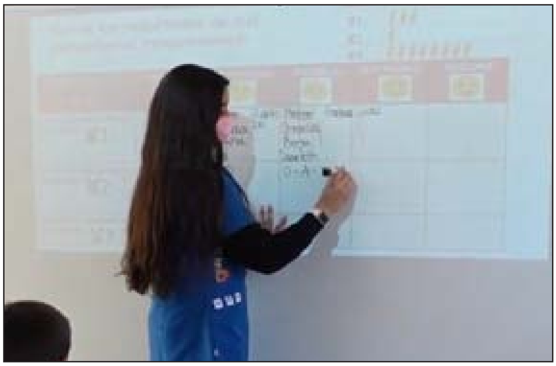


Figura 3. Asignación de niveles de posibilidades de los sucesos elegidas por los estudiantes

En este episodio, la profesora enfoca a los estudiantes en la tabla de frecuencia que representa la distribución muestral empírica obtenida del muestreo repetido. Así, los estudiantes asignan un nivel de posibilidades a cada suceso por medio de lenguaje con escala de posibilidad (Figura 3). Mateo expresa su nivel de posibilidades de manera gestual y luego oralmente; y Judith comparando los resultados reconoce cierta posibilidad, cambiando el nivel de posibilidades asignado previamente al conejo 2. En consecuencia, la experiencia de registro de datos en los tableros y su visualización, ha contribuido a que los estudiantes lleguen a verlos como un agregado, permitiéndoles enfocarse en el comportamiento de los datos.

En el Paso 4 de la THA, los estudiantes generan afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre, confirmándose la hipótesis. En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 4, con un 22% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 17% del grado 4 (ver Tabla IV). Desde el análisis de los tableros individuales se observan distintas afirmaciones y asignaciones de niveles de posibilidades (Anexo 4, Tabla VIII).

Episodio del Paso 4, interacción profesor-estudiante. Los estudiantes bosquejan un tablero imaginario (sin lanzar las monedas) y escriben un consejo sobre el juego, respecto a la ocurrencia de un suceso futuro que tiene más posibilidades de ganar, empleando lenguaje de incertidumbre (ejemplo, Figura 4).

Profesor 2: ¿Qué pusiste al final en tu consejo?
Benjamín: Que es muy posible que gane el [conejo] tres, que siga ganando.
Profesor 2: ¿Por qué?, ¿cómo lo sabes?
Benjamín: Porque ha ganado muchas veces, así que es muy posible que siga ganando.
Profesor 2: ¿Te acuerdas que en la clase anterior tú apostabas mucho por el [conejo] 1?, ¿o el [conejo] 2 también?, ¿cuál era tú número [de conejo] favorito?
Benjamín: El conejo 1 [lo indica en su tablero].
Profesor 2: ¿Por qué cambiaste de opción? Ahora cambiaste del [conejo] 1 al 3.
Benjamín: Porque el [conejo] 3 ha ganado más veces.
Profesor 2: ¿Y cuál es el consejo [para este juego] que le dirías a tu mejor amigo?
Benjamín: Que es muy probable que el 3 siga ganando [que elija el conejo 3].

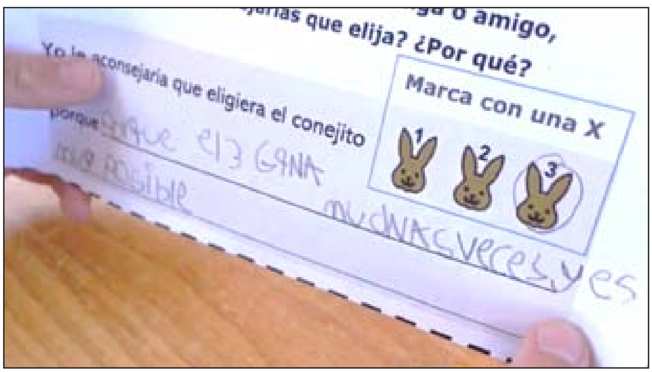


Figura 4. Inferencia a modo de consejo acerca de la ocurrencia futura del suceso ganador

En este episodio, Benjamín [tercer grado] escribe su inferencia al identificar que el conejo 3 ha ganado más veces. Benjamín, al comprender el comportamiento regular de las muestras, ha modificado su elección de los juegos previos, en los cuales prefería el conejo 1, para aconsejar que se debe elegir el conejo 3 pues “es muy probable” que siga ganando en un próximo juego, otorgando un nivel de posibilidades de “muy posible” (Figura 4).

Desde el registro de los tableros individuales (Anexo 4, Tabla VIII), se observa que todos los estudiantes de los grados 3 y 4, generalizan más allá de los datos. En el grado 3, el 82% es capaz de justificar desde el comportamiento de las muestras previas empleando un lenguaje de incertidumbre. Sin embargo, los estudiantes de ambos grados muestran dificultades en el uso de lenguaje de incertidumbre, con un 18% en grado 3 y un 33% en grado 4. Al parecer, el 22% de los estudiantes del grado 4, aún no logran expresar informalmente sus inferencias a partir del comportamiento de las muestras.

5. Discusión y conclusiones

Este estudio, tanto con fines de investigación como de enseñanza, indagó en cómo estudiantes de los grados 3 y 4 manifiestan los conceptos de inferencia estadística informal y cómo los pasos de la trayectoria hipotética de aprendizaje propuesta fomentan los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre el razonamiento inferencial informal. Para lograr este objetivo, se describió una THA compuesta por cinco pasos que integra conceptos clave para fomentar los procesos de aprendizaje sobre la ISI. La THA diseñada fue analizada tanto teórica como empíricamente, introduciendo la inferencia estadística informal en los grados 3 y 4.

En respuesta a la primera pregunta de investigación, los estudiantes manifestaron los conceptos clave de la ISI (variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica), identificando características de una muestra e interpretando la distribución muestral empírica como una descripción de valores obtenidos de las frecuencias en todas las repeticiones posibles de una muestra. En cada grado, algunos estudiantes en sus intervenciones manifestaron todos los conceptos asociados a ISI (predicción, incertidumbre, muestra, variabilidad muestral, distribución muestral empírica y aleatoriedad); y al comparar entre los grados, se apreció una estabilidad en el comportamiento similar de las manifestaciones de tales conceptos. Varios estudiantes pudieron distinguir el modelo de distribución tras los resultados obtenidos, y el muestreo repetido les permitió explorar la variabilidad muestral y la incertidumbre. Algunos estudiantes demostraron cierto sentido del dato (Estrella, 2018), ya que, al resolver problemas basados en datos, comprendieron cómo obtener datos y reconocieron la variabilidad en el fenómeno. Además, utilizaron la evidencia del comportamiento de los datos para realizar estimaciones e inferencias estadísticas informales, todo ello sin necesidad de hacer cálculos complejos (Cf., Estrella et al., 2021).

La segunda pregunta del estudio buscaba indagar cómo los pasos de la THA fomentaban los procesos de aprendizaje acerca del IIR, considerando que la THA comprendía: (i) reconocer la incertidumbre y expresarla en un lenguaje de posibilidades, (ii) contrastar predicciones mediante muestreo repetido, (iii) visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras, (iv) asignar niveles de posibilidades considerando la distribución, y (v) generar afirmaciones más allá de los datos disponibles. Se pudo observar que el razonamiento inferencial estadístico manifestado por los estudiantes evidencia que la THA les permitió trabajar de manera efectiva con datos y conceptos propios de la inferencia estadística. Lo que va en concordancia con investigaciones que señalan que participar en actividades que involucran inferencias informales en los primeros años escolares, facilitaría la comprensión de conceptos y el aprendizaje más complejo sobre inferencia estadística formal en niveles escolares posteriores (Makar y Rubin, 2009; Van Dijke-Droogers et al., 2021).

Los resultados indican que la THA diseñada fue efectiva, ya que los estudiantes experimentaron la incertidumbre y aleatoriedad del juego de lanzamiento de monedas; dicho experimento permitió la obtención de muestras a través del uso del registro de datos en tableros de juego asociados a un juego finalizado, cada uno de los cuales se consideró una muestra. A través de episodios cuidadosamente seleccionados, se pudo apreciar el cumplimiento de las hipótesis planteadas sobre el IIR en cada paso de la THA, lo que reflejó el progreso de los estudiantes hacia mayores niveles de sofisticación en el IIR. Estos avances incluyen aspectos clave del razonamiento, como la evidencia basada en los datos, el lenguaje de incertidumbre, la generalización, el agregado y el contexto de los datos.

Una de las fortalezas de la THA propuesta fue el enfoque lúdico del experimento aleatorio que resultó de interés para los estudiantes, quienes crearon, recolectaron y analizaron exploratoriamente datos auténticos. Realizar el experimento aleatorio simple (lanzamiento de dos monedas) de carácter probabilístico como medio para permitir la obtención de muestras, ha permitido desde una perspectiva inferencial que los estudiantes progresen en su comprensión de la aleatoriedad, conectando la observación de un comportamiento aleatorio que tiende a regularizarse después de muchas repeticiones (muestreo repetido), así como también, evidenciar la variabilidad de los resultados obtenidos después de unas pocas repeticiones. La reiterada formulación de preguntas por parte de las docentes, orientó el cuestionamiento sobre los datos y estimuló la curiosidad intelectual de los niños permitiéndoles que pudieran expresar su razonamiento inferencial informal.

Esta trayectoria hipotética de aprendizaje promueve formas más sofisticadas de IIR, como se ha observado durante su aplicación y según se refleja en los argumentos inferenciales orales de estudiantes, quienes pudieron generalizar desde el comportamiento de las muestras empleando un lenguaje de incertidumbre. Este escrito contribuye a superar niveles tradicionales de alfabetización escolar, y difundir aspectos teóricos y prácticos de una educación estadística temprana adecuada a los desafíos del siglo XXI, que busca promover el aprendizaje desde la interacción social en el aula y desde los primeros años escolares, la formación de una ciudadanía crítica, participativa y consciente, capaz de tomar decisiones fundamentadas en escenarios de incertidumbre.

Agradecimientos

ANID/Exploración 13240075; ANID/FONDEF IT23i0067; ANID/Fondecyt 1200346; ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003; VRID Nº2023000813INI; VINCI 039.493/2024; ANID Becas / Doctorado-Nacional 21210862; 21231116; 21241378; y Grupo de Investigación en Estadística Temprana GIET.

Declaración de contribución y autoría

Soledad, Estrella, Conceptualización, Metodología, Investigación, Análisis formal, Redacción en borrador original, Redacción - Revisión y Edición.

Sergio, Morales, Investigación, Análisis formal, Supervisión, Redacción en Borrador original.

Maritza, Méndez-Reina, Conceptualización, Análisis formal, Investigación, Redacción en Borrador original.

Pedro, Vidal-Szabó, Metodología, Investigación, Análisis formal, Redacción en Borrador original.

Brahiam, Ramírez, Investigación, Análisis formal, Supervisión, Curación de datos.

Alejandra, Mondaca-Saavedra, Investigación, Análisis formal, Curación de datos.

Referencias

Arnold, P., Confrey, J., Jones, R., Lee, H. y Pfannkuch, M. (2018). Statistics Learning Trajectories. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 295–326). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_9

Ben-Zvi, D., Aridor, K. y Makar, K. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM Mathematics Education, 44*(1), 913–925. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3

Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing student´s statistical reasoning. En S. Estrella, et al. (Eds.), *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13–22). SOCHIEM - Universidad Católica de Valparaíso, Chile. https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2016-valparaiso-xx-pucv.pdf

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81–89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Engel, J., Ridgway, J. y Weber Stein, F. (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *PARADIGMA, 41*(e1), 01–31. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p01-31.id1016

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo XXI* (pp. 173-194). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación y Universidad Central de Venezuela.

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, A., M. Meletiou y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education* – Supporting early statistical and probabilistic thinking (pp. 239–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*(1), 293–310. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09423-y

Estrella, S., Vergara, A. y Gonzalez, O. (2021). Developing data sense: Making inferences from variability in tsunamis at primary school. *Statistics Education Research Journal*, *20*(2), 16–16. https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.413

Estrella, S., Méndez-Reina, M. y Vidal-Szabó, P. (2023a). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal*, *22*(2), 1–16. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426

Estrella, S., Méndez-Reina, M., Salinas, R. y Rojas, T. (2023b). The Mystery of the Black Box: An Experience of Informal Inferential Reasoning. En G. Burrill, L. De Oliveira y E. Reston (Eds.), *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives. Advances in Mathematics Education* (pp. 191–210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_16

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE study: teaching statistics in school mathematics*. Proceedings ICMI Study 18 and 2008 IASE. ICMI y IASE.

Gravemeijer, K., Bowers, J. y Stephan, M. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *12*, 51–66.

Inzunza, S. e Islas, E. (2019). Diseño y Evaluación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para intervalos de confianza basada en simulación y datos reales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 1-26. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a01

Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. y Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 305–325. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8

Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. y Jansem, S. (2011). The Role of Context Expertise When Comparing Data. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1), 47–67. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. y Paparistodemou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7

Lobato, L. y Walters, C. (2017). A taxonomy of approaches to learning progressions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 74–101). NCTM.

Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82–105. https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457

Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1), 152–173. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301

Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8

Méndez-Reina, M., y Estrella, S. (2024). Razonamiento inferencial en Estadística Temprana: aspectos estructurales desde tipos de razonamiento de Peirce y estructura argumental de Toulmin. En S. Estrella, M. Parraguez y R. Olfos (Eds.), *Pensamiento Matemático: Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática*. Editorial GRAO.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Educación General Básica*. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/05/basica_2023_digital.pdf

Moore, D. S. (2005). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings ICOTS7: Working cooperatively in statistics education*. ISI.

Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 343–360. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1

Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 107–129. https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.472

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: A statistician's view. S*tatistics Education Research Journal, 7*(2), 5–19. https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.467

Rubin, A., Hammerman, J. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings ICOTS7: Working cooperatively in statistics education*. ISI.

Sánchez, E., García-Ríos, V. N. y Sepúlveda, F. (2024). Development of high school students' conceptions of sampling distribution in the context of learning significance tests with technology. *Educational Studies in Mathematics*, *117*(2), 215-238. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10330-8

Sannomiya, M., Mashimo, T. y Yamaguchi, Y. (2021). Creativity training for multifaceted inferences of reason behind others' behaviors. *Thinking Skills and Creativity, 39*, 100757. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100757

Silvestre, E., Sánchez, E. A. e Inzunza, S. (2022). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre el muestreo repetido y la distribución muestral empírica. *Educación Matemática, 34*(1), 100–130. https://doi.org/10.24844/EM3401.04

Simon, M. (2020). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72

Soto, C., Gutiérrez de Blume, A., Jacovina, M., McNamara, D., Benson, N. y Riffo, B. (2019). Reading comprehension and metacognition: The importance of inferential skills. *Cogent Education, 6*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1565067

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Lawrence Erlbaum Associates.

van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2020). Repeated sampling with a black box to e informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(2), 116–138. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025

van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2021). Introducing Statistical Inference: Design of a Theoretically and Empirically Based Learning Trajectory. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(4), 1743–1766. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10208-8

Watson, J., Fitzallen, N. y Carter, P. (2013). *Top Drawer Teachers: Statistic*s. Education Services Australia.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistic Education Research Journal*, *7*(2), 40–58. https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469

Anexos

Anexo 1

TABLA V
Manifestación de indicadores del Paso 1 de la THA en los grados 3 y 4

Paso 1: Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido	*Registro en tableros individuales*	*Intervenciones de estudiantes en videos*
1.a Elige uno de los sucesos de la experiencia aleatoria	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 7% Cuarto: 8%
1.b Efectúa una acción iterativa sobre objetos concretos identificando el suceso resultante	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 4% Cuarto: 9%
1.c Registra la ocurrencia de cada uno de los sucesos	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 8% Cuarto: 11%
1.d Establece frecuencia máxima o alturas de las ocurrencias de cada suceso en el tablero	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 6%
1.e Contrasta si su predicción se cumplió o no, respecto a los datos resultantes de la experiencia aleatoria, pudiendo mantener o cambiar predicción	N/A	Tercero: 2% Cuarto: 5%
1.f Compara las muestras propias obtenidas de cada experiencia aleatoria y nota alguna regularidad	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 2%
1.g Vivencia la incertidumbre presente en la experiencia aleatoria	N/A	Tercero: 4% Cuarto: 3%
TOTAL		Tercero: 31% Cuarto: 43%

Nota. En las transcripciones de las videograbaciones se cuantificaron las intervenciones asociadas a los indicadores con respecto al total de intervenciones hechas por estudiantes en el Paso correspondiente; mientras que desde los registros de tableros individuales se verificó la presencia del indicador.

ANEXO 2

TABLA VI
Resultados del Paso 2 de la THA

Paso 2: Visualizar y reconocer la variación entre muestras	*Registro en tableros individuales*	*Intervenciones de estudiantes en videos*
2.a Compara frecuencias y detecta el suceso que tiene frecuencia máxima en la muestra (variación muestral)	N/A	Tercero: 7% Cuarto: 7%
2.b Compara frecuencias de los sucesos tras varias repeticiones (variación muestral)	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 6%
2.c Compara frecuencias que se van tabulando observando el comportamiento de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; aleatoriedad; visualización)	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 5%
TOTAL		Tercero: 14% Cuarto: 18%

ANEXO 3

TABLA VII
Resultados del Paso 3 de la THA

Paso 3: Asignar nivel de confianza a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica	*Registro en tableros individuales*	*Intervenciones de estudiantes en videos*
3.a Compara frecuencias tabuladas para visualizar el comportamiento regular de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; variación máxima muestral; visualización)	N/A	Tercero: 4% Cuarto: 1%
3.b Asigna un nivel de confianza a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (aleatoriedad; lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 14% Cuarto: 6%
TOTAL		Tercero: 18% Cuarto: 7%

Anexo 4

TABLA VIII
Resultados del Paso 4 de la THA

Paso 4: Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre	*Registro en tableros individuales*	*Intervenciones de estudiantes en videos*
4.a Concluye más allá de los datos sin justificar ni expresar niveles de confianza (predicción)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 4% Cuarto: 2%
4.b Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras sin expresar un nivel de confianza (distribución muestral empírica; variación muestral; frecuencia máxima muestral)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 9% Cuarto: 5%
4.c Concluye más allá de los datos obtenidos, sin explicitar justificaciones y expresa cierto nivel de confianza (aleatoriedad, lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 1% Cuarto: 4%
4.d Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras y expresando un cierto nivel de confianza (distribución muestral empírica; aleatoriedad; lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 3% Cuarto: 2%
4.e Bosqueja una distribución de frecuencias imaginando el comportamiento de una próxima muestra (distribución muestral empírica; visualización; aleatoriedad)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 5% Cuarto: 5%
TOTAL		Tercero: 22% Cuarto: 17%

Autores

Soledad Estrella. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile. soledad.estrella@pucv.cl

https://orcid.org/0000-0002-4567-2914

Sergio Morales. Universidad de Concepción. Los Ángeles, Chile. sergmorales@udec.cl

https://orcid.org/0000-0001-5980-6816

Maritza Méndez-Reina. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile. maritzamendez@pensadoresmatematicos.com

https://orcid.org/0000-0003-0830-0924

Pedro Vidal-Szabó. Universidad del Desarrollo. Santiago, Chile. pfvidal@udd.cl

https://orcid.org/0000-0002-3320-9789

Brahiam Ramírez. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile. brahiam.ramirez@pucv.cl

https://orcid.org/0000-0002-7482-4067

Alejandra Mondaca-Saavedra. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile. alejandra.mondaca@pucv.cl

https://orcid.org/0000-0001-5403-9646

María Virginia Figueroa, Omar Malet

CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE RÚBRICAS PARA VALORAR LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE CLASES DE MATEMÁTICA

Construction and validation of rubrics to assess didactic suitability of mathematics classes

RESUMEN

En este artículo se describe la construcción y validación de rúbricas destinadas a sistematizar información para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción matemática en sus seis facetas. Para la construcción se tomaron como base los indicadores de idoneidad que propone Juan D. Godino, precursor del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS), a los que se les asociaron cuatro niveles de logro; a cada uno de los niveles se le hizo corresponder un puntaje, habilitando el tratamiento cuantitativo de los indicadores y de las distintas facetas de idoneidad. La confiabilidad de equivalencia de los instrumentos fue evaluada a través de la técnica test-retest y el cálculo del coeficiente kappa de Cohen; la validez de contenido de los niveles propuestos para cada uno de los indicadores fue evaluada mediante el criterio de jueces expertos y el cálculo de la V de Aiken.

PALABRAS CLAVE:

- *Rúbricas*
- *Validación*
- *Enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática*
- *Idoneidad didáctica*
- *Educación matemática*

ABSTRACT

This article describes the construction and validation of rubrics aimed at systematizing information to assess the didactic suitability of a mathematical instruction process in its six facets. For the construction, the suitability indicators proposed by Juan D. Godino, forerunner of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Instruction (EOS), were associated with four levels of achievement; A score was assigned to each of the levels, enabling the quantitative treatment of the indicators and the different facets of suitability. The reliability of equivalence of the instruments was evaluated through the test-retest technique and the calculation of Cohen's kappa coefficient; the content validity of the levels proposed for each of the indicators was evaluated using the criteria of expert judges and the calculation of the V of Aiken.

KEY WORDS:

- *Rubrics*
- *Validation*
- *Ontosemiotic approach to math instruction*
- *Didactic suitability*
- *Mathematics education*

Figueroa, M. V. y Malet, O. (2024). Construcción y validación de rúbricas para valorar la idoneidad didáctica de clases de matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(1), 43-72. https://doi.org/10.12802/relime.24.2712. Recepción: Junio 29, 2021 / Aceptación: Noviembre 13, 2024.

RESUMO

Este artigo descreve a construção e validação de rubricas com o objetivo de sistematizar informações para avaliar a adequação didática de um processo de instrução matemática em suas seis facetas. Para a construção, os indicadores de aptidão propostos por Juan D. Godino, precursor da Abordagem Ontosemiótica da Instrução Matemática (EOS), foram associados a quatro níveis de aproveitamento; Foi atribuída uma pontuação a cada um dos níveis, permitindo o tratamento quantitativo dos indicadores e das diferentes facetas da adequação. A confiabilidade da equivalência dos instrumentos foi avaliada por meio da técnica de teste-reteste e cálculo do coeficiente kappa de Cohen; a validade de conteúdo dos níveis propostos para cada um dos indicadores foi avaliada por meio dos critérios de juízes especialistas e do cálculo do V de Aiken.

PALAVRAS CHAVE:

- *Rubricas*
- *Validação*
- *Abordagem ontosemiótica para o ensino de matemática*
- *Adequação didática*
- *Educação matemática*

RÉSUMÉ

Cet article décrit la construction et la validation de rubriques visant à systématiser l'information pour évaluer la pertinence didactique d'un processus d'enseignement mathématique dans ses six facettes. Pour la construction, les indicateurs d'adéquation proposés par Juan D. Godino, précurseur de l'Approche Ontosémiotique de l'Enseignement Mathématique (EOS), ont été associés à quatre niveaux de réalisation ; Une note a été attribuée à chacun des niveaux, permettant le traitement quantitatif des indicateurs et des différentes facettes de l'adéquation. La fiabilité d'équivalence des instruments a été évaluée par la technique test-retest et le calcul du coefficient kappa de Cohen ; la validité de contenu des niveaux proposés pour chacun des indicateurs a été évaluée à l'aide des critères de juges experts et du calcul du V d'Aiken.

MOTS CLÉS:

- *Rubriques*
- *Validation*
- *Approche ontosémiotique de l'enseignement des mathématiques*
- *Aptitude didactique*
- *Enseignement des mathématiques*

1. Introducción

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) pretende explicar y valorar muchos de los sucesos que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, teniendo en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado (Godino et al., 2012).

Uno de sus aportes para reflexionar sobre la práctica y así poder mejorar un proceso de instrucción es el constructo Idoneidad Didáctica. Godino (2013) propone un conjunto de indicadores para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción; es sin duda un desafío construir a partir de ellos un instrumento válido y confiable para aquel fin.

En este trabajo se presentan las rúbricas como una alternativa para realizar un análisis de la idoneidad didáctica, a partir de sistematizar a través de ellas la información recolectada mediante técnicas tales como la observación de clases, el análisis de documentos, etc.

Las rúbricas que se describen fueron elaboradas en el marco de una tesis de maestría (Figueroa, 2019), y aplicadas para valorar la idoneidad didáctica de *Matemática y Metodología para su Estudio*, una de las asignaturas del área de ingreso a una universidad nacional de la República Argentina.

Una rúbrica es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones. Si bien generalmente se la define como el conjunto de criterios y estándares ligados a los objetivos de aprendizaje usados para evaluar la actuación de estudiantes en la creación de artículos, proyectos, ensayos y otras tareas (Alfaro Guevara, 2010), si se la adecua convenientemente también puede ser una herramienta útil para evaluar otro tipo de objetos. Las rúbricas posibilitan una evaluación objetiva, justa e imparcial de lo que se observe mediante una escala que mide aquellos aspectos que se quieren evaluar.

En la próxima sección se ofrecerá una síntesis sobre el EOS y su constructo Idoneidad Didáctica, y sobre las rúbricas. Luego se procederá a explicar cómo se construyeron y mediante qué técnicas se validaron las rúbricas construidas. Por último, se expondrán los resultados obtenidos al validarlas y las conclusiones que se desprenden de este trabajo.

2. Marco teórico: El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS es un sistema teórico híbrido, modular e inclusivo que busca articular diversas teorías existentes sobre didáctica de la matemática (Godino, 2017).

Para Breda et al. (2018) a la didáctica de la matemática se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática y, la segunda, que estos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje. La segunda lleva a su valoración y mejora. En general, los enfoques teóricos que se han generado en la didáctica de la matemática están más cómodos con la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/explicativa) que con la segunda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) (Breda et al., 2018). En el marco del EOS se ha decidido no dar la espalda a la segunda demanda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) y afrontarla a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo Idoneidad Didáctica (Godino et al., 2007).

El EOS define la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino et al., 2006). La idoneidad didáctica, a su vez, está compuesta por seis idoneidades parciales o facetas que en términos de Godino et al. (2007) se definen como:

– *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
– *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos / implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos / implementados.
– *Idoneidad interaccional*, se considera que un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
– *Idoneidad mediacional*, se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
– *Idoneidad afectiva*, expresa el grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen del estudiante y de su historia escolar previa.
– *Idoneidad ecológica*, es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

En la Tabla I se presenta el criterio general de idoneidad para cada una de las facetas mencionadas, y se enumeran las componentes principales de cada una de ellas.

TABLA I
Criterio general de idoneidad y componentes de cada faceta

Idoneidad	*Criterio general de idoneidad* [a]	*Componentes* [b]
Epistémica	El sistema de significados institucionales parciales del contenido y las configuraciones de objetos y procesos vinculados a cada significado, implementados a lo largo del proceso instruccional, deben ser articulados, ser representativos del significado global de referencia y considerar las circunstancias contextuales y personales de los sujetos involucrados.	Situaciones-problemas, lenguajes, reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos), argumentos y relaciones.
Cognitiva	Los objetivos de aprendizaje deben plantear un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, considerando sus circunstancias personales y contextuales. Además, los significados personales alcanzados por los estudiantes deben ser coherentes con los significados institucionales planificados. La evaluación del aprendizaje debe servir para mejorar el proceso instructivo.	Conocimientos previos, adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y aprendizaje.
Interaccional	Los patrones de interacción deben servir para identificar potenciales conflictos semióticos, poner medios adecuados para su resolución, favorecer la progresiva autonomía en el aprendizaje y desarrollar las competencias comunicativas de los estudiantes.	Interacciones docente-discente, interacciones entre estudiantes, autonomía y evaluación formativa.
Mediacional	Se debe disponer de recursos adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje.	Recursos materiales (pizarrones, hojas, lápices, calculadoras, computadoras, tabletas, etc.), condiciones del aula, el horario de la clase, la cantidad de estudiantes, el tiempo de enseñanza colectiva y el tiempo de aprendizaje.
Afectiva	El proceso de instrucción debe buscar involucrar a los estudiantes (interés, motivación, autoestima) y considerar sus creencias sobre las matemáticas y su aprendizaje.	Actitudes, emociones, intereses y necesidades.
Ecológica	El proceso educativo-instruccional debe ser conforme al proyecto educativo del centro y de la sociedad, considerando los condicionantes del contexto en que se desarrolla, así como las innovaciones basadas en la investigación educativa.	Adaptación al currículum, apertura hacia la innovación didáctica, adaptación socio-profesional y cultural, educación en valores y conexiones intra e interdisciplinares.

Nota: [a] Godino et al. (2023). [b] Godino (2013)

Las facetas mencionadas, además, interactúan entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales relativos a las distintas facetas, teniendo en cuenta el contexto en que el proceso valorado tiene lugar (Godino et al., 2019). Por ejemplo, el logro de una idoneidad alta en la dimensión epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Es por ello que tanto la mejora de la idoneidad como su valoración son procesos complejos que involucran diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, ni las dimensiones ni los componentes son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos (Godino, 2015).

3. Las rúbricas

Una rúbrica es una matriz que en principio puede explicarse como un listado del conjunto de criterios específicos y fundamentales que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos o las competencias logrados por el estudiante en un trabajo o materia particular. Es una escala ordinal que destaca una evaluación del desempeño centrada en aspectos cualitativos, aunque es posible el establecimiento de puntuaciones numéricas (Martínez-Rojas, 2008). Como ya se dijo, aunque el uso más extendido de las rúbricas en el ámbito educativo es el de valorar los aprendizajes de los estudiantes, se las puede adecuar para evaluar otro tipo de objetos.

Cualquier rúbrica debe considerar las siguientes premisas: ser coherente con los objetivos que se persiguen, apropiada ante el nivel de lo que se quiere estudiar, y establecer niveles con términos claros (Gatica-Lara y Uribarren-Berrueta, 2013).

La mayor de sus fortalezas radica en el claro establecimiento de los criterios de evaluación, para los que se diferencian varios niveles de consecución a través de una serie de descripciones cualitativas. Esta composición es clave, ya que diferencia una rúbrica de otros sistemas de evaluación. Más allá de sus tres componentes (criterios de evaluación, descripciones cualitativas y niveles de consecución), la particularidad que aporta valor y utilidad a las rúbricas es la inclusión de descripciones para cada nivel de consecución, generando diferentes graduaciones de calidad (Alcón Latorre y Menéndez Varela, 2018).

Una buena rúbrica evalúa en forma válida y no arbitraria al objeto de estudio en cuestión, basándose en sus características centrales y no, en las más fáciles de ver, contar o calificar. Se basa en lenguaje descriptivo, haciendo notar las características distintivas de cada nivel, más que apoyarse en comparaciones o lenguaje estimativo (“excelente producto” o “no tan completo”).

Existen dos tipos de rúbricas, las globales y las analíticas. La rúbrica global, comprehensiva u holística hace una valoración integrada, sin determinar los componentes del proceso o del objeto evaluado. Se trata de una valoración general con descriptores correspondientes a niveles de logro sobre calidad, comprensión o dominio globales. Cada nivel se define claramente. La rúbrica analítica, en cambio, se utiliza para evaluar las partes del objeto de estudio, desglosando sus componentes para obtener una valoración total. Puede utilizarse para identificar fortalezas y debilidades. Estas matrices definen con detalle los criterios para evaluar la calidad del objeto de estudio. Además, cada criterio puede subdividirse de acuerdo a la profundidad requerida. Se recomienda utilizar la rúbrica analítica cuando hay que identificar los puntos fuertes y débiles, tener información detallada y valorar situaciones complejas (Gatica-Lara y Uribarren-Berrueta, 2013).

4. Metodología

Se deben diferenciar dos etapas: la primera, relacionada con la construcción de las rúbricas, y la segunda, con la validación de las mismas. La construcción se llevó a cabo a partir de un estudio bibliográfico. Para la validación se utilizó un diseño cuantitativo no experimental-correlacional orientado a evaluar la validez y la confiabilidad de las rúbricas construidas.

4.1. *Construcción de las rúbricas*

Según Alcón Latorre (2016), el mayor reto que plantea el diseño de rúbricas es el de encontrar indicadores claros y válidos para evidenciar la consecución de los objetivos o estándares establecidos y sobre los que, además, puedan existir grados aceptables de acuerdo y conformidad entre los evaluadores que las utilicen. Este aspecto no representó un reto como tal, ya que como el objetivo era valorar de manera global la idoneidad didáctica de un proceso de estudio que contempla diversos objetos y procesos matemáticos, se adoptaron los componentes y los indicadores generales propuestos por Godino (2013). Sin embargo, para refinar las rúbricas en función de un objeto o proceso matemático específico, sería necesario recurrir a componentes e indicadores también específicos como los que se proponen en otras investigaciones (por ejemplo: Beltrán-Pellicer et al., 2018; Castillo Céspedes et al., 2022; Inglada Rodríguez et al., 2024; Ledezma et al., 2024; Pallauta et al., 2023).

Aunque definir indicadores no fue un reto, el reto que sí se presentó fue el de definir los niveles de análisis. Según Martínez-Rojas (2008), la clave de una rúbrica es poder graduar los diferentes niveles teniendo suficientes criterios o elementos que definan un determinado nivel. Alcón Latorre (2016) propone empezar identificando las cualidades necesarias del indicador que conformarían el nivel de mayor consecución en la rúbrica. Una vez hecho esto, sugiere continuar por centrar la atención en definir el nivel de menor consecución de la rúbrica, respondiendo a qué tipo de cualidad o cualidades demostrarían una calidad muy limitada de los criterios a evaluar. Según la autora, el contraste existente entre los niveles máximo y mínimo facilitaría la definición del nivel medio, con lo que se conformarían tres niveles de consecución. Este ejercicio de comparación entre niveles volvería a ser necesario en el caso de querer conformar más graduaciones de calidad, hasta alcanzar el número de niveles deseados o hasta no poder identificar distinciones relevantes entre ellos. En cuanto al número adecuado de niveles que deberían conformar una rúbrica, parece no haber consenso en la literatura (Alcón Latorre y Menéndez Varela, 2018).

TABLA II
Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes	*Indicadores*
Conocimientos previos	– Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). – Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	– Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. – Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje	– Los diversos modos de evaluación indican que los estudiantes logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas. – Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. – La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. – Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Nota: Godino (2013, p. 121).

Las seis rúbricas construidas en el marco de esta investigación fueron analíticas y, como ya se mencionó, en su elaboración se utilizaron los indicadores propuestos por Godino (2013). A modo de ejemplo, en la Tabla II se presentan los indicadores de idoneidad cognitiva.

Las rúbricas analíticas que se elaboraron para valorar la idoneidad didáctica se dividieron en distintos niveles de valoración, cuatro en total. La elección de la cantidad de niveles y la graduación de los mismos, como ya se mencionó, se presentó como un reto en esta investigación. Definir tres niveles de valoración resultaba escaso, porque no permitía considerar los matices que se presentan en la realidad entre los niveles máximo y mínimo; definir cinco niveles parecía ser la mejor opción, aunque se temía que dos niveles consecutivos fueran demasiado parecidos entre sí y eso dificultara la elección por uno de ellos al momento de evaluar; y definir cuatro niveles, resultó ser la mejor opción, ya que permitía tomar dos niveles intermedios entre el mínimo y el máximo nivel. Uno de estos niveles intermedios se consideró más cercano al nivel mínimo y el otro, más cercano al nivel máximo. En cuanto a la graduación de los niveles, pivota sobre cuantificadores no numéricos de frecuencia.

Para describir cualitativamente los distintos niveles se consideraron los indicadores por separado; para cada uno se definieron los niveles extremos: el Nivel 1 (muy bueno), como aquel en el que el indicador se manifiesta en su máxima expresión, y el Nivel 4 (no satisfactorio), como aquel en el que se presenta en su mínima expresión. A partir de estos dos extremos se generaron dos niveles intermedios, Nivel 2 y Nivel 3 (bueno y regular, respectivamente), que devienen de la graduación del indicador desde el Nivel 1 hasta el Nivel 4. Además, a cada nivel se le asoció una puntuación. La escala de puntuación va de 3 puntos a 0 puntos, calificando con 3 puntos al Nivel 1, con 2 puntos al Nivel 2, con 1 punto al Nivel 3 y con 0 puntos al Nivel 4. La introducción de esta escala permite tratar cuantitativamente la información recogida. Una opción para hacerlo consiste en calcular, para cada idoneidad, el porcentaje que resulta del cociente entre la sumatoria de puntos efectivamente registrados por dicha idoneidad, y la puntuación más alta posible, y discutir a partir de qué porcentaje dicha idoneidad se considerará alcanzada en grado satisfactorio (en la investigación en la que se enmarcan las rúbricas, 60%).

A modo de ejemplo, en la Tabla III de la siguiente página, se presenta la rúbrica construida para valorar la idoneidad cognitiva. Las rúbricas para evaluar las otras facetas de idoneidad se encuentran en el Anexo al final de este artículo.

TABLA III
Rúbrica para valorar la idoneidad cognitiva de las clases

		Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Conocimientos Previos*	Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).	Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema.	Algunos de los estudiantes no tienen los conocimientos previos y necesarios para abordar los problemas planteados.	Muy pocos estudiantes tienen los conocimientos previos y necesarios para abordar los problemas planteados.	Los estudiantes no cuentan con los conocimientos necesarios para abordar los problemas planteados.
		Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar de manera autónoma (tienen una dificultad manejable).	No todos los contenidos pretendidos se pueden alcanzar de manera autónoma.	Muy pocos de los contenidos pretendidos se pueden alcanzar de manera autónoma.	Los contenidos pretendidos no se llegan a alcanzar de manera autónoma.
	Adaptaciones Curriculares	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	Se incluyen algunas actividades de ampliación y de refuerzo.	Se incluyen muy pocas actividades de ampliación y de refuerzo.	No hay propuestas actividades de ampliación y de refuerzo.
		Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.	Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes teniendo en cuenta las diferencias individuales.	Se promueve de alguna manera el acceso y el logro de todos los estudiantes, pero sin tener del todo presentes las diferencias individuales.	Se promueve muy poco el acceso y el logro de todos los estudiantes, ya que se consideran en contados casos las diferencias individuales.	No se consideran las individualidades o no se promueve el acceso.

Componentes	*Aprendizaje*	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas.	En las evaluaciones se evidencia que los estudiantes se apropiaron del conocimiento.	Las evaluaciones evidencian que algunos de los estudiantes no aprendieron los contenidos propuestos.	Las evaluaciones evidencian que muy pocos estudiantes aprendieron los contenidos propuestos.	Las evaluaciones evidencian que los estudiantes no aprendieron lo esperado.
		Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva.	Comprenden las consignas y pueden comunicar satisfactoria-mente sus respuestas.	Algunas de las consignas que se les plantean no las comprenden, o bien, no pueden comunicar de manera totalmente satisfactoria sus respuestas.	Muy pocas consignas son comprendidas por parte de los estudiantes y/o solo unos pocos son capaces de comunicar sus respuestas.	No comprenden las consignas o no pueden comunicar sus respuestas.
		La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.	Las evaluaciones que se realizan consideran el nivel cognitivo de los distintos estudiantes.	Algunas de las evaluaciones que se realizan consideran el nivel cognitivo de los distintos estudiantes.	Muy pocas de las evaluaciones que se realizan consideran el nivel cognitivo de los distintos estudiantes.	Las evaluaciones que se realizan no consideran el nivel cognitivo de los distintos estudiantes.
		Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.	Las evaluaciones se difunden y se usan para tomar decisiones.	Algunas de las evaluaciones se socializan y/o se utilizan como un instrumento de toma de decisiones.	En raras ocasiones se socializan las evaluaciones y/o se utilizan como un instrumento de toma de decisiones.	Dichas evaluaciones no se consideran para la toma de decisiones o no se socializan.

Nota: Figueroa (2019, p. 56)

Una vez elaboradas las seis rúbricas para valorar cada una de las idoneidades parciales, se procedió a validarlas. Según Campo-Arias y Oviedo (2008), los instrumentos de medición deben mostrar altos valores de validez y de confiabilidad. Para la psicometría, la validez alude la capacidad del instrumento de medir el constructo que pretende cuantificar, y la confiabilidad, a la propiedad de mostrar resultados similares, libres de error, en repetidas mediciones. La confiablidad de un instrumento es un requisito necesario pero no suficiente: un instrumento puede ser confiable pero no válido. Por lo tanto, se requiere que cumpla ambas características. En los apartados siguientes se exponen los métodos mediante los cuales se procedió a evaluar la confiabilidad y la validez de las rúbricas construidas.

4.2. *Confiabilidad*

Según Argibay (2006), en el análisis de la confiabilidad se deben considerar tres aspectos del instrumento:

1. Su *consistencia interna*. Esta consiste en que las distintas partes que componen el instrumento estén midiendo lo mismo.
2. Su *estabilidad*. Lo que se observa es en qué grado se obtienen las mismas medidas al aplicar dos veces el mismo instrumento, mediando entre ambas tomas un tiempo determinado.
3. La *equivalencia*. Una forma de equivalencia consiste en determinar la confiabilidad entre evaluadores u observadores.

La consistencia interna de las rúbricas elaboradas no fue medida porque a los fines de la investigación se asume que está avalada por el trabajo de Godino (2013), en tanto se utilizaron los indicadores que el autor propone. En este sentido, se acepta el supuesto de que los indicadores correspondientes a cada idoneidad parcial entregan información sobre una misma cualidad del objeto evaluado (su idoneidad).

Tampoco se consideró pertinente medir la estabilidad de las rúbricas. La determinación de la estabilidad de un instrumento requiere ponerlo a prueba en dos momentos diferentes, dejando pasar un tiempo entre cada aplicación. Tratándose de clases universitarias, las puntuaciones de la segunda aplicación pueden resultar distorsionadas por la incidencia de factores difícilmente controlables, ligados a las variables cognitivas y socio-afectivas (Meneses, 2013). Por ejemplo, el nivel cognitivo de los estudiantes podría cambiar debido a que llevarían más tiempo estudiando la materia; también podría modificarse la relación e interacción que se da entre los estudiantes y con el/la docente por el paso del tiempo, ya que en ese tiempo podría aumentar la confianza entre los diferentes actores o se podrían crear lazos de amistad.

Por lo antes expuesto, se decidió analizar la confiabilidad desde el punto de vista de la equivalencia de las rúbricas. Para ello, se les pidió a tres parejas pedagógicas de docentes en actividad que evaluaran con las rúbricas las clases que compartían, y que lo hicieran por separado (técnica test-retest), considerando el recorrido global del grupo de estudiantes (que conocían por ser sus docentes), y no, observando clases puntuales.

Para analizar la equivalencia se utilizó el coeficiente kappa de Cohen, que permite estudiar el nivel de concordancia en las calificaciones a partir de dos administraciones del test. Posiblemente este sea el coeficiente de consistencia más extensamente utilizado en la literatura. Su fórmula viene dada por la expresión siguiente:

$$k = \frac{p_c - p_a}{1 - p_a}$$

donde p_c y p_a son, respectivamente, el porcentaje de acuerdo entre los evaluadores y el porcentaje que se esperaría por azar, que se calcula con la siguiente fórmula:

$$p_a = \frac{\sum n_j n_i}{n^2}$$

donde n_j es el número de sujetos clasificados como competentes (o no competentes) por el evaluador A y n_i es el número de sujetos clasificados como competentes (o no competentes) por el evaluador B. Además n es el número total de sujetos evaluados.

Por las características del instrumento, en el caso de este trabajo se adaptó la fórmula de la siguiente manera:

$$p_a = \sum \frac{n_{iA} n_{iB}}{n^2}$$

donde n_{iA} y n_{iB} son el número de indicadores clasificados en cada uno de los cuatro niveles i por cada evaluador (A o B) y n el número total de indicadores de cada rúbrica.

4.3. *Validez*

Según Muñiz (1998), se concibe la validez como un concepto unitario. Para recabar información empírica probatoria de la validez se deben emplear procedimientos clásicos y muy utilizados, orientados a determinar la *validez de contenido*, la *validez de criterio* y la *validez de constructo.*

1. La *validez de contenido* hace referencia a la relación que existe entre los ítems que componen el test y lo que se pretende evaluar con él, prestando atención tanto a la relevancia como a la representatividad de los ítems (Meneses, 2013).

2. La *validez de criterio* se centra en la comprobación de que las pruebas predicen aquello para lo que fueron diseñadas. Respecto de la validez de criterio se distingue entre *validez concurrente* y *validez predictiva*. La diferencia entre ambas formas de validez radica en la temporalidad del criterio. Si las puntuaciones del test se utilizan para predecir alguna medida del criterio que se va a realizar a futuro, se habla de validez predictiva. Si, por el contrario, se relacionan las puntuaciones del test con alguna medida del criterio tomada en el mismo momento, se habla de validez concurrente (Argibay, 2006).
3. La *validez de constructo* trata de asegurar que las variables o constructos medidos, además de capacidad predictiva, tienen entidad y rigor, y se encuentran insertos dentro de un marco teórico coherente (Muñiz, 1998).

En el caso de las rúbricas, la validez de criterio y la validez de constructo se suponen garantizadas y justificadas teóricamente por los trabajos de Godino, uno de los autores de la Teoría de la Idoneidad Didáctica, del cual se tomaron los indicadores utilizados, asumiendo su capacidad predictiva, entidad y rigor.

La validez que sí se procedió a analizar fue la validez de contenido. Una forma de analizar esta validez consiste en acudir a un grupo de expertos en la materia cuyo número varía según los requerimientos del instrumento de que se trate, quienes actúan como jueces (Meneses, 2013) y expresan su aprobación o desaprobación sobre la inclusión o redacción de un ítem. Las valoraciones asignadas por cada juez respecto de un ítem pueden ser dicotómicas (recibir valores de 0 o 1) o politómicas (recibir valores de 1 a 5, por ejemplo) (Escurra, 1988).

Para validar el contenido de las rúbricas se les solicitó a diez docentes de la cátedra de Matemática y Metodología para su Estudio, que, previa lectura de un documento elaborado *ad hoc* sobre la noción de idoneidad didáctica, evaluaran qué tan de acuerdo estaban con los cuatro niveles propuestos para cada indicador, según la siguiente escala de Likert:

1: Totalmente en desacuerdo
2: Parcialmente en desacuerdo
3: Indiferente (No puede indicar ni acuerdo ni desacuerdo de forma precisa)
4: Parcialmente de acuerdo
5: Totalmente de acuerdo

Los diez docentes seleccionados fueron aquellos con mayor antigüedad en la cátedra.

El relativamente elevado número de docentes que actuaron como jueces respecto del número de integrantes del equipo docente de la cátedra (aproximadamente, la tercera parte de este último), y la diversidad de sus trayectorias en el ámbito educacional (todos ellos se desempeñaban en otros niveles del sistema educativo, y en otras instituciones educativas) se consideran cualidades relevantes a los fines de moderar (si no eliminar) potenciales sesgos en la evaluación.

Una vez obtenidas las evaluaciones realizadas por los jueces expertos, se procedió a calcular la V de Aiken. La ecuación utilizada, algebraicamente modificada por Penfield y Giacobbi (2004), citados por Merino Soto y Livia Segovia (2009), fue:

$$V=\frac{\bar{X}-1}{K}$$

donde:

$\bar{X}$ es la media de las calificaciones de los jueces en la muestra.

1 es la calificación más baja posible.

K es la diferencia entre el mayor y menor puntaje que es posible obtener según la escala de Likert utilizada.

Este coeficiente puede tomar valores entre 0 y 1, y a medida que sea más elevado el valor obtenido, el ítem tendrá una mayor validez de contenido.

Para la construcción de intervalos de confianza se puede utilizar el método de Wilson (1927), citado en Merino Soto y Livia Segovia (2009). Este es conocido como método *score*, y es muy empleado ya que no depende de que la distribución de la variable sea normal. Se parte de las ecuaciones L y U en las que se establecen los valores del límite inferior y superior del intervalo de confianza:

$$L=\frac{2nKV+Z^2-Z\sqrt{4nKV(1-V)+Z^2}}{2(nK+Z^2)}\ ; \qquad U=\frac{2nKV+Z^2+Z\sqrt{4nKV(1-V)+Z^2}}{2(nK+Z^2)}$$

donde:

L es el límite inferior del intervalo.

U es el límite superior del intervalo.

Z es el valor en distribución normal estándar.

K y V son los de la fórmula de la V de Aiken.

n es el número de jueces.

Si el número de jueces es pequeño conviene elegir un nivel de confianza igual al 90%. El intervalo de confianza para la V de Aiken permite ver si el valor obtenido para este coeficiente es superior a uno establecido como mínimamente aceptable; esto es, los valores mínimos y máximos del intervalo sobre los cuales se decide qué ítems se deben aceptar o rechazar. Es fácil concluir que a medida que la cantidad de jueces se incremente, la amplitud del intervalo será menor, y por lo tanto, la precisión de la estimación del coeficiente será mejor (Merino Soto y Livia Segovia, 2009). Por ejemplo, si se desea probar si un coeficiente V de Aiken es significativamente diferente del mínimo valor de validez según los estándares de los expertos, se puede considerar un valor liberal de L = 0,50, o un valor más conservador, como L = 0,70 o más (Charter, 2003, citado en Merino Soto y Livia Segovia, 2009).

5. Análisis y resultados

Al analizar la confiabilidad de equivalencia de las rúbricas, los resultados obtenidos para el coeficiente kappa de Cohen con la técnica test-retest fueron "aceptables" o "muy buenos" para todas las rúbricas (Tabla IV). Valores del coeficiente kappa de Cohen cercanos a 1 indican que la consistencia en la clasificación de los sujetos a partir del test es perfecta, mientras que valores cercanos a 0 indican que la consistencia en la clasificación es debida al azar (en este caso la aplicación de los tests no ha mejorado la consistencia que por azar se podría obtener). En general, los valores del coeficiente kappa que oscilan entre 0,6 y 0,8 se consideran aceptables y aquellos que se sitúan por encima de 0,8 se interpretan como muy buenos (Meneses, 2013).

TABLA IV
Coeficientes Kappa de Cohen obtenidos para cada rúbrica

		Coeficiente Kappa de Cohen		
		Pareja 1	*Pareja 2*	*Pareja 3*
Idoneidad	*Epistémica*	0,833	0,750	0,8330
	Cognitiva	0,750	0,875	0,750
	Afectiva	0,667	0,667	0,667
	Interaccional	0,800	0,700	0,700
	Mediacional	0,625	0,625	0,750
	Ecológica	0,667	0,667	0,667

Nota: Figueroa (2019, p. 79)

En cuanto a la validez de contenido, las V de Aiken calculadas para cada indicador tuvieron intervalos de confianza cuyo límite inferior fue superior en todos los casos a 0,70, que se definió como el mínimo aceptable. Sin embargo, aquellos que estuvieron muy cerca de este valor fueron modificados según las sugerencias de los jueces expertos que estuvieron a cargo de la evaluación. Estas modificaciones solo afectaron a dos indicadores, uno de la rúbrica sobre idoneidad epistémica, y otro, de la rúbrica sobre idoneidad cognitiva.

En la Tabla V se muestran los valores obtenidos para las V de Aiken de la rúbrica destinada a valorar la idoneidad cognitiva y en la Tabla VI se muestran los valores para las V de Aiken de la rúbrica para evaluar la idoneidad epistémica.

TABLA V

V de Aiken de la rúbrica destinada a valorar la idoneidad cognitiva

	V	L	U
V_1	0,925	0,827	0,970
V_2	0,950	0,860	0,983
V_3	0,900	0,795	0,954
V_4	0,825	0,707	0,902
V_5	0,950	0,860	0,983
V_6	0,975	0,895	0,994
V_7	0,950	0,860	0,983
V_8	0,925	0,827	0,970

Nota: Figueroa (2019, p. 84)

TABLA VI

V de Aiken de la rúbrica destinada a valorar la idoneidad epistémica

	V	L	U
V_1	1,000	0,937	1,000
V_2	0,900	0,795	0,954
V_3	0,950	0,860	0,983
V_4	1,000	0,937	1,000
V_5	0,975	0,895	0,994
V_6	0,975	0,895	0,994
V_7	0,900	0,795	0,954
V_8	0,825	0,707	0,902
V_9	0,950	0,860	0,983
V_{10}	0,950	0,860	0,983
V_{11}	0,925	0,827	0,970
V_{12}	0,975	0,895	0,994

Nota: Figueroa (2019, p. 83)

Como se observa en la Tabla V, el límite inferior de V_4 es muy cercano a 0,70. En relación con el indicador correspondiente, uno de los jueces expertos indicó que resultaba difícil considerar "acceso y logro" juntos, dado que en términos de la materia analizada, perteneciente al área del ingreso a la universidad, "acceder" podría entenderse como "ingresar a la carrera pretendida", y "logro", como apropiación de los conocimientos que se proponen en las clases. Si bien Godino (2013) utiliza estos términos en referencia a los saberes, contenidos y/o significados pretendidos, es verdad que pueden generar dudas en su lectura e interpretación en un contexto como el de Matemática y Metodología para su Estudio. Por tal motivo, se decidió eliminar este indicador de la rúbrica. Para ello, se tomó como referencia el trabajo realizado por Breda et al. (2017), en el que estos autores proponen un sistema de indicadores para valorar la idoneidad cognitiva en el que no incluyen al indicador en cuestión. Asimismo se prescinde de dicho indicador en otros trabajos (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Breda y Lima, 2016). Además, la misma rúbrica contempla dos indicadores muy similares a este: *Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes* y *Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo*, este último como parte del mismo componente que el indicador eliminado (Adaptaciones curriculares). El sentido de que los contenidos pretendidos se puedan alcanzar, y el de incluir actividades de ampliación y de refuerzo, no puede ser otro que promover el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Por su parte, en la Tabla VI, el límite inferior de V_8 es muy cercano a 0,70. Este indicador de Godino (2013) plantea: *Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.* La objeción hecha por uno de los jueces expertos planteaba que era difícil elegir un nivel debido al planteo de dos actividades diferentes dentro de los niveles que además no reflejaban correctamente lo expresado en el indicador. Mientras que el indicador habla de generar o negociar definiciones o procedimientos, los niveles planteaban si se pedían conjeturas o generalizaciones que fueran factibles dada la secuencia de actividades. No sólo no se respetaba el indicador sino que además había que analizar, por un lado, si se pedían generalizaciones en los ejercicios propuestos y, por otro, si la secuencia de actividades era apropiada. Por estos motivos, se decidió modificar la redacción de los niveles respetando lo que expresa el indicador definido por Godino (2013):

– Nivel 1: *Se les piden conjeturas y/o generalizaciones a las que pueden llegar dada la secuencia de actividades.*

– Nivel 2: *Se piden algunas generalizaciones de propiedades o conceptos, o bien, en algunos casos no les es tan sencillo arribar dada la secuencia de actividades.*
– Nivel 3: *Se piden muy pocas conjeturas o generalizaciones, o bien se les dificulta mucho arribar a ellas por la secuencia propuesta.*
– Nivel 4: *No se piden generalizaciones y/o conjeturas.*

6. Conclusiones

A lo largo de este artículo se ha descripto el proceso de construcción y validación de un conjunto de seis rúbricas diseñadas en el marco de un trabajo de tesis de maestría, con el propósito de valorar las seis facetas de la idoneidad didáctica de las clases de una materia de contenido matemático que forma parte del ingreso a una de las carreras de una universidad argentina.

Esas rúbricas, basadas en los indicadores empíricos de idoneidad propuestos por Godino en su trabajo de 2013, a los que se asociaron cuatro niveles de logro, se validaron utilizando técnicas de la psicometría.

Para evaluar su confiabilidad se utilizaron sucesivamente la técnica test-retest y el coeficiente kappa de Cohen. Este procedimiento permitió estudiar el nivel de concordancia de las evaluaciones realizadas en forma independiente por los integrantes de tres parejas pedagógicas de docentes.

La validez de las rúbricas, por su parte, se evaluó utilizando la técnica de validez por criterio de jueces, y calculando el coeficiente V de Aiken. Actuaron como jueces diez docentes de la materia, que expresaron en una escala de Likert del 1 al 5 qué tan de acuerdo estaban con los cuatro niveles propuestos para cada indicador.

La utilización de estas técnicas condujo a disponer de un conjunto de instrumentos confiables y válidos que demostraron ser pertinentes para la valoración de la idoneidad didáctica en sus seis facetas de las clases de la materia en cuestión.

Si bien la aplicación en sí de las rúbricas y los resultados de dicha aplicación exceden los propósitos del artículo, los comentarios que siguen pueden contribuir a dimensionar la utilidad y la importancia de los instrumentos construidos.

En primer lugar, la aplicación de las rúbricas permitió sistematizar a través de ellas, y de manera confiable y válida, la información sobre las clases obtenida a partir de la observación directa y del análisis de diversos documentos (material de estudio, diseños curriculares, programa de estudio).

En segundo lugar, los resultados obtenidos mediante la aplicación del conjunto de rúbricas habilitaron la posibilidad de leer los índices de aprobación y deserción de la materia desde nuevas y fecundas perspectivas: las de cada una de las idoneidades parciales y sus interacciones.

En tercer lugar, los resultados también permitieron detectar complementariedades y tensiones entre las distintas idoneidades parciales, constituyéndose en insumos valiosos para la compleja búsqueda del equilibrio entre ellas.

En síntesis, las rúbricas han demostrado ser instrumentos potentes para valorar la idoneidad didáctica de las clases de manera confiable y válida, reconocer condiciones didácticas de logro y causas de fracaso, y abordar acciones de mejora.

Sin embargo, es preciso señalar, también, algunas limitaciones inherentes a la utilización de rúbricas para la evaluación de la idoneidad didáctica. En efecto, las rúbricas pueden resultar inflexibles, en el sentido de que obligan al evaluador a inscribir sus valoraciones en alguno de los niveles previstos, y no dan lugar a registrar valoraciones por encima del nivel máximo, o por debajo del nivel mínimo, o valoraciones "entre niveles". Pero además, al descomponer cada faceta en componentes, cada componente en indicadores, y cada indicador en niveles, pueden eclipsar la oportunidad de una evaluación más holística.

Por otra parte, este estudio invita a explorar las posibilidades que ofrecen las rúbricas para valorar la idoneidad didáctica de procesos de estudio centrados en distintos objetos y procesos matemáticos, tanto como de materiales de estudio, diseños curriculares, programas y videos educativos, etc. La invitación no desconoce las especificidades propias de la construcción y validación de rúbricas que se ajusten a cada uno de esos propósitos.

En tal sentido, este trabajo admite dos lecturas posibles. Una de esas lecturas hace foco en las rúbricas en sí, rúbricas que, por haber sido diseñadas para valorar la idoneidad didáctica en una situación particular, no son generalizables a otras situaciones. La otra lectura, en cambio, pone en valor el proceso de toma de decisiones técnicas seguido para construir y validar tales rúbricas; este proceso decisional (su estructura, su secuencia), sí es generalizable, en la medida en que puede operar como modelo para la construcción y validación de rúbricas de valoración de idoneidad didáctica con fines específicos, y distintos de los de las rúbricas que aquí se presentan.

Referencias

Alcón Latorre, M. (2016). La rúbrica como instrumento de evaluación en los estudios universitarios. *Observar: Revista Electrónica De Didáctica De Las Artes*, *10*(1), 1-15. https://www.observar.eu/ojs/index.php/Observar/article/view/70/67

Alcón Latorre, M. y Menéndez Varela, J. L. (2018). El diseño de rúbricas. Algunos aspectos claves. *Observar: Revista Electrónica De Didáctica De Las Artes*, *12*, 1-19. https://www.observar.eu/ojs/index.php/Observar/article/view/91/86

Alfaro Guevara, L. A. (septiembre de 2010). *Elaboración de rúbricas para la evaluación basada en proyectos*. Segundo Congreso de Educación Formando Formadores “Hay Talento 2010”, México. http://www.cca.org.mx/profesores/portal/files/congreso2010/Taller8_materialdeapoyo.pdf

Argibay, J. (2006). Técnicas psicométricas. Cuestiones de validez y confiabilidad. *Subjetividad y procesos cognitivos*, *8*, 15-33. https://www.redalyc.org/pdf/3396/339630247002.pdf

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 526-548. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. http://dx.doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Campo-Arias, A. y Oviedo, H. C. (2008). Propiedades psicométricas de una escala: la consistencia interna. *Revista de Salud Pública*, *10*(5), 831-839. https://www.redalyc.org/pdf/422/42210515.pdf

Castillo Ceìspedes, M. J., Burgos Navarro, M. y Godino, J. D. (2022). Guía de anaìlisis de lecciones de libros de texto de Matemaìticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, *36*(1), 234-252. http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.14

Escurra M., L. M. (1988). Cuantificación de la validez de contenido por criterio de jueces. *Revista de Psicología*, *6*(1/2), 103-111. https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/psicologia/article/view/4555

Figueroa, M. V. (2019). *La idoneidad didáctica de una pedagogía alternativa para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el ingreso a los estudios universitarios: el caso de la Licenciatura en Logística de la Universidad Nacional de Tres de Febrero* (Tesis de Maestría). Escuela de posgrados, Universidad Nacional de La Matanza, Argentina. http://repositoriocyt.unlam.edu.ar/handle/123456789/1464

Gatica-Lara, F. y Uribarren-Berrueta, T. (2013). ¿Cómo elaborar una rúbrica?. *Investigación en Educación Médica*, *2*(1), 61-65. https://www.redalyc.org/pdf/3497/349733230010.pdf

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, *11*, 111-132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D. (2015). *La idoneidad didáctica como herramienta de análisis y reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas.* Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX, Villarrica, Chile. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1158657/Godino2015La.pdf

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: an enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Un enfoque onteosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En D. Calderón (Comp.), *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas* (pp. 47-78). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). El Enfoque Ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológicosemiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88. https://ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf

Inglada Rodríguez, N., Breda, A. y Sala-Sebastià, G. (2024). Pauta para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones y mejorar su docencia. *ALTERIDAD, Revista de Educación, 19*(1), 46-57. https://doi.org/10.17163/alt.v19n1.2024.04

Ledezma, C., Breda, A. y Font, V. (2024). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*, 1057–1081. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8

Martínez-Rojas, J. G. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: su construcción y su uso. *Avances en Medición, 6*, 129-138. https://www.uaem.mx/sites/default/files/facultad-de-medicina/descargas/construccion-y-uso-de-rubricas-de-evaluacion.pdf

Meneses, J. (Coord.) (2013). *Psicometría*. Editorial UOC.

Merino Soto, C. y Livia Segovia, J. (2009). Intervalos de confianza asimétricos para el índice la validez de contenido: un programa Visual Basic para la V de Aiken. *Anales de Psicología, 25*(1), 169-171. https://www.redalyc.org/pdf/167/16711594019.pdf

Muñiz, J. (1998). La medición de lo psicológico. *Psicothema, 10*(1), 1-21. http://www.psicothema.com/pdf/138.pdf

Pallauta, J. D., Batanero Bernabeu, M. D. C. y Gea Serrano, M. M. (2023). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. Enseñanza de las ciencias: *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 41*(3), 89-112. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5926

Anexos

TABLA VII

Rúbrica para valorar la idoneidad afectiva de las clases

		Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Intereses y Necesidades*	Las tareas tienen interés para los alumnos.	Los estudiantes tienen un notable interés en las actividades propuestas.	Los estudiantes tienen algo de interés en las actividades propuestas.	Los estudiantes tienen muy poco interés en las actividades propuestas.	No hay interés por parte de los estudiantes.
		Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional.	Se proponen situaciones que permiten valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y en el ámbito profesional.	Se proponen algunas situaciones que permiten visualizar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y/o en el ámbito profesional.	Se proponen muy pocas situaciones que permiten visualizar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y/o en el ámbito profesional.	No se proponen actividades que muestren la utilidad de la matemática para la vida y/o en el ámbito profesional.
	Actitudes	Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.	Se promueve la participación en las actividades, la responsabilidad y la perseverancia.	Se promueve en algunas ocasiones la participación de los estudiantes.	Se promueve de manera escasa la participación.	No se promueve la participación de los estudiantes.
		Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.	Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad (no hay favoritismos).	Se valoran casi siempre sus argumentaciones sin favoritismos.	Se valoran casi siempre sus argumentaciones pero se visualizan ciertos favoritismos.	No se valoran todos los argumentos por igual. Hay favoritismos por parte del/de la docente.
	Emociones	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a la matemática.	Se promueve de manera perseverante el autoestima, evitando el rechazo, miedo o fobia hacia la disciplina por parte de los estudiantes.	Se promueve el autoestima de los estudiantes, pero algunos manifiestan su rechazo o miedo a la disciplina.	Se promueve poco el autoestima de los estudiantes y/o muchos de ellos tienen miedo o rechazo hacia a la matemática.	No se promueve para nada el autoestima de los estudiantes y/o la gran mayoría tiene miedo a la matemática o la rechaza.
		Se resaltan las cualidades de estética y precisión de la matemática.	En las clases se resaltan cada vez que es posible las cualidades propias de la matemática: su estética y su precisión.	A veces, en las clases se resaltan las cualidades propias de la matemática.	En las clases, muy pocas veces se resaltan las cualidades propias de la matemática.	En las clases no se resaltan las cualidades propias de la matemática.

Nota: Figueroa (2019, p. 59)

TABLA VIII

Rúbrica para valorar la idoneidad epistémica de las clases

		Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Situaciones y problemas*	Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).	Se proponen situaciones y problemas en el material que están dentro de varios contextos.	Las situaciones presentadas están dentro de un contexto, pero no hay variedad del mismo.	Se proponen pocas situaciones que están en algún contexto.	Las situaciones no están contextualizadas sino que se presentan de manera abstracta para los estudiantes.
		Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.	Las actividades se articulan entre sí y están secuenciadas por su nivel de dificultad.	Las actividades están articuladas unas con otras, o bien, están secuenciadas por su nivel de dificultad.	Algunas de las actividades se articulan entre sí, o bien, algunas siguen una secuencia dada su dificultad.	Las situaciones no se articulan o no están secuenciadas.
	Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.	Las actividades que se proponen están presentadas en diferentes lenguajes (coloquial, gráfico, simbólico, entre otros). Además, se proponen y se muestran traducciones y conversiones entre los mismos.	Algunas de las actividades se presentan en distintos lenguajes, o bien, se proponen, en algunas situaciones conversiones entre los mismos.	Muy pocas actividades se presentan en distintos lenguajes, o bien, en muy pocas ocasiones se presentan conversiones entre los diferentes lenguajes.	Las actividades no se presentan en diferentes lenguajes o no se trabaja la conversión entre las diferentes formas de expresión.
		Nivel del lenguaje adecuado para los estudiantes a los que se dirige.	El lenguaje es apropiado para el nivel educativo (pre universitario).	El nivel del lenguaje no es del todo adecuado al nivel educativo.	El nivel del lenguaje es muy poco apropiado para el nivel educativo.	El lenguaje es inadecuado para el nivel educativo.
		Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.	Se propone una cantidad considerable de actividades en las que los estudiantes deben interpretar expresiones matemáticas.	Se proponen algunas actividades en las que los estudiantes deben interpretar expresiones matemáticas.	Se proponen muy pocas actividades en las que los estudiantes deben interpretar expresiones matemáticas.	No se proponen actividades en las que los estudiantes deben interpretar expresiones matemáticas.
	Def. y proc.	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.	Se presentan definiciones y/o procedimientos claros y adecuados para el nivel educativo (preuniversitario).	Se presentan definiciones y/o procedimientos que son claros y/o acordes para el nivel, salvo algunas excepciones.	Se presentan definiciones y/o procedimientos que no son demasiado claros y/o apropiados para el nivel educativo.	Se presentan definiciones y/o procedimientos que no son claros o que no resultan apropiados para el nivel educativo.

Componentes	*Definiciones y procedimientos*	Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.	El material presenta los enunciados y procedimientos necesarios para trabajar los contenidos.	El material presenta algunos de los enunciados y/o procedimientos necesarios para trabajar los contenidos.	El material presenta muy pocos de los enunciados y/o procedimientos necesarios para trabajar los contenidos.	El material no presenta los enunciados ni los procedimientos necesarios para trabajar los contenidos.
		Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.	Se proponen muchas situaciones en las que los estudiantes deben generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.	Se proponen algunas situaciones en las que los estudiantes deben generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.	Se proponen pocas situaciones en las que los estudiantes deben generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.	No se proponen situaciones en las que los estudiantes deben generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
	Argumentos	Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.	Se promueven situaciones donde los estudiantes deben argumentar y debatir.	Se promueven algunas situaciones donde los estudiantes deben argumentar.	Se promueven muy pocas situaciones donde los estudiantes deben argumentar.	No se promueve la argumentación por parte de los estudiantes.
		Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.	Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones son adecuadas para el nivel al que se dirigen.	No todas las explicaciones, comprobaciones o demostraciones son adecuadas para el nivel al que se dirigen.	Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones son muy poco adecuadas para el nivel al que se dirigen.	Las explicaciones no son adecuadas para el nivel.
	Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.	Los distintos objetos matemáticos que presenta el material de estudio (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan entre sí.	Algunos de los objetos matemáticos que presenta el material de estudio se relacionan entre sí.	Muy pocos de los objetos matemáticos que presenta el material de estudio se relacionan entre sí.	Los objetos matemáticos que presenta el material de estudio no se relacionan entre sí.
		Se identifican y articulan los diversos significados parciales de los objetos matemáticos pretendidos.	En el material es fácil identificar a las definiciones de los distintos objetos matemáticos y estas definiciones se articulan entre sí.	En el material no siempre es fácil identificar a las definiciones de los distintos objetos matemáticos, o bien, estas definiciones no siempre se articulan entre sí.	En el material es difícil identificar a las definiciones de los distintos objetos matemáticos, o bien, estas definiciones no se articulan entre sí.	En el material es muy difícil identificar a las definiciones de los distintos objetos matemáticos y estas definiciones no se articulan entre sí.

Nota: Figueroa (2019, p. 54)

TABLA IX

Rúbrica para valorar la idoneidad interaccional de las clases

			Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Interacción docente-discente*	*Trabajo Grupal*	Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	El/la docente utiliza diversos recursos argumenta-tivos para que los estudiantes comprendan y éstos responden positivamente.	El/la docente utiliza algunos recursos argumentativos para que los estudiantes comprendan y algunos de ellos no se muestran receptivos.	El/la docente utiliza muy poca variedad de recursos para que los estudiantes comprendan y ellos se muestran muy poco receptivos.	El/la docente no utiliza recursos para que los estudiantes comprendan.
			Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.).	El/la docente reconoce los conflictos de los alumnos y hace las preguntas adecuadas.	En ocasiones, el/la docente reconoce los conflictos de los alumnos y hace las preguntas adecuadas.	Muy pocas veces el/la docente reconoce los conflictos de los alumnos y hace muy pocas preguntas que resulten adecuadas para guiar el trabajo grupal.	El/la docente no reconoce los conflictos de los estudiantes.
			Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.	Los grupos se arman de manera que todos los estudiantes se incluyen en la dinámica grupal.	No todos los grupos se organizan de forma tal que todos los estudiantes sean incluidos o el/la docente participa muy poco en esa organización.	Muy pocos grupos se organizan de manera que se incluyan a todos los estudiantes o el/la docente participa muy poco en esa organización.	Los grupos no son inclusivos y/o el/la docente no participa en su composición.
		Puesta en Común	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.).	El/la docente hace una presentación adecuada de los contenidos.	El/la docente hace por momentos una buena presentación de los contenidos.	El/la docente hace una presentación regular del tema.	El/la docente no presenta adecuadamente los contenidos.
			Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.	El/la docente busca llegar a consensos du-rante la puesta en común basándose en la argumentación.	Durante las puestas en común, el/la docente a veces busca llegar a consensos con los estudiantes.	El/la docente consensua muy poco con los estudiantes.	El/la docente no llega a consensos con los estudiantes.

Componentes	*Interacción entre estudiantes*	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.	Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes a lo que responden de manera satisfactoria.	Se favorece en alguna medida el diálogo y la comunicación entre los estudiantes.	Se favorece muy poco el diálogo y la comunicación entre los estudiantes.	No se favorece el diálogo entre los estudiantes.
		Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.	Se generan debates dentro de los grupos.	Se generan algunos debates dentro de los grupos.	En los grupos de trabajo se generan muy pocos debates.	No se generan debates dentro de los grupos.
		Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.	Se favorece la inclusión grupal, los grupos son solidarios entre pares.	Se favorece de alguna manera la inclusión grupal o los estudiantes no son del todo solidarios con sus pares.	Se promueve muy poco la inclusión o los estudiantes son muy poco solidarios con su pares.	No se promueve la inclusión grupal y/o los estudiantes no son solidarios entre sí.
	Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).	Es evidente que los estudiantes asumen responsabilidad en el estudio de manera activa. Exploran ejemplos, se apoyan en argumentos, conjeturan, presentan soluciones.	La mayoría de los estudiantes asumen responsabilidad en el estudio pero algunos dependen de su docente para iniciar el trabajo.	La mayoría de los estudiantes no asumen responsabilidad en el estudio.	Los estudiantes no se responsabilizan en el estudio.
	Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.	Se observa y evalúa de manera sistemática el progreso de los estudiantes. Se les comunican sus logros para que sepan cuáles son los aspectos que deben reforzar.	Se observa el progreso de los estudiantes, pero sólo en ocasiones el docente les hace alguna devolución de sus logros.	Se observa muy poco el progreso de los estudiantes, o bien no se les realiza una devolución a los estudiantes.	No se observa el progreso de los estudiantes y/o no se les hacen devoluciones sobre sus logros.

Nota: Figueroa (2019, p. 63)

TABLA X

Rúbrica para valorar la idoneidad mediacional de las clases

		Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Recursos materiales*	Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.	Se utiliza variedad de materiales manipulativos e informáticos (calculadoras, aplicaciones para celulares y/o programas para computadoras) para introducir conceptos.	Se utilizan algunos materiales manipulativos e informáticos para introducir conceptos.	Se utilizan muy pocos materiales manipulativos e informáticos para introducir conceptos.	No se utiliza ningún tipo de recurso.
		Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	Las definiciones y propiedades son motivadas con contextualizaciones dentro de situaciones concretas y/o visualizaciones.	Algunas de las definiciones y propiedades son motivadas con contextualizaciones dentro de situaciones concretas y/o visualizaciones.	Muy pocas definiciones o propiedades son motivadas con contextualizaciones dentro de situaciones concretas y/o visualizaciones.	No se contextualizan las definiciones.
	Cantidad de estudiantes, horario y condiciones de aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.	La cantidad de estudiantes permite llevar a cabo la tarea y los grupos se distribuyen de manera ordenada y cómoda, tanto para el trabajo grupal como para la circulación dentro del aula.	La cantidad es adecuada a las posibilidades del curso, pero los grupos no se distribuyen de manera ordenada y cómoda.	La cantidad de estudiantes es algo excesiva para las posibilidades del curso y/o los grupos no se distribuyen de manera ordenada y cómoda.	La cantidad de estudiantes es excesiva y/o los grupos no se distribuyen de manera ordenada y cómoda.
		El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora).	El horario del curso es apropiado.	El horario del curso es aceptable.	El horario del curso es muy poco apropiado.	El horario del curso es inapropiado.
		El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.	El espacio físico es adecuado y los alumnos pueden armar los grupos dentro de éste de manera cómoda.	El espacio físico es bastante adecuado y los alumnos pueden armar los grupos dentro del mismo con algo de ingenio.	El espacio físico es poco adecuado y/o los alumnos no pueden armar los grupos dentro de éste.	El espacio físico no es para nada adecuado y/o los alumnos no pueden armar los grupos dentro de éste.
	Tiempo	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.	El tiempo presencial es suficiente en gran medida, o bien, los estudiantes tienen un tiempo algo limitado para trabajar fuera de la clase.	El tiempo presencial alcanza muy poco y/o los estudiantes tienen muy poco tiempo para trabajar fuera de la clase.	No alcanza el tiempo de la clase y/o los estudiantes no tienen tiempo para dedicarle a los contenidos fuera de la misma.
		Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.	Se dedica el tiempo suficiente a los contenidos más importantes de cada tema.	Se les dedica el mismo tiempo a todos los contenidos de los temas y/o éste resulta suficiente.	Se les dedica poco tiempo a todos los contenidos por igual.	No se le dedica el tiempo suficiente a ningún contenido.
		Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	Se dedica el tiempo necesario a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	Se les dedica algo de tiempo extra a los contenidos que así lo requieren.	Se les dedica muy poco tiempo extra a los contenidos que presentan mayores dificultades.	No se les dedica tiempo extra a los contenidos que así lo requieren.

Nota: Figueroa (2019, p. 67)

TABLA XI

Rúbrica para valorar la idoneidad ecológica de las clases

		Indicadores	*Nivel 1* Muy bueno (3 puntos)	*Nivel 2* Bueno (2 puntos)	*Nivel 3* Regular (1 punto)	*Nivel 4* No satisfactorio (0 puntos)
Componentes	*Adaptación del currículo*	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	Los contenidos se corresponden con lo que los estudiantes trabajaron en la escuela secundaria y con los contenidos mínimos que necesitan para ingresar a la carrera.	Los contenidos son algunos de los necesarios para ingresar a la carrera y/o algunos de ellos se trabajaron en la escuela secundaria.	Los contenidos se adecúan muy poco a las necesidades de los estudiantes para ingresar a la carrera y/o tienen muy poca correspondencia con lo que aprendieron en la escuela secundaria.	Los contenidos no se corresponden con lo que los estudiantes trabajaron en la escuela secundaria y/o no tienen relación con los contenidos mínimos que necesitan para ingresar a la carrera.
	Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	Desde la cátedra se promueve la investigación, formación, actualización y/o reflexión.	Desde la cátedra se promueve a veces la investigación, formación, actualización y/o reflexión.	Desde la cátedra se promueve muy poco la investigación, formación, actualización y/o reflexión.	Desde la cátedra no se promueve la investigación, formación, actualización ni reflexión.
		Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, computadoras, TIC, etc.) en el proyecto educativo.	El diseño de las clases incluye la utilización de nuevas tecnologías (calculadoras, aplicaciones para celular, programas para computadoras, etc.)	El diseño de las clases incluye de manera algo escasa la utilización de nuevas tecnologías.	El diseño de las clases incluye muy poco la utilización de nuevas tecnologías.	El diseño de las clases no incluye la utilización de nuevas tecnologías.
	Adaptación profesional	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.	Los contenidos que se enseñan tienen estrecha relación con el campo profesional dentro del cual se desempeñarán en el futuro los estudiantes.	Algunos de los contenidos que se enseñan tienen relación con el campo profesional dentro del cual se desempeñarán en el futuro los estudiantes.	Muy pocos contenidos tienen relación con el campo profesional dentro del cual se desempeñarán en el futuro los estudiantes.	Ningún contenido le servirá al estudiante en el futuro para desempeñarse dentro de su profesión.
	Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.	El trabajo grupal promueve en todos los estudiantes aptitudes solidarias y/o el trabajo de las clases facilita el desarrollo el pensamiento crítico.	Algunos de los estudiantes no se solidarizan con otros y/o el trabajo de las clases no promueve el pensamiento crítico en la totalidad de los estudiantes.	Muy pocos estudiantes se solidarizan con otros estudiantes durante el desarrollo del trabajo grupal y/o el trabajo de las clases propicia el desarrollo del pensamiento crítico en contados casos.	Los estudiantes no se solidarizan con sus compañeros y/o no desarrollan su pensamiento crítico.
	Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.	Los contenidos tienen estrecha relación con las materias de matemática que el estudiante tendrá que cursar durante su carrera.	Algunos contenidos tienen relación con las materias de matemática que el estudiante tendrá que cursar durante su carrera.	Muy pocos contenidos tienen relación con las materias que el estudiante tendrá que cursar durante su carrera.	Ninguno de los contenidos se relaciona con los contenidos que se dictarán en las materias que el estudiante tendrá que cursar durante su carrera.

Nota: Figueroa (2019, p. 70)

Autores

María Virginia Figueroa. Universidad Nacional de Tres de Febrero, Argentina.
vfigueroa@untref.edu.ar

https://orcid.org/0000-0002-4452-9382

Omar Malet. Universidad Nacional de Tres de Febrero, Argentina. omalet@untref.edu.ar

https://orcid.org/0000-0003-4112-9217

Ángel Alsina, Claudia Vásquez, Israel García-Alonso, Ainhoa Berciano

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA PARA FUTUROS DOCENTES ESPAÑOLES DE INFANTIL Y PRIMARIA: CARACTERÍSTICAS, ENFOQUE Y METODOLOGÍA

Statistics and probability education for pre-service spanish early childhood and primary school teachers: characteristics, approach and methodology

RESUMEN

El objetivo de este artículo es analizar cómo se desarrolla la formación en educación estadística y probabilística para futuros docentes de educación infantil y primaria en las universidades públicas españolas. Con este propósito, se ha administrado el cuestionario *Educación Estadística y Probabilística para Futuros Docentes*, previamente validado, que considera tres dimensiones y sus respectivos indicadores: Características (estándar de contenido y créditos); Enfoque (perspectiva disciplinar / didáctica y conocimientos); y Metodología (estrategias metodológicas; contextos / recursos; material complementario). A partir de las respuestas de 43 formadores, se han identificado los siguientes hallazgos: 1) de los 240 créditos, en el Grado en Maestro en infantil se dedica un crédito (10h) a una formación equilibrada en educación estadística y probabilística, mientras que en primaria se dedican 2 créditos a una formación más diversificada, lo que representa entre un 0.4% y 0.8% del total de la formación en ambos grados; 2) la perspectiva es sobre todo didáctica, atendiendo tanto al conocimiento matemático como al didáctico; 3) aunque coexisten diversas metodologías, destaca, en ambos grados, la aplicación de conocimientos didácticos (por ejemplo, el diseño de tareas). Se concluye que estos hallazgos permiten tener un panorama profundo para planificar propuestas de mejora que garanticen una formación sólida durante la formación inicial del profesorado en España.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación estadística*
- *Educación probabilística*
- *Formación del profesorado*
- *Futuro profesorado*
- *Educación infantil*
- *Educación primaria*

ABSTRACT

The aim of this article is to analyse how training in statistical and probability education for pre-service teachers of early childhood and primary education is developed in Spanish public universities. For this purpose, the previously validated *Statistical and Probabilistic Education Questionnaire for Pre-service Teachers* has been administered, which considers three dimensions and their respective indicators: Characteristics (content standard and credits); Approach (disciplinary / pedagogical perspective and knowledge); and Methodology (methodological strategies; contexts / resources; complementary material). Based on the

KEY WORDS:

- *Statistical education*
- *Probabilistic education*
- *Teacher training*
- *Pre-service teachers*
- *Early childhood education*
- *Primary education*

Alsina, Á., Vásquez, C., García-Alonso, I. y Berciano, A. (2024). Educación estadística y probabilística para futuros docentes españoles de infantil y primaria: características, enfoque y metodología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(1), 73-104. https://doi.org/10.12802/relime.24.2713. Recepción: Junio 28, 2024 / Aceptación: Enero 10, 2025.

responses of 43 trainers, the following findings have been identified: 1) of the 240 credits, in the Bachelor's Degree in Early Childhood Education, one credit (10h) is dedicated to a balanced training in statistical and probabilistic education, while in primary education 2 credits are dedicated to a more diversified training, which represents between 0.4% and 0.8% of the total training in both degrees; 2) the perspective is mainly pedagogical, addressing both mathematical and didactic knowledge; 3) although various methodologies coexist, the application of pedagogical knowledge (e.g., design of tasks) stands out in both degrees. It is concluded that these findings provide an in-depth overview to plan improvement proposals to ensure a solid training during initial teacher training in Spain.

RESUMO

O objetivo deste artigo é analisar como se desenvolve a formação em educação estatística e probabilística dos futuros professores da educação infantil e do ensino primário nas universidades públicas espanholas. Para o efeito, foi aplicado o *Questionário de Educação Estatística e Probabilística para Futuros Professores*, previamente validado, que considera três dimensões e respectivos indicadores: Características (padrão de conteúdos e créditos); Abordagem (perspetiva disciplinar / didática e conhecimentos); e Metodologia (estratégias metodológicas; contextos / recursos; material complementar). A partir das respostas de 43 formadores, foram identificadas as seguintes constatações: 1) dos 240 créditos, no Bacharelado em Educação Infantil, um crédito (10h) é dedicado a um treinamento equilibrado em educação estatística e probabilística, enquanto no Ensino Fundamental, 2 créditos são dedicados a um treinamento mais diversificado, o que representa entre 0,4% e 0,8% do treinamento total em ambos os graus; 2) a perspetiva é sobretudo didática, tratando tanto o conhecimento matemático como o didático; 3) embora coexistam diferentes metodologias, a aplicação do conhecimento didático (por exemplo, conceção de tarefas) destaca-se em ambos os graus. Conclui-se que estes resultados proporcionam uma visão aprofundada para planear propostas de melhoria que garantam uma formação sólida durante a formação inicial de professores em Espanha.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação estatística*
- *Educação probabilística*
- *Formação de professores*
- *Futuros professores*
- *Educação de infância*
- *Ensino básico*

RÉSUMÉ

L'objectif de cet article est d'analyser la manière dont la formation à l'enseignement des statistiques et des probabilités pour les futurs enseignants de la petite enfance et de l'enseignement primaire est développée dans les universités publiques espagnoles. À cette fin, le *Questionnaire sur l'enseignement de la statistique et des probabilités pour les futurs enseignants*, validé précédemment, a été administré. Il prend en compte trois dimensions et leurs indicateurs respectifs: caractéristiques (normes de contenu et crédits); approche (perspective disciplinaire / didactique et connaissances); et méthodologie (stratégies méthodologiques; contextes / ressources;

MOTS CLÉS:

- *Éducation statistique*
- *Éducation probabiliste*
- *Formation des enseignants*
- *Futurs enseignants*
- *Éducation de la petite enfance*
- *Éducation primaire*

matériel complémentaire). Les réponses de 43 formateurs ont permis d'identifier les résultats suivants : 1) sur les 240 crédits, dans le Bachelor en éducation de la petite enfance, un crédit (10h) est consacré à une formation équilibrée en éducation statistique et probabiliste, tandis que dans l'enseignement primaire, 2 crédits sont consacrés à une formation plus diversifiée, ce qui représente entre 0,4% et 0,8% de la formation totale dans les deux diplômes ; 2) la perspective est avant tout didactique, traitant à la fois des connaissances mathématiques et didactiques ; 3) bien que différentes méthodologies coexistent, l'application des connaissances didactiques (par exemple, conception des tâches) ressort dans les deux degrés. Il est conclu que ces résultats fournissent une vue d'ensemble approfondie afin de planifier des propositions d'amélioration qui garantissent une formation solide au cours de la formation initiale des enseignants en Espagne.

1. Introducción

La alfabetización estadística y probabilística es esencial en la sociedad contemporánea, pues la gran avalancha de información diaria requiere la formación y capacidad crítica necesaria para comprenderla (e.g., Jablonka, 2003, 2015; Skovmose, 1999). Esta alfabetización posibilita que se puedan tomar decisiones informadas que pueden repercutir, incluso, en la salud y bienestar de la ciudadanía (e.g., Alsina, 2021a; Bargagliotti et al., 2020; Batanero, 2019; Gal, 2002, 2005). Algunos ejemplos de ello han sido las decisiones personales y colectivas para garantizar la salud durante la pandemia COVID-19, gestionar la economía familiar e individual o enfrentar el cambio climático y la sostenibilidad, entre otros.

La escuela, en particular las y los docentes, son los encargados de desarrollar la alfabetización estadística y probabilística que necesita la ciudadanía. Sin embargo, diversos estudios realizados desde la agenda de investigación acerca de qué formación en matemática y su didáctica debe recibir el futuro profesorado durante su formación inicial para poder ejercer su profesión de manera óptima y en sintonía con las directrices curriculares contemporáneas, señalan que, por diversas circunstancias, la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad en las aulas sigue siendo escasa (Vásquez y Cabrera, 2022). Adicionalmente, se tiene evidencia de que la formación inicial docente cuenta con pocas horas dedicadas a la formación en matemáticas y su didáctica (Alsina, 2020a; Nolla et al., 2021), y todavía es más escasa cuando se analiza la formación en torno a la estadística y la probabilidad (Alsina y García-Alonso, 2023); consecuentemente, el dominio del futuro profesorado sobre el sentido estocástico es escaso (Berciano et al., 2021).

Todo ello, en su conjunto, repercute en una falta de conocimiento para llevar a cabo esta tarea de alfabetización estadística y probabilística en el aula (Franco y Alsina, 2022a).

Considerando estos antecedentes, este estudio complementa el análisis iniciático sobre la presencia de la educación estadística y probabilística en los Grados en Maestro en Educación Infantil (MEI) y Maestro en Educación Primaria (MEP) en España (Alsina y García-Alonso, 2023). Se aborda este análisis a partir de las respuestas dadas a un cuestionario por parte de las personas formadoras de docentes de estos grados sobre cómo es el desarrollo de su enseñanza. De este modo, se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se desarrolla la formación en educación estadística y probabilística en las universidades públicas españolas que imparten los Grados en MEI y MEP? Una vez identificadas las universidades públicas españolas que abordan dicha formación y unos primeros datos descriptivos (Alsina y García-Alonso, 2023), el objetivo de este nuevo estudio es mostrar una panorámica más profunda de la formación que se lleva a cabo, a partir de tres dimensiones: 1) características; 2) enfoque; y 3) metodología.

Estos datos pueden ser un insumo valioso para el diseño de políticas públicas orientadas a contribuir al diseño de oportunidades de desarrollo profesional, que permitan al profesorado enfrentar de manera competente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad desde edades tempranas.

2. Marco conceptual

Durante las últimas décadas se observa un creciente aumento de investigaciones sobre la formación del profesorado que enseña matemáticas y su desarrollo profesional (Kaiser y König, 2019), pues el conocimiento del profesorado es un elemento clave que influye directamente en la calidad de los aprendizajes del alumnado (e.g., Becker et al., 2014; Charalambous et al., 2020; Hill et al., 2005). Por tanto, se requiere de una formación inicial docente apropiada que permita a las y los futuros profesores adquirir un conocimiento profundo de la matemática y de su enseñanza, para enfrentar de manera competente el proceso de enseñanza y aprendizaje y ofrecer oportunidades de aprendizaje de calidad a sus estudiantes.

A este respecto, es importante centrar la mirada en la gestión de las asignaturas de matemática y su didáctica de los programas de formación inicial docente, pues estos orientan y determinan las competencias, habilidades y conocimientos que debe adquirir el profesorado para enseñar matemáticas (Font, 2013). Si bien es cierto que las asignaturas de los programas de formación inicial tienen la responsabilidad de proporcionar los primeros conocimientos al profesorado en formación para la enseñanza de las matemáticas, es imperativo destacar que este conocimiento debe ser desarrollado y profundizado a lo largo de toda su trayectoria profesional. En el caso concreto de la formación del profesorado en educación estadística y probabilística, si bien diversos autores han indagado al respecto (e.g., Batanero y Chernoff, 2018; Batanero et al., 2016; Estrada y Batanero, 2019; Franco y Alsina, 2022b; Vásquez y Alsina, 2023; Vidal-Szabó y Estrella, 2023), todavía hay camino por recorrer en cuanto a la necesidad de contar con un diagnóstico claro sobre la situación actual de la formación inicial del profesorado español de infantil y primaria en relación con este tema (Alsina y García-Alonso, 2023).

Pero, ¿qué aspectos deberían considerarse para que el profesorado de educación infantil y primaria lleve a cabo una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad? A este respecto, hay que tener presente tanto la organización curricular que se ha venido desarrollando en torno a la estadística y la probabilidad en las primeras etapas escolares como las orientaciones acerca de la educación estadística y probabilística para el profesorado.

2.1. *Organización curricular de la estadística y la probabilidad en educación infantil y primaria*

Durante la década de los años 90 del siglo pasado, el Consejo Nacional de Profesorado de Matemáticas (NCTM, por su acrónimo en inglés), a partir de una revisión y actualización de su plan de estudios, desarrolla los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003). En dicho documento, se propone incrementar la presencia de la estadística y la probabilidad planteando estándares de contenido de “Análisis de datos y probabilidad” a partir de los 3 años, con el propósito de que el alumnado desarrolle progresivamente conocimientos y competencias para: formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; y comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad (NCTM, 2003). Esto ha incidido en la inclusión de la estadística y la probabilidad como un bloque de contenidos desde edades tempranas en los currículos contemporáneos de educación matemática de diversos países, considerados referentes a nivel internacional, como Australia, España, Nueva Zelanda, y Singapur, entre otros (Vásquez y Cabrera, 2022). Sin embargo, pese a que la presencia de la estadística y la probabilidad comienza a adquirir cada vez mayor protagonismo, hay poca claridad respecto a su enfoque de enseñanza y, en algunos casos, se centra en la resolución de problemas, el uso de representaciones diversas, el análisis e interpretación de datos o el planteamiento de preguntas (López y Gómez, 2023).

A su vez, el estudio de García-Alonso et al. (en prensa) sobre el tratamiento otorgado a la estadística y la probabilidad en los currículos de Argentina, Brasil, Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, Guatemala, México, Nicaragua, Perú, Portugal, Uruguay y Venezuela, evidencia que la estadística está más presente que la probabilidad, y se presentan de forma atomizada y desconectados entre sí. En lo que respecta a la estadística, esta se enfoca principalmente en la recogida de datos, su tabulación y elaboración de gráficos estadísticos sin conexión con alguna pregunta de indagación y dirigidos a la interpretación y toma de decisiones basada en datos. En cuanto a la probabilidad, la mayor parte de los currículos en los que se incluye a la probabilidad, ofrecen un enfoque dirigido a la cuantificación del azar, sin potenciar otras ideas fundamentales.

Por su parte, el Comité Español de Matemáticas (CEMat, 2021), propone desarrollar progresivamente y desde edades tempranas el sentido estocástico, entendido como “la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones” (p. 35). Con tal propósito, plantea la necesidad de que el alumnado lleve a cabo investigaciones estadísticas básicas, para interpretar datos e información proveniente de diversas fuentes y contextos, tales como: experiencias cotidianas, medios de comunicación, juegos (físicos y virtuales), deportes, tecnología, etc. Simultáneamente, subraya la relevancia de promover un uso adecuado de herramientas tecnológicas para el análisis y representación visual de datos, así como la potencial ejecución de simulaciones. Además, precisa que el manejo de la tecnología debe facultar al alumnado para evaluar de manera crítica información de naturaleza estocástica, abarcando tanto fuentes mediáticas como otros recursos pertinentes, a fin de promover el debate y la comunicación de perspectivas y valoraciones con respecto a dicha información cuando resulte pertinente. En dicho contexto, se propone que el desarrollo progresivo del sentido estocástico debe girar en torno a tres grandes ideas que deben estar presentes en todas las etapas: Distribución, Inferencia y Predictibilidad e Incertidumbre (CEMat, 2021).

2.2. *Educación estadística y probabilística para maestros*

Diversos organismos y autores llevan décadas realizando aportaciones acerca de la educación estadística y probabilística que debe recibir el profesorado de las primeras etapas (e.g., Alsina, 2019, 2020b, 2021a; Bargagliotti et al., 2020; Batanero y Godino, 2004; Franklin et al., 2015). Batanero y Godino (2004) aportan diversas orientaciones en torno a esta cuestión. Respecto a la educación estadística, indican que es necesario:

– Involucrar al alumnado en el desarrollo de investigaciones estadísticas sencillas en los que tengan que recoger sus propios datos a partir de diversas técnicas como la observación, encuestas sencillas, etc.
– Concienciar de que cada dato forma parte de un todo (distribución de los datos); que hay preguntas que no se pueden contestar con un único dato, sino con una distribución de datos; y de las tendencias y variabilidad en los datos y como éstas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
– Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia.
– Animar a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando los aspectos matemáticos y estéticos de manera que los datos se organicen y representen correctamente.

Y respecto a la educación probabilística para maestros, proponen:

– Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
– Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
– Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que el alumnado tenga posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
– Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada estudiante o por parejas.
– Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras, es decir, empezar a observar la aparición de patrones en los resultados de una variable aleatoria según aumenta la muestra.

Desde el proyecto GAISE (*Guidelines for Assesment and Istruction in Statistics Education*), se han ofrecido también interesantes aportaciones para el ámbito concreto de la instrucción y evaluación en educación estadística desde los niveles escolares iniciales (Bargagliotti et al., 2020; Franklin et al., 2007):

– Énfasis en la alfabetización estadística y el desarrollo del pensamiento estadístico.
– Usar datos reales.

- Enfocarse en el entendimiento conceptual en lugar del mero conocimiento de procedimientos.
- Fomentar el aprendizaje activo en el aula.
- Utilizar la tecnología para el desarrollo del entendimiento conceptual y el análisis de datos.
- Emplear la evaluación como mecanismo de mejora del aprendizaje estudiantil.

La Asociación Americana de Estadística describe también diversas recomendaciones en torno a la educación estadística para maestros (Franklin et al., 2015):

- Adquisición de una comprensión conceptual sólida de la estadística que enseñarán. Destaca la importancia de comprender el proceso de investigación estadística y los métodos específicos para ayudar al alumnado a entenderlo de manera coherente. Además, es necesario enfatizar en la importancia de comunicar la utilidad del pensamiento estadístico. Por tanto, los programas de formación del profesorado deben promover una comprensión profunda de la estadística desde una perspectiva didáctica.
- Los programas de formación del profesorado deberían incluir la participación activa del futuro profesorado en la resolución de problemas estadísticos, lo que implica formular preguntas estadísticas, recolectar datos, analizarlos e interpretar los resultados. Es fundamental que el futuro profesorado desarrolle habilidades para razonar, explicar y dar sentido a los estudios estadísticos, modelando así un proceso integral de comprensión y aplicación de la estadística.
- Dado que gran parte del profesorado en ejercicio carece de formación estadística en sus programas de preparación inicial, es esencial establecer oportunidades sólidas de desarrollo profesional para mejorar su comprensión en esta área. Estos programas deben seguir los mismos principios que se aplican a la formación inicial, incluyendo la participación activa del profesorado en la resolución de problemas estadísticos.
- Todos los cursos y experiencias de desarrollo profesional para profesorado de estadística deben permitirle desarrollar los hábitos de pensamiento y resolución de problemas propios del pensamiento estadístico, tales como el razonamiento, la explicación, la modelización, la identificación de estructuras y la generalización. El estilo instructivo de estos cursos debe ser interactivo, receptivo al pensamiento del alumnado y centrado en problemas. El profesorado debe desarrollar no solo conocimientos del contenido estadístico, sino también la capacidad de trabajar de manera característica la disciplina.

– La educación estadística para profesorado debe ser una prioridad en las instituciones formadoras de profesores, trabajando en colaboración interdisciplinaria. Los departamentos deben promover la participación del profesorado en la preparación y desarrollo profesional, asignando recursos adecuados para el diseño y personal de cursos.
– Por último, la formación en estadística del futuro profesorado debe focalizarse en asegurar que este cuente con los conocimientos y habilidades suficientes para enseñar estadística desde edades tempranas; fomentar que todas las personas que enseñan estadística se esfuercen por mejorar continuamente su enseñanza; y unirse a profesorado de diferentes niveles para aprender unas de otras.

Considerando estos antecedentes, Alsina (2019, 2020b) propone que es necesario que el profesorado diversifique los contextos y recursos de enseñanza para enseñar estadística y probabilidad. Asumiendo que el recurso por excelencia son los contextos reales y cercanos al alumnado, en el marco del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), este autor asocia los diversos recursos a estrategias didácticas y demandas cognitivas diferentes (Figura 1).

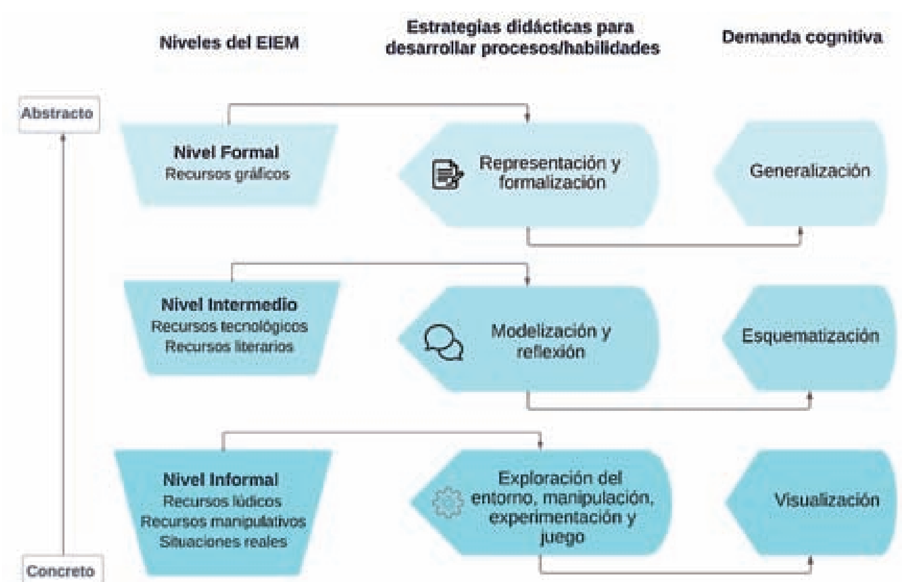


Figura 1. Niveles del EIEM, estrategias didácticas para desarrollar procesos / habilidades y demanda cognitiva (Alsina, 2019, 2020b). Fuente: Elaboración propia

Más adelante, además, este autor presenta cinco recomendaciones para mejorar las prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil y primaria, con base en los fundamentos teórico-metodológicos del EIEM (Alsina, 2021b): 1) planificar y gestionar la enseñanza de la estadística y la probabilidad a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; 2) promover prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad que consideren tanto al indagación como la instrucción; 3) considerar contextos informales, intermedios y formales en todas las secuencias de enseñanza de la estadística y la probabilidad, con distinto protagonismo según el nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto, en todos los itinerarios de enseñanza de la estadística y la probabilidad; y 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de la estadística y la probabilidad.

Con base en esta fundamentación, en este estudio se exploran los principales rasgos distintivos de la enseñanza de la educación estadística y probabilística en las universidades públicas españolas que imparten el Grado en MEI y MEP, para tener un panorama amplio sobre el enfoque de la enseñanza, los conocimientos que se imparten, las estrategias de enseñanza, etc.

3. Metodología

De acuerdo con el objetivo de este estudio, se ha adoptado un enfoque mixto de naturaleza descriptiva (McMillan y Schumacher, 2001) para analizar en profundidad la formación en educación estadística y probabilística que recibe el futuro profesorado de educación infantil y primaria en las universidades públicas españolas.

3.1. *Contexto y participantes*

En España, la gran mayoría de universidades públicas que ofrecen el Grado en MEI (240 créditos, durante cuatro años) incluyen una única asignatura obligatoria relacionada con la Matemática y su Didáctica (6 créditos, durante un semestre), lo que representa aproximadamente un 2.5% de la formación total (Alsina, 2020a). En el Grado en MEP, la gran mayoría dedican 18 créditos a la formación en Matemática y su Didáctica, lo que supone el 7.5% del total de la formación (Nolla et al., 2021).

En lo que se refiere específicamente a la formación en educación estadística y probabilística, el estudio de Alsina y García-Alonso (2023) ha evidenciado que, de las 39 universidades públicas españolas que ofrecen el Grado en Maestro, 11 imparten esta formación en el Grado en MEI (28.2%) y 30 en el Grado en MEP (76.9%). En la inmensa mayoría de universidades, esta formación se imparte dentro de asignaturas que tratan también otros estándares de contenido.

Considerando este contexto, la muestra es de carácter no probabilístico y está compuesta por docentes de los Grados en MEI y MEP que imparten formación en educación estadística y probabilística. Para la obtención de datos de las y los informantes se ha contactado, vía correo electrónico, con 153 personas formadoras, de las cuales han participado 43. En la Tabla I se reportan las principales características de la muestra.

TABLA I
Características de la muestra

		Grado de impartición	
		Infantil (n=8)	*Primaria* (n=35)
Identidad de Género	Hombre	2	14
	Mujer	6	21
Categoría Académica	CU	1	3
	TU	1	8
	LPTE	2	6
	LNPTE	4	18
Años de experiencia	[0,5)	2	17
	[5,10)	4	12
	>10	2	6
Tipo de Asignatura (Perspectiva didáctica o disciplinar)	Didáctica	4	0
	Disciplinar	0	6
	Ambos	4	29

CU = Catedrático de Universidad

TU = Titular de Universidad

LPTE = Laboral permanente (contratado doctor)

LNPTE = Laboral no permanente (Asociado, Ayudante Doctor, visitante, sustituto, postdoc, …)

3.2. *Recogida de datos*

Los datos se han obtenido a través de la aplicación en línea del Cuestionario *Educación Estadística y Probabilística para Futuros Docentes* (Anexo I) como instrumento de recogida de datos. Este cuestionario fue diseñado y transcrito a un formulario de *Google Forms* que consideró distintos formatos de respuestas (opciones de selección única, selección múltiple y respuesta abierta), considerando las siguientes tres dimensiones:

a) *Características:* se recogen datos sobre los estándares de contenido abordados y la cantidad de créditos, es decir, las horas dedicadas al estudio de la educación estadística y probabilística.
b) *Enfoque:* se recogen datos sobre la perspectiva (disciplinar o didáctica) de la formación y el conocimiento que se imparte.
c) *Metodología:* se recogen datos sobre los contextos y recursos para abordar la enseñanza, las estrategias empleadas y el material complementario que se ofrece al futuro profesorado.

Cabe señalar que este cuestionario fue elaborado por el equipo de investigación con base en los fundamentos descritos en el marco conceptual: para los ítems de las dimensiones *Características* y *Enfoque* se consideraron tanto la organización curricular como a la educación estadística y probabilística para maestros (e.g., Alsina, 2019, 2020b; Bargagliotti et al., 2020; Batanero y Godino, 2004; CEMat, 2021; Franklin et al., 2007, 2015; García-Alonso et al., en prensa; López y Gómez, 2023; NCTM, 2003; Vásquez y Cabrera, 2022); mientras que para la dimensión *Metodología* se tuvieron en cuenta, además, los recursos considerados en los diversos niveles del EIEM y las recomendaciones descritas por este enfoque para mejorar las prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad (Alsina, 2019, 2020b, 2021b). Posteriormente, dicho cuestionario fue revisado por cinco personas expertas en educación estadística y probabilística de España y Chile. Así, con base en las evaluaciones y recomendaciones hechas por las y los expertos, se revisó y se hicieron los ajustes pertinentes. Posteriormente, se puso a prueba la nueva versión del cuestionario (utilizando un formador de profesorado que no formaba parte de la muestra del estudio). Esto se hizo con el fin de obtener información empírica sobre la aplicación con respecto a su aplicabilidad, uso y duración aproximada.

Dicho proceso ha dado lugar a la versión final, el cual consta de un total de 18 ítems, organizados en las tres dimensiones descritas anteriormente (Tabla II). En lo que respecta a los cuatro primeros ítems, estos se refieren a datos generales de las y los participantes.

TABLA II
Dimensiones y categorías del Cuestionario *Educación Estadística y Probabilística para Futuros Docentes*

Dimensiones	*Categorías*	*Ítems*
Características	Estándar de contenido: Estadística (E), Probabilidad (P), Estadística y Probabilidad (EyP) o ninguno.	7, 8
	Créditos: horas dedicadas a la formación, en términos de créditos ECTS.	5, 6, 9
Enfoque	Perspectiva: exclusivamente disciplinar; exclusivamente didáctico; principalmente disciplinar, pero también didáctico; principalmente didáctico, pero también disciplinar; didáctico - disciplinar, combinando ambos por igual.	12, 13, 14, 15
	Conocimientos: Saberes clave que se desarrollan.	16
Metodología	Estrategias metodológicas: instrucción, aprendizaje por indagación, etc.	17
	Contextos / Recursos: Situaciones reales, materiales, juegos, tecnología, etc.	10, 18
	Material complementario: otro material de apoyo, aparte del bibliográfico.	11

3.3. *Análisis de datos*

A partir de la revisión de cada cuestionario por grado (MEI o MEP), se codificaron las respuestas según la dimensión sobre la que informan. En el caso de las preguntas de opciones de selección única y selección múltiple, se realizó un análisis estadístico de tipo descriptivo de las respuestas. Mientras que, para el análisis de las preguntas de respuesta abierta, se llevó a cabo un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), que consideró las siguientes etapas: lectura inicial de los datos; generación de códigos iniciales; búsqueda preliminar de temas; revisión de los temas encontrados; definición de etiquetas y denominación de los temas definidos; y producción de los resultados del análisis. Es importante señalar que las categorías mencionadas fueron utilizadas en el análisis cualitativo de dos maneras diferentes: para definir la categorización deductiva de las respuestas y como conceptos clave al analizar dichas respuestas. La saturación de los datos ha permitido establecer inferencias y conclusiones para captar el sentido general de las respuestas y establecer algunas reflexiones.

Finalmente, se han seleccionado algunas respuestas específicas para cada una de las categorías que, a criterio de los autores, han permitido ejemplificar mejor las categorías analizadas.

4. Resultados

Se muestran, a continuación, los resultados obtenidos tomando como ejes organizativos cada Grado en Maestro/a.

4.1. *Grado en Maestro en Educación Infantil*

A continuación, se presentan los datos de las ocho personas informantes del Grado en MEI atendiendo a las tres dimensiones analizadas (Tabla II): características, enfoque y metodología.

4.1.1. *Características de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEI*

Estándar de contenido

Los resultados indican que la mayoría de las y los informantes (*n*=7) han desarrollado contenidos de estadística y probabilidad (87.5%) y sólo uno de los docentes ha trabajado la estadística y no la probabilidad (12.5%).

Créditos

Se dedica, a lo sumo, 1 crédito (10 horas) del total de los 6 créditos (60 horas) que tiene la asignatura; frecuentemente, con un reparto equilibrado entre ambos contenidos (Tabla III). Teniendo en cuenta que, como se ha señalado, hay una única asignatura de Matemáticas y su Didáctica, sólo entre un 0.4% y un 0.8% se dedica a la educación estadística y probabilística en todo el grado.

4.1.2. *Enfoque de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEI*

Perspectiva disciplinar / didáctica

La Tabla IV muestra la perspectiva que otorgan las personas formadoras a la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEI.

Como puede apreciarse, se prioriza un enfoque principalmente didáctico, con incursiones en el conocimiento disciplinar.

TABLA III
Créditos dedicados a la educación estadística y probabilística en el Grado en MEI

		Créditos Probabilidad			
		0	(0,1]	(1,2]	Total
Créditos Estadística	(0,1]	1	6		7
	(1,2]			1	1
	Total	1	6	1	8

TABLA IV
Perspectiva de la formación en educación estadística y probabilística (MEI)

Perspectiva	*f*[1]	*Citas*
Principalmente didáctica, pero también disciplinar	5	F-41: *los docentes en formación aprenden qué, cómo y cuándo enseñar estadística y probabilidad en infantil. Esto requiere aportar una propuesta de secuenciación de contenidos por edades y luego una amplia variedad de recursos para trabajarlos: situaciones reales, materiales manipulativos, juegos, recursos literarios, tecnológicos y gráficos. […] Para situar el qué trabajar, es necesario ir a la disciplina, y aquí se introducen conocimientos clave.*
Exclusivamente didáctica	3	F-38: *se les explica cómo abordar el tema en el aula de Infantil, qué conceptos deben trabajar, qué materiales pueden utilizar, cómo trabajar y qué dificultades se pueden encontrar.*

[1] Número de respuestas

En el primer ejemplo de la Tabla IV, el informante justifica su respuesta aludiendo a aspectos didácticos y de la disciplina como conocimiento a enseñar por parte del futuro profesorado y que, por tanto, debe ser conocido por este. En el segundo ejemplo, no se alude a la disciplina.

Conocimientos

Se han analizado separadamente las respuestas dadas por las y los informantes con respecto al conocimiento estadístico y probabilístico, para observar sus diferencias y similitudes.

En cuanto a la estadística, teniendo en cuenta que se podía mencionar más de un conocimiento, se han indicado sobre todo las tablas de recuento y los gráficos estadísticos, seguido del ciclo de investigación, las tablas de frecuencias y, finalmente, los parámetros de centralización y las dificultades.

Por su parte, los conocimientos de probabilidad se centran en la enseñanza del enfoque intuitivo de probabilidad, la diferenciación entre sucesos aleatorios y deterministas y el trabajo del lenguaje probabilístico, principalmente.

4.1.3. *Metodología de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEI*

Estrategias metodológicas

Los y las informantes señalan que la estrategia utilizada incluye, mayoritariamente, la aplicación de conocimientos didácticos mediante el diseño, implementación y análisis de tareas en el aula (Tabla V).

TABLA V

Estrategias metodológicas para la formación en educación estadística y probabilística (MEI)

Estrategias metodológicas	*E*[1]	*P*[2]	*Citas*
Aplicación de conocimientos didácticos	4	7	F-39: *desenvolupar projectes senzills on els alumnes (infantil) hagin de recollir dades a partir de l'observació de l'entorn, de realitzar enquestes, o a partir de mesures (desarrollar proyectos sencillos donde los alumnos (infantil) tengan que recoger datos a partir de la observación del entorno, de realizar encuestas, o a partir de medidas).* F-42: *Crean y revisan materiales que ya se están usando en las aulas. Colaboro con una escuela que visito con el alumnado varias veces durante el curso para que prueben con infantes las actividades y materiales que han preparado.*
Clase magistral, metodología tradicional	2	1	F-43: *Clases magistrales, lecturas de artículos científicos y trabajo de laboratorio con materiales*
Aprendizaje basado en proyectos	2	0	F-42: *Diseño de tareas, que luego se aplican a una escuela en el marco de una feria matemática (permite tener un feedback real de la eficacia del diseño de la tarea)*

[1] Estadística; [2] Probabilidad

Contextos / Recursos

Para la enseñanza, tanto de la estadística como de la probabilidad, la mayoría de las personas formadoras usan datos que provienen de situaciones reales y cercanas (el tiempo, color de ojos, gustos, …), junto con materiales manipulativos para hacer recuentos de datos o experimentos estocásticos (Tabla VI).

TABLA VI

Contextos y recursos para la formación en educación estadística y probabilística (MEI)

Contextos y recursos	*f* [1]	*Citas*
Situaciones reales	7	F-39: *del seu dia a dia, dades del temps admosfèric d'una escola... [De su día a día, datos del tiempo atmosférico de una escuela, …]* F-41: *Contextos reales a partir de situaciones previamente implementadas en aula por diversos maestros.* F-42: *En infantil contextos reales y cercanos a los infantes. El tiempo, el color del pelo, de ojos, gustos, preferencias a la hora de desarrollar un proyecto, ...*
Material manipulativo (estructurado o no estructurado, de azar, …)	8	F-41: *Se propone el uso y selección de materiales manipulativos inespecíficos para realizar recuentos concretos de datos y representaciones también concretas, a partir de gráficos de barras simples.* F-42: *Material manipulativo para el registro de datos (el tiempo, estados emocionales, etc.) Para probabilidad dados adaptados y juegos de búsqueda de elementos reales en algún lugar cercano a los infantes.*
Selección y análisis de materiales	2	F-43: *Sí, se analiza el uso y función de los materiales en el laboratorio.*
Creación de materiales	2	F-38: *Se les propone a los alumnos que creen ellos las actividades para trabajar el tema, pero con la condición de que las actividades incluyan material manipulativo y con con contexto que ellos eligen.*
Software	1	F-40: *el uso de software para combinatoria.*
No utiliza material	1	F-37: *No.*

[1] Hay más de una respuesta por informante, en algunos casos

Material complementario

Como se muestra en la Tabla VII, todas las personas formadoras del Grado en MEI ofrecen materiales para ampliar la formación en educación estadística y probabilística: principalmente, páginas web (Nrich, Tocamates, …) o lectura de artículos científicos.

TABLA VII
Material complementario para la formación en educación estadística y probabilística (MEI)

Material complementario	f^1	*Ejemplos de respuestas*
Webs, blogs	11	F-39: *Sí, per exemple aquesta seqüència (Sí, por ejemplo esta secuencia): Planning Conversation for Shoe Graph Lesson (Early Math Collaborative at Erikson); Creating Context for the Shoe Graph Preschool Lesson (Early Math Collaborative at Erikson); Graphing Shoes on a Grid with Pre-k ELLs (Early Math Collaborative at Erikson); Reflecting Conversation for Shoe Graph Lesson (Early Math Collaborative at Erikson).*
Artículos científicos	2	F-41: *Suelo recomendar algún artículo complementario.* F-42: *Arasac, artículos científicos, …*

[1] Hay más de una respuesta por informante, en algunos casos

4.2. *Grado en Maestro en Educación Primaria*

4.2.1. *Características de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEP*

Estándar de contenido

De las 35 personas informantes, tres han indicado que no han abordado ni la estadística ni la probabilidad debido a que existe una fragmentación de la asignatura entre docentes del área y, en este caso, el informante no estaba encargado de esta parte del temario, o bien argumentaba falta de tiempo para abordarlo. El resto de las personas formadoras, 32 en total, sí lo han impartido: 24 han desarrollado ambos estándares de contenido (68.6%), seis sólo estadística (17.1%) y dos sólo probabilidad (5.7%).

Créditos

En total, se han obtenido datos de 27 asignaturas: 21 de ellas son de 6 créditos y el resto son de más de 6 créditos. En la mayoría (*n*=15), se dedican a lo sumo 2 créditos (20 horas) de forma equilibrada entre ambos contenidos (Tabla VIII), lo que representa un 0.8% del total del Grado; o bien se dedica mayor número de créditos a la enseñanza de la estadística que a la probabilidad (*n*=9). En tres casos, se dedica más tiempo a la probabilidad que a la estadística.

TABLA VIII
Créditos dedicados a la educación estadística y probabilística
en el Grado en MEP

		Créditos probabilidad					
		0	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(4,5]	Total
Créditos estadística	0	3	1	1			5
	(0,1]	1	9	1			11
	(1,2]	2	1	6			9
	(2,3]	1		3	2		6
	(3,4]			1	2		3
	(4,5]					1	1
	Total	7	11	12	4	1	35

A partir de los datos de la Tabla VIII, se observa que no existe una relación proporcional entre la dedicación a la educación estadística y probabilística y los créditos asignados a la materia.

4.2.2. *Enfoque de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEP*

Perspectiva disciplinar / didáctica

En la Tabla IX se observa que predomina un enfoque didáctico (13 informantes de 27); mientras que el informante que señala que tiene un enfoque disciplinar también incorpora aspectos didácticos en su formación.

TABLA IX
Perspectiva de la formación en educación estadística y probabilística (MEP)

Perspectiva	f^1	*Citas*
Exclusivamente disciplinar	3	F-34: *Se trabaja el conocimiento de los principales estadísticos descriptivos, su cálculo y representación, aunque añade también la didáctica de los mismos.*
Exclusivamente disciplinar, pero también didáctica	3	F-14: *Procuro relacionar el contenido matemático que se trabaja en esta asignatura con su enseñanza y aprendizaje, que los estudiantes verán en cursos siguientes.*
Principalmente didáctico, pero también disciplinar	13	F-16: *Aunque trabajamos problemas y tareas con mis alumnos como resolutores (disciplinar) también realizamos análisis didácticos de las tareas (didáctico) Se plantean trayectorias de aprendizaje de contenidos de probabilidad y estadística y dificultades de su aprendizaje (didáctica) Abordamos contenidos de probabilidad y estadística (disciplinar). También se incide en las diferentes estrategias de resolución de procedimientos (estadística) y las diferencias de representación, así como podemos ir desde una representación a otra (estadística).* F-20: *Nos basamos en las fases del ciclo de investigación estadística, en las dificultades de la enseñanza de los distintos parámetros, así como de las heurísticas en probabilidad. Buscando siempre una naturaleza práctica de las actividades que el alumnado desarrolla con una visión de la práctica docente, no del usuario.*
Didáctico-disciplinar, combinando ambos por igual	13	F-08: *Nuestra asignatura es Didáctica de... con lo que es imprescindible añadir el enfoque didáctico. Por otro lado, incidimos en el triple carácter de la matemática, instrumental, funcional y formativo. Por eso tampoco abandonamos lo disciplinar.* F-11: *Reflexionamos sobre situaciones didácticas, expuestas en artículos de revistas de didáctica. Se pide a los alumnos proponer/construir situaciones didácticas. Intento que los alumnos se cuestionen sus conocimientos como aprendices, lo cual creo que es beneficioso para ser futuros docentes. También los alumnos realizan ellos mismos, como si fueran alumnos de primaria, las propuestas, intentando ponerse en la piel de un alumno de E.P.*

[1] Número de respuestas

Conocimientos

Salvo un informante que no contesta, más de 20 informantes (>57.1%) indican que abordan los parámetros de centralización, los gráficos estadísticos, las tablas de frecuencia, los parámetros de dispersión y las dificultades en el aprendizaje de la estadística (Tabla X). El ciclo de investigación estadística lo señalan 15 personas formadoras.

TABLA X
Contenidos de estadística del Grado en MEP

Contenidos de estadística	f^1
Enseñanza de los parámetros de centralización	22
Enseñanza de los gráficos estadísticos	22
Enseñanza de las tablas de frecuencia	22
Enseñanza de los parámetros de dispersión	20
Dificultades en el aprendizaje de la estadística	20
Ciclo de investigación estadística: Problema - Plan - Datos - Análisis - Conclusiones	15
Enseñanza de las tablas de recuento	13
Análisis / Revisión de libros de texto	12
Otro: (indicar)	6
No Contesta	1

[1] Hay más de una respuesta por informante, en algunos casos

En el caso de la formación en probabilidad (Tabla XI), también más de 20 informantes trabajan la enseñanza de las diferencias entre sucesos aleatorios y sucesos deterministas, así como la enseñanza del lenguaje probabilístico, de los tres enfoques de la probabilidad (intuitivo, frecuencial y clásico) y de la aleatoriedad.

4.2.3. *Metodología de la formación en educación estadística y probabilística en el Grado en MEP*

Estrategias metodológicas

Para la formación estadística, la metodología usada se basa en la aplicación de conocimientos didácticos y el aprendizaje basado en proyectos. Y en menor medida, la clase magistral. En cuanto a la probabilidad, se lleva a cabo una metodología de aplicación del conocimiento a través del estudio de juegos y experimentos aleatorios (Tabla XII).

TABLA XI
Contenidos de probabilidad del Grado en MEP

Contenidos de probabilidad	*f* [1]
Enseñanza de las diferencias entre sucesos aleatorios y sucesos deterministas	22
Enseñanza del lenguaje probabilístico	21
Enseñanza del enfoque frecuencial de la probabilidad	21
Enseñanza de la aleatoriedad	19
Enseñanza de la asignación cuantitativas de probabilidades	17
Enseñanza del enfoque intuitivo de la probabilidad	17
Enseñanza del enfoque clásico de la probabilidad	17
Enseñanza de la probabilidad	16
Enseñanza de la asignación cualitativa de probabilidades	15
Enseñanza de la variabilidad	10
Enseñanza del muestreo	9
Análisis/Revisión de libros de texto	7
Otro: (indicar)	6

[1] Hay más de una respuesta por informante, en algunos casos

TABLA XII
Estrategias metodológicas para la formación en educación estadística y probabilística (MEP)

Estrategias metodológicas	*E* [1]	*P* [2]	*Citas*
Aplicación de conocimientos didácticos	11	31	F-05: *Empiezo con una encuesta realizada en aula acerca de determinadas características o aspectos de interés entre el grupo de clase (se debate con los alumnos/as para la creación de variables de interés; el profesor finalmente selecciona las adecuadas si hay muchas) y luego se genera una libro excel de los datos recogidos y se le da el nombre de encuesta_ año del curso y ésta se utiliza a lo largo de todo el*

			cuatrimestre conforme vamos avanzando con el temario y la que se utiliza en las sesiones de práctica -se trabaja toda la parte de estadística descriptiva; en prácticas con Excel y en clases a mano- y finalizando la parte de estadística descriptiva como proyecto (a partir de la misma hoja de datos) respondiendo a la pregunta ¿cómo es el estudiante de cuarto curso de estadística y probabilidad en la [universidad]?... entre otras que se podrán. F-14: *estudio de juegos de azar y experimentos aleatorios variados, clasifica [ción de] tipos de sucesos y cálcul[o de] sus probabilidades.* F-16: *a partir de experimentos y el estudio de juegos de azar en base a resolución de problemas e insistiendo con ello. Talleres de juegos y cálculo de probabilidad en grupos; análisis de tareas y diseño de propuestas en grupos y resolución de tareas individuales y análisis de vídeos de aula.* F-21: *los estudiantes pasan por rincones con distintos experimentos estocásticos.*
Aprendizaje basado en proyectos	11	0	F-30: *través de proyectos que van siguiendo el ciclo de investigación, parten de una pregunta de investigación, para desarrollar su ciclo de investigación y elaborar una noticia breve relacionada con su pregunta de investigación.*
Clase magistral, metodología tradicional	9	0	F-02: *metodología tradicional […], resolución de problema y, prácticas con materiales manipulativos.* F-15: *se basan en ejemplos de tareas de primaria, las cuales en algunos casos están resueltas por alumnos ficticios [que] se analizan y se va trabajando conjuntamente el contenido y la didáctica.*
No contesta	1	1	
No lo abordan	3	3	

[1] Estadística; [2] Probabilidad

Contextos / Recursos

Los informantes han señalado que usan una diversidad de recursos en las asignaturas que imparten para llevar a cabo la formación: contextos reales, materiales manipulativos para el diseño de experimentos estocásticos, recursos tecnológicos como software interactivo y vídeos (Tabla XIII). Aunque, cabe destacar que cuatro personas formadoras no utilizan ningún tipo de contexto o recurso.

TABLA XIII
Contextos y recursos para la formación en educación estadística y probabilística (MEP)

Contextos/recursos	*f*[1]	*Citas*
Situaciones reales		F-05: *El aula y bases de datos.* F-23: *Se trabaja con datos reales obtenidos por los estudiantes para la realización de sus proyectos principalmente enfocados a ODS.*
Material manipulativo	13	F-21: *En cuanto a la probabilidad, se basa en actividades de exploración en la que deben hacer uso de materiales como dados para analizar fenómenos aleatorios.*
Software: Excel, Geogebra, Applets, R, webs,…	18	F-15: *En la parte de probabilidad utilizamos algún software. En algunas clases con los alumnos jugamos con algún software interactivo, por ejemplo "la carrera de caballos" donde luego se hace un análisis del contenido matemático, como también los posibles errores y dificultades que pueden tener los alumnos y la manera de cómo llevarlo al aula* (). F-20: *Se propone trabajo con excel para la construcción de gráficos y tablas. Para la probabilidad se trabaja con distintos materiales manipulativos como dados, fichas o bolas de colores, cartas, ruletas, entre otros juegos de azar.*
Vídeos y cuadernillos	4	F16: *Utilizo algunos vídeos de probabilidad y estadística.* F-22: *Todas las sesiones incluyen material complementario de diversos tipos, dependiendo de la sesión. Usualmente, 4-5 documentos o recursos.*
No especificado	5	
No utiliza material	4	F-13: *No*

[1] Hay más de una respuesta por informante, en algunos casos

Material complementario

Sobre este indicador (Tabla XIV), destaca que 11 informantes (31.4%) no recomiendan ningún material complementario, mientras que quienes señalan algún material complementario eligen principalmente recursos online, como la web del INE o de los institutos autonómicos de estadística, así como otros materiales en formato escrito (prensa, artículos, libros de texto, …).

TABLA XIV
Material complementario para la formación
en educación estadística y probabilística (MEP)

Material complementario	*f.* [1]
Webs, INE o equivalentes, Redes sociales	15
Prensa, artículos, libros de texto, …	6
Geogebra	2
Vídeos de YouTube	2
No utiliza material complementario	11

[1] Hay más de una respuesta por formador, en algunos casos

5. Discusión y conclusiones

En este estudio se ha analizado cómo se desarrolla la formación en educación estadística y probabilística para futuro profesorado en los Grados en MEI y MEP en las universidades públicas españolas, con el propósito de tener un panorama amplio sobre los rasgos distintos de la formación que se imparte y, con base en ello, ofrecer propuestas de mejora que garanticen una formación sólida durante la formación inicial del profesorado en España.

Un primer hallazgo sobre las características de la formación es que, en el Grado en MEI, los formadores dedican entre un 0.4% y un 0.8% del total de créditos del Grado a la formación en educación estadística y probabilística dentro de la asignatura de Matemática y su Didáctica (1 crédito), con un reparto equilibrado ente ambos estándares de contenido; mientras que en el Grado en MEP los datos se diversifican, pues si bien predomina la formación en educación estadística y probabilística (68%), en algunos casos sólo se considera la estadística (17%) o únicamente la probabilidad (5.7%). Y la dedicación a estos conocimientos es, mayoritariamente, 1/6 de los créditos de la asignatura.

Un segundo hallazgo respecto al enfoque de la formación que se imparte es que, en el Grado en MEI, la mayoría de las asignaturas abordan la formación en educación estadística y probabilística desde una perspectiva didáctica (87.5%) aunque, en menor medida, también consideran conocimientos disciplinares como, por ejemplo, el estudio de las tablas de recuento y de frecuencia o el enfoque intuitivo de la probabilidad, en sintonía con las orientaciones de Batanero y Godino (2004). Llama la atención la mención explícita al uso del ciclo de investigación estadístico, en la línea de las recomendaciones de Franklin et al. (2015). De forma similar sucede en el Grado en MEP, donde se observa que en la mayoría de las asignaturas (86.3%) se señala que el enfoque de enseñanza es también principalmente didáctico, directamente dirigido a promover el conocimiento para enseñar, pero a la vez, desarrollando conocimientos disciplinares orientados a la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria. Es destacable que, en el ámbito de la estadística, menos de la mitad de los formadores (46.8%) incluyen el ciclo de investigación estadística, a pesar de señalar las investigaciones que se trata de la estrategia más adecuada para la enseñanza de la estadística (Bargagliotti et al., 2020) y ser una de las recomendaciones en la formación del profesorado dadas por Franklin et al. (2015).

Finalmente, respecto al análisis de la información relativa a la metodología, cabe diferenciar dos aspectos. Por un lado, respecto a las estrategias metodológicas para promover la educación estadística y probabilística, las personas formadoras de docentes han destacado principalmente dos estrategias: la aplicación de conocimientos mediante el diseño, implementación y análisis de tareas y, por otro lado, la enseñanza magistral. Pero las respuestas no han permitido, en general, profundizar en qué criterios se utilizan: por ejemplo, si más allá del Aprendizaje Basado en Problemas o Proyectos, o si se incide también en el resto de procesos matemáticos, en la línea planteada por el EIEM (Alsina, 2021b). Por otro lado, en cuanto a los contextos y recursos, se promueve sobre todo el uso de contextos reales, materiales manipulativos y juegos en infantil, y en primaria se incluyen además recursos tecnológicos como *software* interactivo, vídeos, etc. Aunque en un primer momento podría parecer que se introducen los recursos planteados por el EIEM para la enseñanza de la estadística y la probabilidad, en términos generales no se observa una planificación de dichos recursos desde lo concreto a la abstracto, en la línea que plantea el EIEM (Alsina, 2019, 2020b, 2021b). De este modo, hay una única persona formadora (F-41) que señala, para infantil, que *"los docentes en formación aprenden qué, cómo y cuándo enseñar estadística y probabilidad en infantil. Esto requiere aportar una propuesta de secuenciación de contenidos por edades y luego una amplia variedad de recursos para trabajarlos: situaciones reales, materiales manipulativos, juegos, recursos literarios, tecnológicos y gráficos"*. En el resto de los casos, esta secuencia no se observa y se hace alusión a uno a dos recursos.

Una comparativa entre los resultados obtenidos en los dos Grados, a pesar de las limitaciones marcadas principalmente por los diferentes tamaños muestrales relativos del estudio, permite señalar las siguientes conclusiones referentes a las tres dimensiones analizadas: 1) características; 2) enfoque; 3) metodología.

- Estándares de contenido: tanto en el grado MEI como en el MEP, la mayor parte de las y los formadores trabajan tanto la estadística como la probabilidad, y sólo en el caso del grado MEP se encuentran asignaturas que favorecen una formación centrada exclusivamente en torno a uno de los dos contenidos, estadística o probabilidad.
- Créditos: el volumen de créditos dedicados a esta enseñanza es diferente en cada grado, con una diferencia de 1 crédito a favor del grado MEP, en su mayoría. Una explicación a esto se puede deber a que, generalmente, en el grado MEI sólo existe una única asignatura para formación que abarca todos los conceptos matemáticos, mientras que en el grado MEP se suelen ofrecer dos o tres asignaturas para desarrollar los aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas.
- Perspectiva disciplinar / didáctica: en ambos grados se prioriza la perspectiva didáctica, aunque con incursiones al conocimiento disciplinar, lo cual responde a lagunas de conocimiento identificadas por las personas formadoras (Franco y Alsina, 2022a).
- Conocimientos: Los conocimientos que promueven las personas formadoras son equivalentes en ambos grados, atendiendo tanto al conocimiento disciplinar como didáctico.
- Estrategias metodológicas: una diferencia que se aprecia en los formadores de los dos grados es que en determinadas asignaturas de los grados MEP siguen una metodología centrada en la enseñanza magistral de los conceptos estadísticos y probabilísticos. Este modelo de enseñanza difícilmente contribuye a ser un modelo de estrategia de enseñanza válida debido, entre otros, a que no se fomenta la comunicación ni la resolución de problemas estadísticos (CEMat, 2021; Franklin et al., 2015), sino la transmisión de contenido.
- Contextos / Recursos: en ambos grados se presentan contextos reales, materiales manipulativos y juegos; y en primaria incorporan también recursos tecnológicos; hecho justificado, probablemente, por las características de cada etapa, en la que los niños de edades tempranas necesitan un acercamiento situacional y concreto a la matemática y, por ende, los materiales del profesorado en formación inicial de esta etapa están más centrados en este aspecto (Alsina, 2021b).

En síntesis, la formación en educación estadística y probabilística en los Grados en MEI y MEP es una pequeña parte de la amplia formación que deben recibir en torno a la enseñanza de los conceptos matemáticos. Pero, dado los pocos créditos que dedican a la formación matemática, el estudio de la educación estadística y probabilística es aún más limitado y, en ocasiones, no se desarrolla. Los formadores que la llevan a cabo lo hacen desde un enfoque dirigido al proceso que necesitan abordar en las aulas, aunque es necesario prestar atención a los conocimientos que ponen en marcha los formadores, pues se observan ciertas carencias en los conocimientos didácticos que sería conveniente atender de cara a que el futuro profesorado desarrolle un conocimiento profundo de los conceptos relacionados con la educación estadística y probabilística, que recoja el conocimiento que la investigación en educación estadística y probabilística para maestros señala que es necesaria que posean los futuros docentes (e.g., Alsina, 2019, 2020b, 2021b; Bargagliotti, 2020; Batanero y Godino, 2004; Franklin et al., 2015).

A modo de cierre, este estudio nos ha permitido dar una visión holística sobre la realidad de la formación inicial en educación estadística y probabilística en los Grados en MEI y MEP en las universidades públicas españolas, abriendo nuevas líneas tanto en el diseño de la formación inicial del profesorado como de investigación centradas en la repercusión de las mismas en el desarrollo del sentido estocástico de este colectivo, retos que deberán ser abordados en futuras investigaciones.

Declaración de contribución de autoría

*Ángel, Alsina: c*onceptualización, redacción y revisión.
Claudia, Vásquez: redacción y revisión.
Israel, García-Alonso: conceptualización y análisis de los datos.
Ainhoa, Berciano: redacción y revisión.

Referencias

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Editorial Graó.

Alsina, Á. (2020a). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387.

Alsina, Á. (2020b). Enseñar estadística en Educación Primaria: primeras recomendaciones desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. En C. Ribeiro y A. Pavan (Eds.). *Investigações hispanobrasileiras em Educação Estatística* (pp. 107-112). Editora Akademy.

Alsina, Á. (2021a). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, 15*(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357

Alsina, Á. (2021b). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemática. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 108,* 49-74.

Alsina, Á. y García-Alonso, I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(2), 11-27.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II).* American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/edu-set.pdf

Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.). *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Batanero, C. y Chernoff, E. (2018) (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research*. Springer.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J. Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13.* Springer Open.

Batanero, C. y Godino, J.D. (2004). Didáctica de la estadística y probabilidad para maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 409-439). Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Becker, E. S, Goetz, T., Morger, V. y Ranellucci, J. (2014). The importance of Teachers' Emotions and Instrucional Behavior for Their Students' Emotions – An Experience Sampling Analysis. *Teaching and Teacher Education, 43*, 15-26. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.05.002

Berciano, A., Anasagasti, J. y Zamalloa, T. (2021). Sentido estadístico en la formación de las y los estudiantes del grado de Educación Infantil. Una aproximación desde un contexto de aprendizaje STEAM. *PNA, 15*(4), 289-309. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22510

Comité Español de Matemáticas (CEMat) (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas. https://bit.ly/3ytlGg1

Charalambous, C. Y., Hill, H. C., Chin, M. J. y McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23,* 579-613. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2

Estrada. A. y Batanero, C. (2019). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education 15*(1), em0559. https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Font, V. (2013). Coordinación de teorías en Educación Matemática. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)* (pp. 177-184). Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM).

Franco, J. y Alsina, Á. (2022a). Conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad. *Educación Matemática, 34*(3), 65-96. https://doi.org/10.24844/EM3403.03

Franco, J. y Alsina, Á. (2022b). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta, 51*(1), 7-16. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16

Franklin, C. A, Kader, G. D., Bargagliotti, A. E., Scheaffer, R. L., Case, C. A. y Spangler, D. A. (2015). *SET – Statistical Education of Teachers.* American Statistical Association.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. ASA.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

García-Alonso, I., Vásquez, C. y Alsina, Á. (en prensa). Panorama curricular de la alfabetización temprana en estadística y probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y formación del profesorado.*

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowlege for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371-406.

Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 75–102). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_4

Jablonka, E. (2015). The evolvement of numeracy and mathematical literacy curricula and the construction of hierarchies of numerate or mathematically literate subjects. *ZDM - Mathematics Education, 47*(4), 599–609. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0691-6

Kaiser, G. y König, J. (2019). Competence Measurement in (Mathematics) Teacher Education and Beyond: Implications for Policy. *High Education Policy, 32*, 597–615. https://doi.org/10.1057/s41307-019-00139-z

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An introduction to Its Methodology (3rd ed).* Sage Publications.

López, C. y Gómez, P. (2023). Revisión curricular de los temas de estadística en educación primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 81-100. https://doi.org/10.12802/relime.23.2613

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2001). *Research in Education. A conceptual introduction.* Pearson.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Thales.

Nolla, Á., Cerisola, A., Fernández, B. y Muñoz, R. (2021). La formación inicial de los maestros en Matemáticas y su Didáctica. *RIFOP, 96*(35-1), 185-208. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2023). Creencias del profesorado de educación primaria en torno a la enseñanza de la estadística. *Revista Chilena de Educación Matemática, 15*(3), 90–101. https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i3.133

Vásquez, C. y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación Matemática, 34*(2), 245-274. https://doi.org/10.24844/EM3402.09

Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2023). Explorando la extensión del modelo MTSK al dominio estadístico: características del aprendizaje desde la Taxonomía SOLO. *Revista de Educación Estadística, 2*(1), 1-25. https://doi.org/10.29035/redes.2.1.3

Anexo I. Cuestionario Educación Estadística y Probabilística para Futuros Docentes

1. Indique la denominación de la materia que imparte en el Grado
2. Seleccione el grado al que corresponde esta asignatura:
    a. Grado de Maestro/a en Infantil
    b. Grado de Maestro/a en Primaria
    c. Doble grado de Maestro/a en Infantil y Primaria
    d. Otro: (indicar)
3. Indique su categoría profesional con la universidad:
4. Indique cuántos cursos ha sido docente de esta materia (consecutivos o no):
5. Créditos de la materia
6. Número de temas con los que consta la materia
7. Señale los bloques temáticos que incorpora la materia:
    a. Números
    b. Álgebra / Lógica / Pensamiento lógico
    c. Medida
    d. Geometría
    e. Estadística
    f. Probabilidad
    g. Otro: (indicar)
8. Indique si a lo largo de este curso pudo desarrollar:
    a. Estadística
    b. Probabilidad
    c. Estadística y Probabilidad
    d. Ninguna de las anteriores
9. Indique el número de créditos que dedica a cada bloque de contenido dentro de la asignatura:
    a. Números
    b. Álgebra
    c. Medida
    d. Geometría
    e. Estadística
    f. Probabilidad
    g. Otro: (indicar)
10. A lo largo de las sesiones que se llevan a cabo con los futuros maestros/as en torno a la enseñanza de la EyP, ¿promueve en su aula el uso, la construcción o la selección de materiales (manipulativo o software)? En caso afirmativo, describa brevemente qué les propone y cómo lo lleva a cabo.
    (pregunta abierta)
11. Aparte de la bibliografía que figura en la guía docente, ¿le suele recomendar a sus estudiantes algún material complementario, recurso de internet, aplicaciones informáticas, … durante las sesiones de clase? ¿Cuál o cuáles?
    (pregunta abierta)
12. El estudio que desarrolla de la Estadística tiene un enfoque:
    a. Exclusivamente disciplinar
    b. Exclusivamente didáctico
    c. Exclusivamente disciplinar, pero también didáctico
    d. Principalmente didáctico, pero también disciplinar
    e. Didáctico-disciplinar, combinando ambos por igual

13. Explique brevemente, qué aspectos de su enseñanza justifican el enfoque de la estadística señalado en la pregunta anterior:
    (pregunta abierta)
14. El estudio que desarrolla de la Probabilidad tiene un enfoque, principalmente:
    a. Exclusivamente disciplinar
    b. Exclusivamente didáctico
    c. Exclusivamente disciplinar, pero también didáctico
    d. Principalmente didáctico, pero también disciplinar
    e. Didáctico-disciplinar, combinando ambos por igual
15. Explique brevemente, qué aspectos de su enseñanza justifican el enfoque de la probabilidad señalado en la pregunta anterior:
    (pregunta abierta)
16. Durante el estudio de la didáctica de la estadística señale qué aspectos desarrolla:
    a. Ciclo de investigación estadística:
       Problema - Plan - Datos - Análisis - Conclusiones
    b. Enseñanza de los parámetros de centralización
    c. Enseñanza de los parámetros de dispersión
    d. Enseñanza de los gráficos estadísticos
    e. Enseñanza de las tablas de frecuencia
    f. Enseñanza de las tablas de recuento
    g. Dificultades en el aprendizaje de la estadística
    h. Análisis / Revisión de libros de texto
    i. Otro: (indicar)
17. En el aula con los futuros docentes, ¿qué metodología desarrolla para la enseñanza de la estadística? (A partir de proyectos, recopilan los datos, …)
18. El desarrollo de la estadística los datos utilizados pueden provenir de diferentes tipos de contextos (el aula, bases de datos, ODS, …). Cuando trabaja la estadística, ¿qué tipos de contextos utiliza?

Autores

Ángel Alsina. Universidad de Girona. Girona, España. angel.alsina@udg.edu
https://orcid.org/0000-0001-8506-1838

Claudia Vásquez. Pontificia Universidad Católica de Chile. Villarrica, Chile. cavasque@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5056-5208

Israel García-Alonso. Universidad de La Laguna. La Laguna, España. igarcial@ull.edu.es
https://orcid.org/0000-0002-1158-086X

Ainhoa Berciano. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. Leioa, España. ainhoa.berciano@ehu.eus
https://orcid.org/0000-0001-7399-4745

César Thiago Silva, Verônica Gitirana

USO DE UM ARTEFATO COMPUTACIONAL PARA EXPLORAR A COVARIAÇÃO: UM ESTUDO DAS GÊNESES INSTRUMENTAIS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Using a computational artifact to explore covariation: a study of the instrumental genesis of mathematics graduates

RESUMEN

En este artículo se presentan resultados destacados de un estudio que investigó los efectos del uso de un artefacto computacional en el razonamiento covariacional de los estudiantes y su relación con la transposición informática del concepto de covariación en dicho artefacto. La metodología consistió en un estudio de casos múltiples de la génesis instrumental de profesores de matemáticas en formación en situaciones de covariación con GeoGebra. El uso instrumentado de herramientas para apoyar la cuantificación de la variación articuladas dinámicamente con representaciones de funciones contribuyó a una interpretación covariacional del gráfico y a la coordinación de la covariación continua. Por otro lado, las restricciones estuvieron relacionadas con la representación de la variación con segmentos dinámicos en situaciones de variación negativa y con la influencia de esquemas basados en una visión de función como correspondencia y una visión estática del gráfico.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación matemática*
- *Tecnología educativa*
- *Razonamiento covariacional*
- *Génesis instrumental*
- *Transposición informática*

ABSTRACT

This article presents highlighted results of a study that investigated the effects of using a computational artifact on students' covariational reasoning and its relationship with the informatics transposition of the concept of covariation in this artifact. The methodology consisted of a multiple case study of the instrumental genesis of pre-service mathematics teachers who explored situations involving covariation with GeoGebra. The instrumented use of tools that support the quantification of variation dynamically connected with the function

KEY WORDS:

- *Mathematics education*
- *Educational technology*
- *Covariational reasoning*
- *Instrumental genesis*
- *Informatics transposition*

Silva, C. T. y Gitirana V. (2024). Uso de um artefato computacional para explorar a covariação: um estudo das gêneses instrumentais de licenciandos em matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(1), 105-138. https://doi.org/10.12802/relime.24.2714. Recepción: Mayo 24, 2022 / Aceptación: Enero 22, 2025.

representations contributed to a covariational interpretation of the graph and the coordination of continuous covariation. On the other hand, restrictions were related to the representation of variation by dynamic segments in situations of negative variation and the influence of schemes based on a view of function as correspondence and on a static view of the graph.

RESUMO

Este artigo apresenta resultados destacados de um estudo que investigou os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional de estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. A metodologia consistiu em um estudo de casos múltiplos das gêneses instrumentais de licenciandos em Matemática em situações de covariação com o GeoGebra. O uso instrumentado de ferramentas de suporte à quantificação da variação articuladas de forma dinâmica com as representações da função contribuiu para uma interpretação covariacional do gráfico e para a coordenação da covariação contínua. Por outro lado, restrições foram relacionadas à representação da variação com segmentos dinâmicos nas situações de variação negativa e à influência de esquemas baseados em uma visão de função como correspondência e em uma visão estática do gráfico.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação matemática*
- *Tecnologia educacional*
- *Raciocínio covariacional*
- *Gênese instrumental*
- *Transposição informática*

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats mis en évidence d'une étude qui a examiné les effets de l'utilisation d'un artefact informatique sur le raisonnement covariationnel des étudiants et sa relation avec la transposition informatique du concept de covariation dans cet artefact. La méthodologie consistait en une étude de cas multiples sur la genèse instrumentale des enseignants de mathématiques en formation initiale en situation de covariation avec GeoGebra. L'utilisation instrumentée d'outils d'aide à la quantification de la variation articulée dynamiquement avec des représentations de la fonction a contribué à une interprétation covariationnelle du graphique et à la coordination de la covariation continue. D'autre part, des restrictions ont été liées à la représentation de la variation par segments dynamiques dans des situations de variation négative et à l'influence de schémas basés sur une vision de la fonction comme correspondance et sur une vision statique du graphique.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement des mathématiques*
- *Technologie éducative*
- *Raisonnement covariationnel*
- *Genèse instrumentale*
- *Transposition informatique*

1. Introdução

No contexto do estudo das funções, a abordagem covariacional refere-se a como as variáveis da função variam uma em relação à outra. Esta visão está intimamente ligada ao desenvolvimento histórico da ideia de função como o estudo das relações entre duas grandezas variáveis (Malik, 1980).

Apesar do enfraquecimento do aspecto da covariação na definição formal atual de função, essa forma de conceber relações funcionais permanece necessária para conceitualizações importantes como limites, derivadas e continuidade (Carlson et al, 2002; Thompson & Carlson, 2017). Além disso, pensar em termos de como a variação em uma variável afeta a variação na outra variável é central para a caracterização covariacional de tipos de funções como a linear e a quadrática (Lima et al., 2005), a exponencial (Confrey & Smith, 1994), entre outras.

No entanto, estudos como os de Moore (2014), Carlson et al. (2002) e Ellis et al. (2016) mostraram que o raciocínio covariacional não é trivial para os estudantes, especialmente quando são requisitados a descrever o comportamento da variação e da taxa de variação a partir do gráfico da função e dos aspectos envolvidos na sua forma. Em Moore (2014), os estudantes inicialmente interpretaram o gráfico apenas com base na sua forma e nos movimentos físicos envolvidos no fenômeno modelado, desconsiderando a forma como as variáveis variavam; já os estudos de Lagrange (2014) e Ellis et al. (2016) mostraram exemplos de estudantes que não conseguiam relacionar a variação em uma variável à variação na outra variável, nem quantificar a forma como tal variação ocorria.

Diante dessas dificuldades e da importância da abordagem covariacional, Thompson e Carlson (2017) reuniram contribuições teóricas e construíram um quadro de referência que estrutura o raciocínio covariacional em diferentes níveis, desde aqueles nos quais o indivíduo revela pouca ou nenhuma coordenação de como uma variável varia em função da outra, até os níveis mais sofisticados, nos quais o indivíduo sustenta uma imagem das variações no valor de uma variável ocorrendo simultaneamente às variações no valor da outra variável.

Conforme o desenvolvimento do raciocínio covariacional tornou-se objeto de investigações, o uso de tecnologias digitais como suporte a este raciocínio começou a ser empregado em alguns estudos. Ellis et al. (2016), Zengin (2018) e Lagrange e Psycharis (2014) apontaram contribuições da representação e manipulação dinâmica de variáveis para o raciocínio covariacional; já os estudos de Johnson e McClintock (2018), Aranda e Callejo (2017), Ellis et al. (2016) e Lagrange (2014) destacaram o papel da conexão entre representações de função para representar a variação em múltiplas representações simultaneamente.

Contudo, resultados de uma investigação preliminar revelaram que o papel que o uso de tecnologias exerceu no raciocínio covariacional dos estudantes não foi analisado de um ponto de vista central pela maioria das pesquisas analisadas (Silva & Gitirana, 2023). Defendemos que o uso de tecnologias digitais não tem um papel neutro no desenvolvimento conceitual (Trouche, 2005; Artigue, 2002) e que é necessária uma análise mais profunda de como se dá este papel.

Para entender como se dá uma parte dessa influência, alguns aspectos importantes a serem considerados são: (i) a forma como os objetos matemáticos são representados no meio computacional; (ii) as escolhas das características constitutivas na concepção e na programação dos dispositivos; e (iii) as formas de interação com o usuário na interface dos dispositivos, o que abrange a ideia de Transposição Informática (Balacheff, 1993). No caso da abordagem covariacional de funções essa transposição envolve, além do dinamismo e da conexão entre representações, as possibilidades e as ferramentas implementadas para dar suporte à coordenação e à quantificação da forma como as variáveis variam.

Além disso, a forma como o uso das tecnologias digitais influencia no desenvolvimento conceitual está ligada ao processo de apropriação dessas tecnologias e ao desenvolvimento de esquemas pelos indivíduos ao explorá-las para aprender, o que envolve a gênese instrumental (Rabardel, 1995). Dessa forma, a Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995) configura-se como uma lente apropriada para compreender de que forma o uso de tecnologias digitais pode influenciar o desenvolvimento conceitual, neste caso, o raciocínio covariacional de estudantes.

Diante disso, este artigo descreve resultados destacados de um estudo da gênese instrumental de três licenciandos em Matemática com o *software* GeoGebra para explorar situações de covariação (Silva, 2022). A pesquisa teve como objetivo "*investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato*" (Silva, 2022, p. 20).

O estudo envolveu um experimento de ensino no qual os licenciandos exploraram materiais desenvolvidos no *software* GeoGebra para: (i) descrever a covariação entre as variáveis de funções e descrever a taxa de variação; (ii) esboçar gráficos para representar a covariação entre as variáveis; (iii) descrever relações entre os modelos algébricos de funções e a covariação entre as suas variáveis; e (iv) interpretar aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo e mínimo e pontos de inflexão por uma visão covariacional.

Duas questões direcionaram a investigação:

– "*De que forma o uso de um artefato computacional para explorar a covariação em relações funcionais influencia o raciocínio covariacional dos estudantes?*" (Silva, 2022, p. 20)

– *"Como os efeitos do uso do artefato podem ser relacionados aos aspectos da transposição informática da covariação nesse artefato?"* (Silva, 2022, p. 20)

2. Quadros teóricos

Nosso estudo foi embasado no construto teórico do Raciocínio Covariacional, na noção de transposição informática, na Abordagem Instrumental, da qual tomamos o conceito de Gênese Instrumental, que tem por base a noção de esquema. Esses são os quatro pilares que suportaram teoricamente nossa investigação.

2.1. *Abordagem Covariacional de funções e aspectos do Raciocínio Covariacional*

Thompson e Carlson (2017) sistematizaram o construto teórico do Raciocínio Covariacional a partir dos trabalhos sobre covariação de Thompson (1994), Confrey e Smith (1994), entre outras contribuições.

Confrey e Smith (1994) distinguiram duas formas de conceitualizar funções: correspondência e covariação; a primeira enfatiza a associação de um valor x a um único valor y por meio de uma regra, já a covariação implica "poder mover operacionalmente de y_m para y_{m+1} coordenando com o movimento de x_m para x_{m+1}" (Confrey & Smith, 1994, p. 33, tradução nossa).

Na construção teórica de Thompson (1994) a ideia de covariação tornou-se necessária para explicar o raciocínio de estudantes que em uma situação conceitual imaginaram quantidades como tendo valores que variavam. Assim, nessa construção uma pessoa raciocina covariacionalmente quando "imagina os valores de duas quantidades variando e os imagina variando simultaneamente" (Thompson & Carlson, 2017, p.425, tradução nossa).

Carlson et al. (2002) desenvolveram um quadro que estruturou níveis e ações mentais envolvidas no raciocínio covariacional, que envolvem desde o nível mais simples da coordenação da variação em uma variável com a variação na outra, depois os níveis de coordenação da direção e da quantidade da variação e, por fim, os níveis de coordenação da taxa média e da taxa instantânea de variação conforme se consideram incrementos uniformes na variável de entrada. Tal estrutura aponta para a ideia de um raciocínio covariacional mais 'refinado' conforme se raciocina em um nível mais alto, isto é, em termos de coordenar a taxa de variação com incrementos cada vez menores nas variáveis.

Já Castillo-Garsow (2012) distinguiu as formas pelas quais a variação pode ser concebida por alguém. Segundo ele, uma pessoa pode conceber um valor variando discretamente ou continuamente; além disso, a concepção de uma variação contínua pode ser suave ou segmentada. Na variação contínua suave tem-se uma ideia de uma 'variação em progresso' dos valores, já na variação contínua segmentada, apesar de uma ideia de continuidade, imagina-se que os valores variam por 'segmentos' ou pedaços.

Thompson e Carlson (2017) revisitaram a estrutura desenvolvida por Carlson et al. (2002) para criar um novo quadro que estrutura o raciocínio covariacional em termos de seis níveis: (i) sem coordenação – quando não há uma imagem das variáveis variando juntas; (ii) pré-coordenação – quando há uma imagem de uma variação assíncrona das variáveis; (iii) coordenação 'grosseira' – quando há uma imagem de variação conjunta das variáveis, mas com um vínculo frágil entre os seus valores individuais; (iv) coordenação de valores – quando há uma coordenação dos valores de uma variável com os valores da outra variável, com a imagem de uma coleção de pares (x, y) desses valores; (v) covariação contínua segmentada – quando há a visualização de uma variação simultânea em uma variável conforme a outra variável varia, porém tal visualização é segmentada; (vi) covariação contínua suave – quando há a visualização, de forma contínua e suave, da variação em uma variável conforme a outra variável varia.

Para Thompson e Carlson (2017), raciocinar sobre funções covariacionalmente contribui para que se pense no gráfico como representação da covariação entre as variáveis e menos como uma forma, como definiram Moore e Thompson (2015):

> O pensamento da forma estática significa fazer inferências sobre o comportamento de uma função estritamente por ter construído associações entre as formas dos gráficos e as propriedades da função. O pensamento da forma emergente é interpretar um gráfico como um traço emergente de variáveis que covariaram. (Thompson & Carlson, 2017, p. 445, tradução nossa)

No contexto das dificuldades dos estudantes, Moore (2014) e Carlson et al. (2002) apontaram dificuldades dos estudantes em interpretar a covariação entre as variáveis a partir do gráfico da função; no primeiro, os estudantes interpretaram o gráfico com base na forma e em movimentos físicos, sem levar em conta a forma como as variáveis variaram; ambos os estudos destacaram a dificuldade em interpretar o comportamento da taxa de variação a partir do gráfico da função.

Já os estudos de Lagrange (2014) e Ellis et al. (2016) apontaram exemplos nos quais estudantes visualizaram a variação, mas não conseguiram quantificar a forma como ela ocorria. No estudo de Johnson e McClintock (2018), os estudantes foram envolvidos em situações de variação variável, ou seja, da mudança no valor no qual uma variável aumenta ou diminui; os autores concluíram que a quantificação da variação pelos estudantes foi fundamental para os estudantes discernirem esse tipo de variação nessas situações.

No presente estudo, o quadro teórico do raciocínio covariacional foi tomado como uma referência para analisar como o uso do artefato computacional contribuiu no raciocínio covariacional dos estudantes. Entretanto, a forma como foi analisado não enfatiza uma abordagem da mera classificação hierárquica e sequencial dos níveis de Thompson e Carlson (2017), mas buscou identificar nos estudantes formas mais sofisticadas de raciocinar covariacionalmente com o suporte da tecnologia, isto é, como o uso do artefato contribuiu para eles progredirem de formas menos sofisticadas (pré-coordenação ou coordenação grosseira, por exemplo) para formas mais sofisticadas (coordenação da covariação contínua, por exemplo).

2.2. *Transposição Informática*

A transposição informática envolve as transformações que os saberes passam no processo de representação em um meio computacional. Balacheff (1994) define-a como:

> Falarei de transposição informática (...) para designar este trabalho sobre o conhecimento que permite uma representação simbólica e a implementação desta representação por um dispositivo informático, quer se trate então de “mostrar” o conhecimento ou de “manipulá-lo”. (p.14, tradução nossa).

Tal processo envolve aspectos de três espaços dos dispositivos informáticos: o (i) universo interno, que integra as linguagens de programação e os componentes internos, (ii) a interface, que faz a mediação entre o dispositivo e o usuário e (iii) o universo externo, que envolve os elementos externos integrados ao dispositivo. Balacheff chama a atenção para a transposição para o universo interno, que envolve formas de representação em termos de linguagem de programação, e para a interface, que resulta em restrições e possibilidades sobre como objetos serão visualizados e manipulados na tela.

Tais restrições podem resultar em fenômenos com características determinantes sobre como conceitos serão construídos pelos usuários. Por exemplo, no processo de geração do gráfico de funções, a representação aproximada de números reais e a técnica de discretização podem gerar efeitos visuais incongruentes com os objetos matemáticos (Balacheff, 1993, p. 368).

Um dos fenômenos que podem surgir na transposição informática diz respeito às aparentes contradições, na interface, entre a matemática e a representação computacional do objeto matemático. Giraldo et al. (2002) descreveram esse fenômeno como um conflito teórico-computacional, que está intimamente ligado com a restrição imposta à representação matemática pelos algoritmos computacionais.

A Figura 1 ilustra um potencial conflito ao nível da interface (limitação da janela de visualização do gráfico) no gráfico de *f(x)*=1/*x*. Conforme varia-se um ponto dinâmico associado à variável em *x* e observa-se o comportamento de um ponto associado à variável em *y*, que some na área inferior do gráfico e logo reaparece no topo, pode ser gerada a impressão de uma conexão entre valores de *y* que tendem a -∞ e a +∞, sem uma quebra da continuidade em *x* = 0.

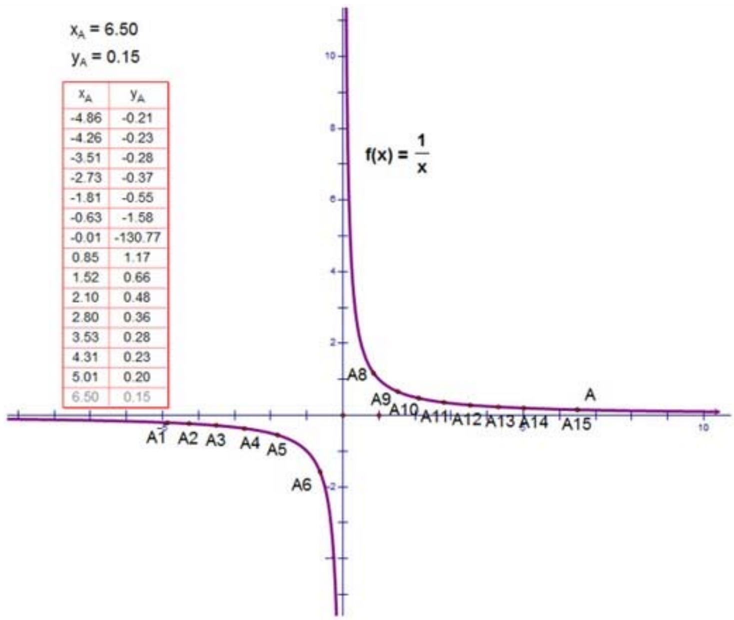


Figura 1. Conflito teórico computacional na função *f*(*x*) = 1/*x*
Nota: Adaptado de Ndlovu et al. (2011, p.9)

De uma forma mais geral, aspectos da transposição informática que podem impactar a forma como tecnologias são exploradas podem envolver ainda: a sintaxe, a semântica envolvida na representação dos objetos; as diferentes formas de representar e operar objetos na interface; as diferentes escolhas de *design*; as possibilidades de ação, restrições e os seus efeitos.

2.2.1. *Alguns aspectos da transposição informática da covariação*

No contexto da covariação, aspectos da transposição informática podem envolver a questão de como as representações de função e das variáveis são implementadas, bem como as formas de permitir coordenar e quantificar a maneira como as variáveis variam. Um dos meios nos quais a representação computacional de variáveis tem se apoiado é a geometria dinâmica, que permite o dinamismo das variáveis

(Figura 2). No contexto das funções, o aspecto da variação dinâmica está ligado às possibilidades computacionais de representação e manipulação de objetos que representam ou estão relacionados às variáveis, por meio de ações como deslizar, arrastar na tela, entre outras ações que permitem uma animação desses objetos.

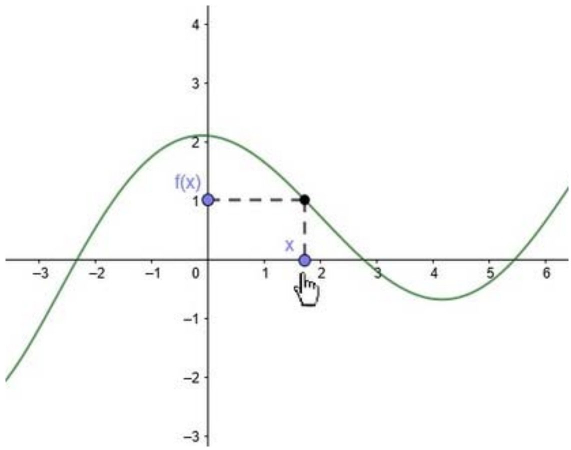


Figura 2. Manipulação de um ponto associado à variável
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 58)

Além disso, o meio computacional permite explorar a covariação por meio de diferentes representações de função conectadas. Como exemplo, Lagrange (2014), Lagrange e Psycharis (2014) e Ellis et al. (2016) destacaram o suporte de aspectos computacionais como a variação dinâmica e a conexão simultânea entre diferentes representações. Por outro lado, a infraestrutura da geometria dinâmica também traz restrições, como a possibilidade de associação entre objetos de naturezas distintas e das suas propriedades, podendo gerar equívocos, como o da associação do valor da variação Δy entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ com a distância entre os pontos que representam $f(x_1)$ e $f(x_2)$, a qual não assume valores negativos. Um conflito pode surgir com o conceito de variável ao deslizar o ponto associado à variável e construir uma ideia de um objeto único que se move no eixo em vez de um objeto representativo de um conjunto de valores; outro conflito da mesma natureza com a representação de retas e segmentos secantes e tangentes comuns na representação da taxa de variação (Zengin, 2018; Ndlovu et al., 2011).

No contexto numérico, a natureza finita dos algoritmos computacionais (Giraldo et al., 2002) tem efeito nas limitações da interface, por exemplo, na exibição do valor da variação entre valores próximos o suficiente, pode ser exibido o valor zero como resultado caso o número de dígitos não seja configurado adequadamente (Figura 3); este conflito pode ser comum ao abordar a variação infinitesimal, na qual é importante a aproximação cada vez maior entre valores.

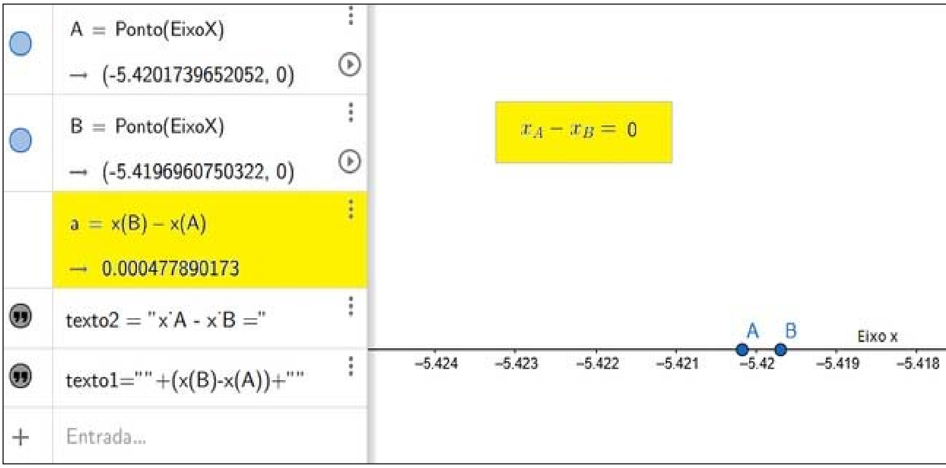


Figura 3. Inconsistência no valor da variação pela limitação de dígitos
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 66)

Neste estudo, o papel dos aspectos da transposição informática foi analisado em termos de como todas as características constitutivas e estruturadoras colocadas até aqui tiveram efeito no uso do GeoGebra pelos estudantes e, consequentemente no seu raciocínio covariacional. Com relação aos espaços envolvidos na transposição informática, delimitamos a nossa análise no espaço da interface, visto que é nela que se concentram os aspectos interativos entre o dispositivo e o seu usuário.

Entender como os aspectos envolvidos na transposição informática podem estruturar a atividade é uma das problemáticas da Abordagem Instrumental e do conceito de gênese instrumental, visto a seguir.

2.3. *Gênese Instrumental*

A gênese instrumental é um conceito definido por Rabardel (1995) na sua Abordagem Instrumental e diz respeito aos processos pelos quais um indivíduo constrói progressivamente um instrumento ao usar um artefato para realizar uma atividade. Essa construção é marcada pela evolução dos esquemas de utilização do artefato, isto é, a evolução dos elementos que organizam a forma como o sujeito usa o artefato para determinado fim em uma atividade.

Assim, no sentido de Rabardel, o instrumento é uma entidade mista, composta pelo artefato (ou uma parte deste) e por esquemas de utilização do artefato, que podem ser direcionados para a gestão das propriedades do artefato (esquemas de uso) ou para o objeto da atividade (esquemas de ação instrumentada). A gênese instrumental envolve, dessa forma, dois processos direcionados ao sujeito (instrumentação) e ao artefato (instrumentalização):

> Os *processos de instrumentalização* dizem respeito ao surgimento e evolução dos componentes artefactuais do instrumento: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacreses, atribuição de propriedade, transformação do artefato (estrutura, funcionamento etc.) que prolongam as criações e realizações de artefatos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar;
>
> Os *processos de instrumentação* estão relacionados ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por meio da acomodação, coordenação, combinação, inclusão e assimilações recíprocas, a assimilação de novos artefatos para esquemas já constituídos etc. (Rabardel, 1995, p.111, tradução nossa)

Assim, segundo Rabardel, enquanto a instrumentalização envolve um enriquecimento das propriedades do artefato pelo sujeito, a instrumentação envolve o desenvolvimento de novos esquemas para o uso do artefato. A gênese instrumental também leva a uma estruturação das ações mediadas pelo instrumento. Rabardel insere essa estruturação a partir de duas fontes: das restrições próprias dos artefatos e das possibilidades de ação permitidas pelos artefatos.

Neste estudo, essas fontes de estruturação se relacionam bastante com a transposição informática e são esses aspectos que enfatizamos na análise e discussão dos dados, em termos de como eles influenciaram o uso instrumentado do GeoGebra e o desenvolvimento do raciocínio covariacional dos estudantes.

2.3.1. *A noção de 'esquema' de Vergnaud na Abordagem Instrumental*

Embora Rabardel apresente a noção de esquemas de utilização a partir de uma definição mais abrangente de esquemas, a conceitualização de esquemas de Vergnaud é destacada na sua construção da Abordagem Instrumental.

Vergnaud (2009) define o esquema como "a organização invariante da atividade para uma classe de situações" (Vergnaud, 2009, p. 88, tradução nossa). Os esquemas também podem se adaptar a novas situações, o que caracteriza o desenvolvimento do conhecimento. A estrutura analítica que integra a noção de esquema de Vergnaud envolve aspectos intencionais, gerativos, epistêmicos e computacionais:

- O aspecto intencional dos esquemas envolve um objetivo ou vários objetivos que podem ser desenvolvidos em subobjetivos e antecipações.
- O aspecto gerativo dos esquemas envolve regras para gerar atividade, ou seja, as sequências de ações, coleta de informações e controles.
- O aspecto epistêmico dos esquemas envolve invariantes operacionais, a saber conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Sua principal função é pegar e selecionar as informações relevantes e inferir os objetivos e regras.

> – O aspecto computacional envolve possibilidades de inferência. Eles são essenciais para entender que o pensamento é composto de uma intensa atividade de computação, mesmo em situações aparentemente simples; ainda mais em novas situações. Precisamos gerar objetivos, subobjetivos e regras e, também, propriedades e relações que não são observáveis (Vergnaud, 2009, p. 88, tradução nossa).

Destacam-se, nesta definição, tanto o aspecto gerativo dos esquemas, cujas regras contribuem para organizar a atividade instrumentada, quanto o seu aspecto epistêmico, cujos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação revelam tanto o conhecimento que fundamenta quanto o conhecimento resultante da atividade instrumentada. Para Rabardel (1995), a noção de esquema de Vergnaud permite "definir as características das situações realmente levadas em conta pelo sujeito, sejam elas situações familiares, para as quais já estão constituídos invariantes operacionais, ou situações em que sua elaboração está em andamento" (Rabardel, 1995, p.88, tradução nossa).

A noção de esquema de Vergnaud foi tomada neste estudo por fornecer uma estrutura analítica que permite relacionar os aspectos intencionais e gerativos envolvidos nas regras, objetivos e ações que os compõem com o conhecimento subjacente à ação instrumentada sobre o artefato. Assim, ao estruturar as ações e as interações dos estudantes com o GeoGebra por meio dos seus esquemas inferidos, buscamos identificar nesses esquemas o raciocínio covariacional subjacente a essas ações, complementando assim o raciocínio covariacional inferido mais diretamente, a partir das falas e respostas dos estudantes.

Dessa forma, esta definição analítica dos esquemas permitiu uma análise voltada não apenas para o conhecimento, mas voltada também para integrar os aspectos da gênese instrumental à estruturação da ação realizada pela transposição informática no GeoGebra, por relacionar o seu uso instrumentado com as possibilidades e restrições impostas pelas características dos materiais desenvolvidos no *software*.

3. Metodologia

A metodologia do estudo consistiu em um estudo de casos múltiplos (Yin, 2015) das respectivas gêneses instrumentais de três licenciandos em Matemática. O estudo de caso é uma abordagem metodológica que "investiga um fenômeno contemporâneo (o caso) em profundidade e em seu contexto de mundo real" (Yin, 2015, p.17) e pode aplicar-se tanto a um caso apenas como a múltiplos casos, nos quais as particularidades e as especificidades de cada caso são enfatizadas. Assim, consideramos cada caso como sendo o de cada licenciando na sua gênese instrumental com o GeoGebra ao explorar situações de covariação.

Definimos a escolha pelo método do estudo de caso pela necessidade de uma análise em profundidade de um fenômeno (gênese instrumental) que se desenvolveu de forma particular em cada indivíduo (caso) em interação com um artefato e o contexto no qual o caso se desenvolveu. Tal contexto consistiu em um experimento de ensino realizado por meio de um curso de extensão no qual cada indivíduo desenvolveu sua gênese instrumental com o uso do GeoGebra.

Os dados do estudo de caso foram produzidos por meio da aplicação de um questionário, de um experimento com seis sessões de ensino e de uma entrevista baseada em tarefas (Clement, 2000; Goldin, 2000), um modelo de entrevista no qual os entrevistados respondem às questões formuladas enquanto resolvem tarefas propostas pelo entrevistador. Além das respostas aos questionários e às entrevistas, os dados produzidos foram: registros do vídeo da tela e do áudio dos estudantes durante o uso do GeoGebra, respostas escritas e imagens produzidas em fichas *online*, interações orais e por meio de *chat*, bem como as anotações do pesquisador.

A produção dos dados em cada uma das etapas do estudo visou o acompanhamento do desenvolvimento da gênese instrumental dos estudantes com o uso do *software* GeoGebra e de como o raciocínio covariacional dos estudantes foi mobilizado com o suporte do *software*. A análise dos dados foi baseada na Análise Microgenética (Meira, 1994), por ser uma técnica que se aplica à análise detalhada de processos interativos da atividade e do seu potencial para analisar dados em vídeo, um dos principais tipos de dados produzidos no estudo. Neste processo de análise, foi observado como os esquemas mobilizados pelos estudantes revelaram o raciocínio covariacional subjacente e como as possibilidades e as restrições no uso do GeoGebra permitiram relações com a mobilização de tal raciocínio.

O contexto de ensino e aprendizagem no qual o estudo se inseriu trouxe especificidades como a necessidade de um planejamento didático e de instrumentos e técnicas metodológicas adequadas a esse contexto, o que levou ao uso metodológico do modelo de orquestração instrumental (Trouche, 2005) para estruturar o experimento de ensino, bem como as adaptações deste modelo ao ensino remoto (Gitirana & Lucena, 2021), considerando-se o contexto de pandemia da COVID-19 no qual se desenvolveu o estudo.

São descritos a seguir alguns aspectos desse contexto, dos participantes, dos materiais no GeoGebra e da produção e análise dos dados.

3.1. *Contexto*

O estudo de caso foi realizado no contexto de um curso de extensão oferecido a estudantes da Licenciatura em Matemática de duas instituições federais de ensino superior. Os inscritos no curso foram previamente informados de que poderiam ser voluntários da pesquisa desenvolvida ao decorrer do curso. Oito licenciandos participaram do curso, que foi realizado de forma *online* por meio de uma plataforma de videoconferência. Os autores deste artigo atuaram como mediador e coordenador do curso, respectivamente. Além disso, três licenciandos em Matemática deram poio ao mediador como monitores voluntários. Dos oito estudantes que participaram do curso, três tornaram-se sujeitos do estudo de casos múltiplos.

As adaptações decorrentes da pandemia da COVID-19 também influenciaram na estruturação do estudo (sobretudo do experimento de ensino) e da produção dos dados. Tal contexto levou à realização do curso de forma remota, por meio de uma plataforma de videoconferência e do suporte de diversos artefatos tecnológicos *online*.

3.2. *Perfil dos participantes*

A escolha por licenciandos em Matemática como participantes do estudo se deu por fatores como: (i) a relevância do objeto matemático para a formação matemática; (ii) a proximidade da pesquisa em Educação com a licenciatura; e (iii) o caráter formativo de um estudo que envolve o uso de tecnologias na aprendizagem da matemática, o que pode contribuir na formação docente dos participantes. Os sujeitos do estudo de caso foram selecionados de um total de oito participantes do curso de extensão dentro do qual o estudo foi realizado. Para a seleção, foi considerado o critério de participação nas atividades propostas durante o curso, visando uma produção de dados satisfatória.

Foram atribuídos nomes fictícios aos participantes: Eric, Alice e Louise. Eles estavam entre o quinto e o último período da Licenciatura em Matemática, o que significa que eles tinham experiência prévia com ideias do Cálculo. Já a sua experiência com o *software* GeoGebra para explorar funções foi apontada por meio de um questionário aplicado antes do curso; Eric e Alice informaram ter um domínio intermediário do GeoGebra para explorar funções, já Louise informou dominar pouco o software para explorar funções.

3.3. *Concepção e implementação dos materiais no software GeoGebra*

A concepção e a implementação dos materiais de suporte às situações no GeoGebra foram baseadas na representação dinâmica da variação, na conexão entre as variáveis em x e em y e na articulação dinâmica e simultânea entre representações, como o modelo algébrico, o gráfico e a planilha. Também se apoiou em ferramentas de suporte à quantificação da variação em y conforme x aumenta por acréscimos constantes. Essas características foram baseadas no objetivo de dar suporte à interpretação covariacional da função (sobretudo do gráfico), em termos de como a variável em y varia em função da variável em x.

A primeira situação, adaptada de Thompson, et al. (2017), foi baseada em uma representação dinâmica de funções por pontos e segmentos variáveis, nos quais o valor da variável *x* foi associado a um segmento no eixo *x* e o valor da variável *y* foi associado a um segmento no eixo *y* (Figura 4).

O material desenhado para esta situação configurou-se em duas janelas de visualização, cada uma com um sistema de coordenadas, a primeira janela incluiu cinco caixas de marcação, cada uma representando um tipo de função; ao marcar uma caixa específica, os estudantes deveriam deslizar o ponto no eixo *x*, observar e descrever o comportamento do ponto que representa a variável no eixo *y* e descrever como se dá a covariação e, em seguida, na segunda janela de visualização, esboçar o gráfico que representa a covariação entre *x* e *y*.

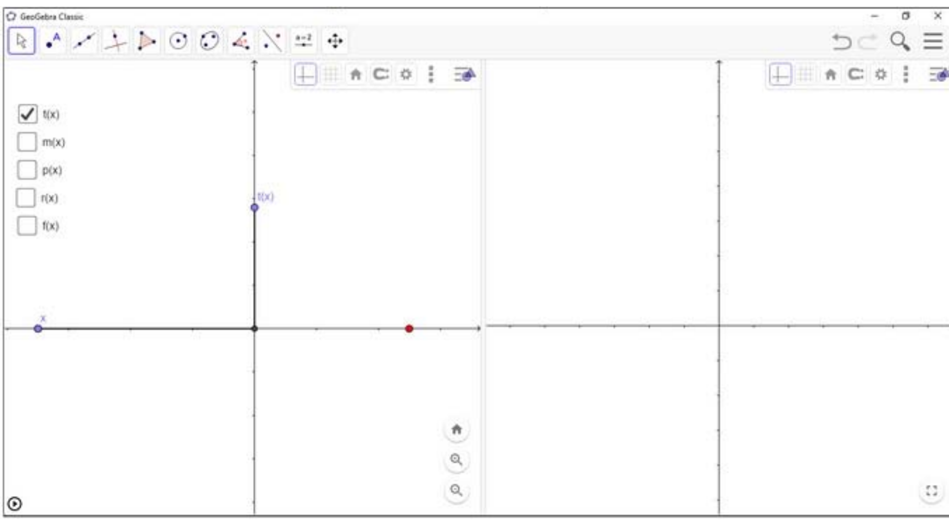


Figura 4. Material da situação 1
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 106)

A segunda situação foi baseada na representação dinâmica das variações Δx e Δy articuladas ao gráfico de uma função para explorar a variação de Δy em função de Δx e *x*, bem como a relação dessa variação com aspectos como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão (Figura 5). Os estudantes foram solicitados a descrever as suas inferências sobre a taxa de variação média e instantânea com relação às variáveis e esboçar o gráfico da taxa instantânea em função de *x*.

O material desenhado para esta situação centralizou-se na janela de visualização do gráfico, na qual foi implementada uma construção que conectou a variação de dois valores de *x* com os dois valores correspondentes em *y*. Ao deslizar o ponto correspondente a um dos valores em *x*, o outro ponto no eixo *x* e os pontos correspondentes em *y* variavam em simultâneo; os controles deslizantes *a*, *b*, *c* e *d* tinham o papel de definir a função traçada e o controle deslizante Δx podia ser manipulado para definir o valor da diferença entre os dois valores em x. A variação simultânea dos valores de Δx, Δy, e $\Delta y/\Delta x$ podia ser visualizado na representação numérica da planilha.

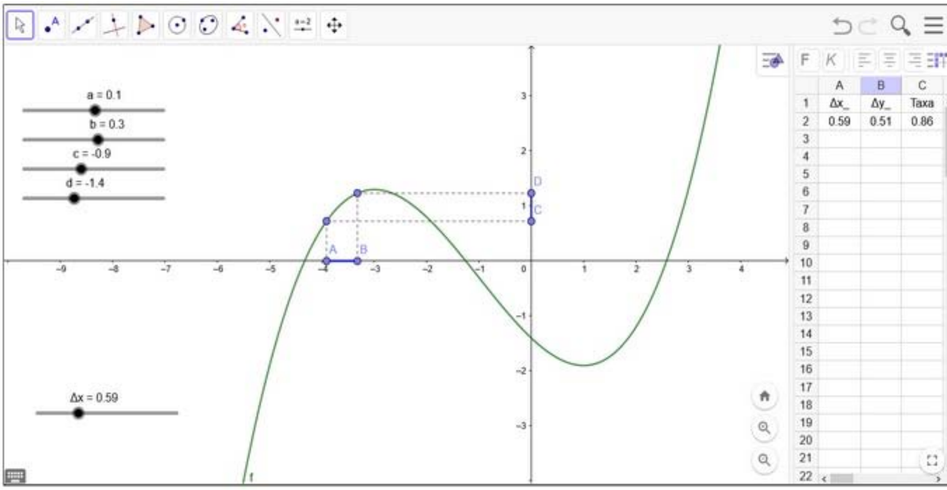


Figura 5. Material da situação 2
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 108)

A situação 3 foi baseada em uma representação das variações sucessivas em x e y no gráfico da função, além da articulação do gráfico com o gráfico das variações em y, o modelo algébrico e uma planilha (Figura 6). Inicialmente, os estudantes foram solicitados a descrever relações entre o gráfico da função e a variação em y em função da variação em x. Em seguida foram solicitados a descrever relações entre o modelo algébrico das funções e a variação em y com o suporte da planilha dinâmica.

As ações no material concebido para esta situação foram concentravam na janela central, na qual era possível deslizar em conjunto os pontos associados aos valores em x e observar a variação simultânea dos pontos associados aos valores em y, bem como dos segmentos que representam as variações Δx e Δy, cuja representação também podia ser visualizada de forma isolada na janela de visualização do lado direito na Figura 6; o controle deslizante k serviu para configurar a quantidade de intervalos sucessivos; as caixas de entrada x_A e x_B serviam para definir o valor de Δx, já os valores das diferenças sucessivas em Δx e Δy podiam ser visualizadas na planilha, na janela do lado direito.

Na entrevista, as ferramentas exploradas nas situações anteriores foram reunidas em um único material no GeoGebra: os segmentos dinâmicos nos eixos (situação 1), a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy (situação 2) e a ferramenta de variações sucessivas (situação 3). Os estudantes foram solicitados a descrever a forma como *y* varia em função de *x* e esboçar o gráfico da taxa de variação instantânea da função (Figura 7).

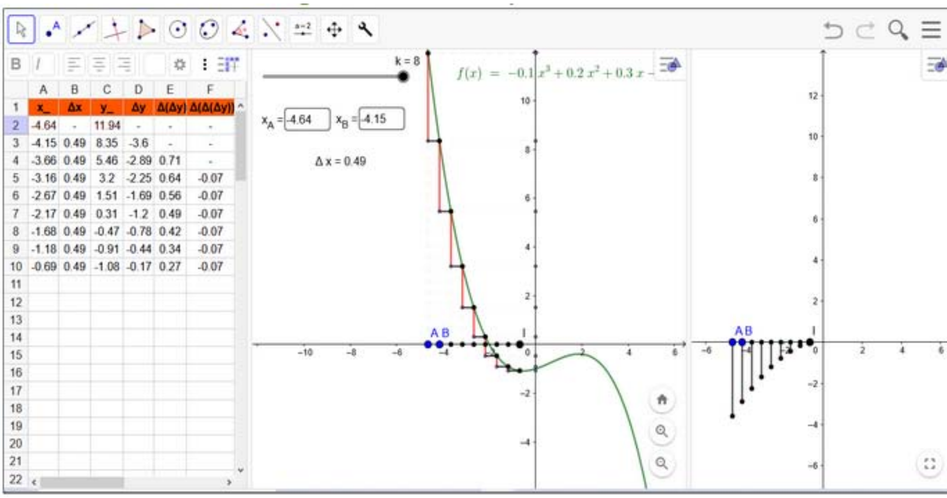


Figura 6. Material da situação 3
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 109)

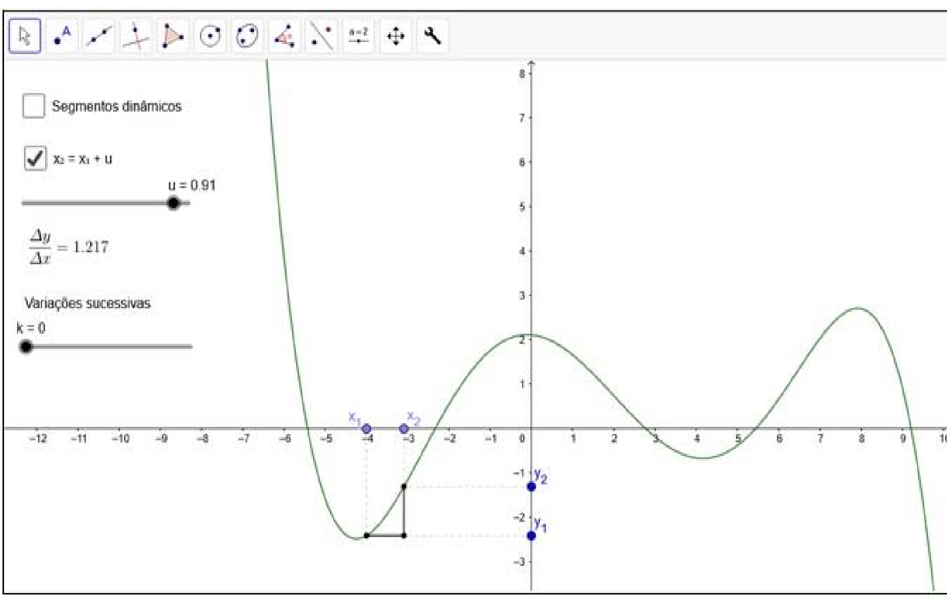


Figura 7. Material explorado na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 283)

3.4. *Produção e registro dos dados*

Na primeira etapa, um questionário *online* foi aplicado para saber a experiência dos estudantes com tecnologias como o GeoGebra para explorar funções e sobre o seu entendimento sobre a ideia de função e a relação entre variáveis no gráfico.

Na segunda etapa, a gênese instrumental dos estudantes foi acompanhada durante um experimento de ensino de seis sessões, na qual os estudantes receberam um treinamento sobre as ferramentas do GeoGebra para explorar a covariação em funções e exploraram o *software* para resolver situações de covariação. Os estudantes registraram as suas ações no GeoGebra enquanto resolviam as situações, para isto, gravaram a tela e o áudio do computador; nesta etapa, os dados também envolveram as respostas escritas e esboços do gráfico produzidos pelos estudantes em fichas *online*, além das interações simultâneas entre os participantes, o mediador e os monitores, via *chat*.

Como um dos focos da análise eram os esquemas mobilizados pelos estudantes no uso do software, os estudantes foram orientados a usar a técnica de pensar em voz alta (Kujala & Mantyla, 2000) para que, em conjunto com as ações videogravadas na tela do software, tivéssemos um melhor acesso aos esquemas que fundamentaram as suas ações no software e as suas inferências, permitindo assim inferir o seu raciocínio covariacional.

A terceira etapa consistiu na aplicação de entrevistas baseadas em tarefas (Clement, 2000; Goldin, 2000), no qual os entrevistados responderam às perguntas formuladas enquanto usavam o GeoGebra para resolver as tarefas concebidas. A aplicação desse tipo de entrevista permitiu observar e arguir os estudantes enquanto eles exploravam o GeoGebra para resolver situações semelhantes às do experimento de ensino, fazendo emergir os seus esquemas e o raciocínio covariacional em desenvolvimento.

A produção e a análise dos dados sofreram um importante impacto devido ao contexto de pandemia da COVID-19 no qual o estudo foi realizado. Neste sentido, foi necessário repensar a estruturação do experimento, os recursos para o uso didático e metodológico e as formas de uso de tais recursos por cada ator, no sentido de minimizar as limitações de um estudo remoto, que reduziram a interação face a face e o acesso a dados úteis, como os gestos. A utilização de diferentes tipos de recursos para a interação e o registro de dados (*chat*, videoconferência, videogravação da tela, fichas *online* etc.), bem como a técnica de pensar em voz alta permitiram enriquecer os dados disponíveis para a análise.

Com relação aos aspectos éticos, os participantes foram previamente orientados quanto aos aspectos envolvidos na sua participação e do tratamento dos dados produzidos por eles; um termo de ciência foi assinado por cada participante, voluntariando-se ao estudo e autorizando o uso dos dados produzidos.

3.5. *Estruturação da análise dos dados*

Para entender a influência do uso do GeoGebra, os esquemas mobilizados pelos estudantes foram inferidos a partir das suas ações na resolução das situações propostas no GeoGebra e, dentro da estrutura analítica proposta por Vergnaud, foram observados os invariantes operatórios (conceitos e teoremas-em-ação) e as inferências que caracterizaram a mobilização do raciocínio covariacional dos estudantes; os esquemas mobilizados também contribuíram para identificar os aspectos da transposição informática em jogo na forma como o uso do GeoGebra contribuiu ou não para o raciocínio covariacional.

Considerando o foco nos esquemas e tendo como principal fonte de acesso a tais esquemas as ações na tela do *software* registradas em vídeo, foi utilizada uma análise microgenética destes dados, em conjunto com as demais fontes de dados descritas. Segundo Meira (1994), a análise microgenética examina “mudanças relativamente sutis nas relações entre agentes e suas ações” (Meira, 1994, p. 60) e pode ser combinada com técnicas como a videografia para realizar uma análise interpretativa dos mecanismos psicológicos que fundamentam a atividade. Para isso, propõe-se uma descrição densa dos aspectos interacionais da atividade e uma estruturação que permita a análise de protocolos, como transcrições de discursos e ações.

Meira (1994) descreve algumas etapas para a estruturação e análise dos dados videogravados em uma análise microgenética: (i) assistir os vídeos completos e realizar anotações sobre os eventos que se associam ao problema; (ii) produzir um índice de eventos; (iii) identificar os eventos relacionados ao problema de pesquisa; (iv) transcrever os eventos detalhadamente; (v) assistir os segmentos e, com o suporte das transcrições, gerar interpretações sobre os microprocessos envolvidos e, por fim, (vi) divulgar os dados enfatizando exemplos prototípicos que ilustram a interpretação do autor.

Conforme ilustra o diagrama da análise (Figura 8), buscou-se identificar e descrever os esquemas mobilizados na gênese instrumental dos estudantes nas situações de covariação exploradas, articulando-se em seguida os componentes de tais esquemas com o raciocínio covariacional e com aspectos relacionados com a transposição informática descritos em análises *a priori* realizadas no planejamento do experimento. Tal articulação permitiu responder às questões de pesquisa.

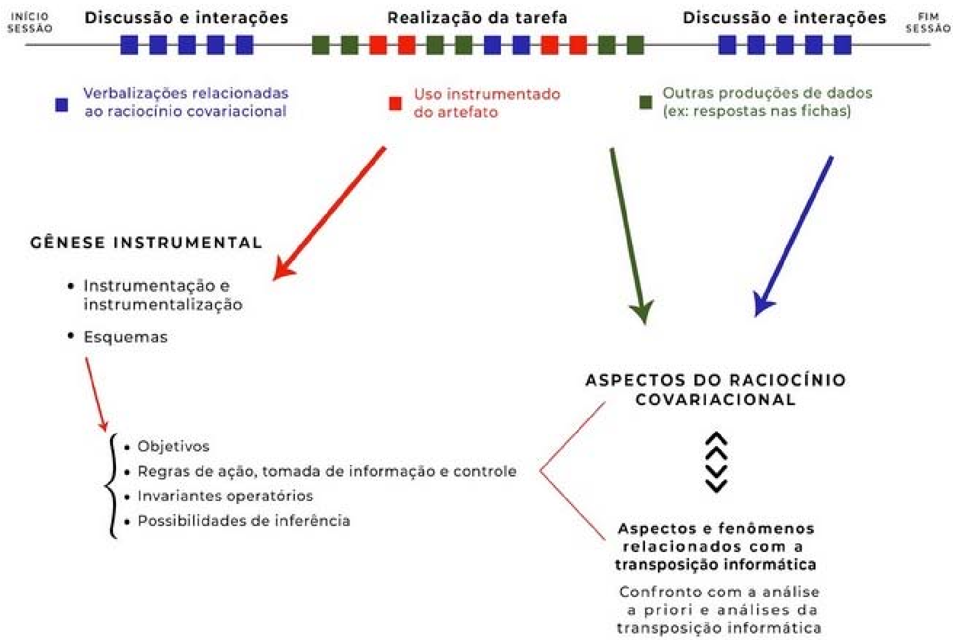


Figura 8. Diagrama da análise microgenética dos dados
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 95)

4. Análise e Discussão dos Resultados

Dividimos a análise e discussão dos resultados em duas partes: na primeira, analisamos e discutimos como o raciocínio covariacional dos estudantes se desenvolveu no contexto do uso instrumentado do GeoGebra; na segunda parte, discutimos as relações entre os efeitos desse uso instrumentado no raciocínio covariacional e os aspectos da transposição informática da covariação nos materiais concebidos no GeoGebra. A análise e a discussão são apresentadas por um recorte dos dados selecionados na análise microgenética, articulando-se as transcrições das falas e das ações dos estudantes no uso do GeoGebra e do registro em imagem da tela obtido na videogravação, bem como as outras fontes de dados. Além disso, são enfatizados os eventos que apontaram os componentes dos possíveis esquemas de ação instrumentada do GeoGebra para explorar a covariação e a mobilização do raciocínio covariacional subjacente a esses esquemas.

4.1. *Raciocínio covariacional e o uso instrumentado do GeoGebra*

Embora os resultados de Eric, Alice e Louise tenham aspectos comuns, suas gêneses instrumentais particulares e os seus conhecimentos de função os levaram a desenvolver o seu raciocínio covariacional de formas sutilmente distintas com o uso do GeoGebra.

Entretanto, nas primeiras situações, as descrições dadas pelos estudantes em geral da variação em y conforme variaram a variável em x restringiram-se a uma coordenação grosseira dos valores, ao limitaram-se ao crescimento ou decrescimento de uma variável em relação à outra, mesmo quando a relação envolvia uma variação variável:

Estudante do curso: *Função decrescente pois quando x cresce m(x) decresce.* (referindo-se à variação na função quadrática na situação 1). (Silva, 2022, p.184)

Quando as suas descrições faziam referência à variação variável, elas foram feitas na maioria das vezes mobilizando o significado de velocidade variável, nem sempre relacionando a variação em y com a variação em x, ou seja, uma pré-coordenação de valores, com uma imagem de variação assíncrona das variáveis:

Alice (situação 1): *...Só que eu acho que o gráfico dessa vez não vai ser uma reta, porque em alguns pontos ó… o m(x), a velocidade dele, que ele vai decrescendo é menor do que em outros pontos…* (Silva, 2022, p.196)

Uma dificuldade importante surgiu na interpretação da variação negativa, ou seja, a variação cujo valor é negativo ($\Delta y < 0$) a depender dos incrementos e das diferenças resultantes nos valores das variáveis. Na situação 1, ao abordar a função quadrática $m(x)$ (Figura 9) cujas variáveis foram representadas por segmentos dinâmicos nos eixos x e y, sem acesso visual ao gráfico, Louise descreveu a variável $m(x)$ como aumentando a sua variação conforme x crescia, embora tal variação fosse, pelo contrário, decrescente:

Louise (situação 1): *... ao passo que a variável x começa a crescer, m(x) aumenta a sua variação...* (Silva, 2022, p.207)

O equívoco de Louise foi representativo de outras dificuldades que os estudantes, de forma geral, apresentaram com relação à variação decrescente e negativa; a representação da variação por pontos e segmentos dinâmicos pode ter tido um papel importante como uma restrição do artefato para que este tipo de equívoco ocorresse, visto que os valores negativos e decrescentes da variável são representados por segmentos dinâmicos de comprimento crescente.

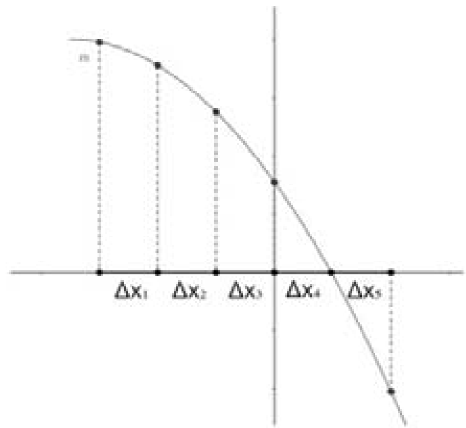


Figura 9. Gráfico da função *m*(*x*)
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 208)

Figura 10. Esquema de Eric: acréscimos constantes em *x*
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 191)

O desenvolvimento de um raciocínio covariacional mais refinado, isto é, em um nível mais elevado em termos do quadro de níveis Thompson e Carlson (2017) foi relacionado ao desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada de ferramentas do GeoGebra que permitiram: (i) coordenar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*; (ii) coordenar a variação variável em *y* em função de *x* e Δx; (iii) articular as ferramentas de coordenação da covariação com as representações das funções de forma dinâmica e simultânea.

A coordenação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x* permitiu aos estudantes quantificar a covariação e superar dificuldades para interpretar a variação variável e a variação negativa, o que os permitiu progredir a uma coordenação da covariação contínua.

Como exemplo, o esquema de Eric, cuja regra de ação foi variar *x* por acréscimos constantes guiando-se pelas marcações no eixo *x* e observar a variação correspondente em y, envolveu o uso instrumentado das marcações nos eixos (Figura 10) para coordenar a variação em *y* com o valor de Δx fixo; já o uso instrumentado da ferramenta de variações sucessivas (Figura 11) permitiu o suporte à coordenação contínua da covariação por permitir variar *x* de forma dinâmica e visualizar as variações sucessivas em *y* e Δy.

A Tabela I compara as descrições dadas no questionário aplicado antes do experimento e, posteriormente, na entrevista final. Em ambas as etapas, os estudantes foram solicitados a descreverem o comportamento das variáveis de uma função representada pelo gráfico da Figura 12. As descrições de Eric e Alice evoluíram para uma coordenação da covariação contínua com a interpretação da variação variável, em vez de apenas descrições em termos de crescimento e decrescimento; já Louise mostrou uma evolução no seu esquema de leitura do gráfico, porém ainda mostrou uma interpretação equivocada da taxa de variação.

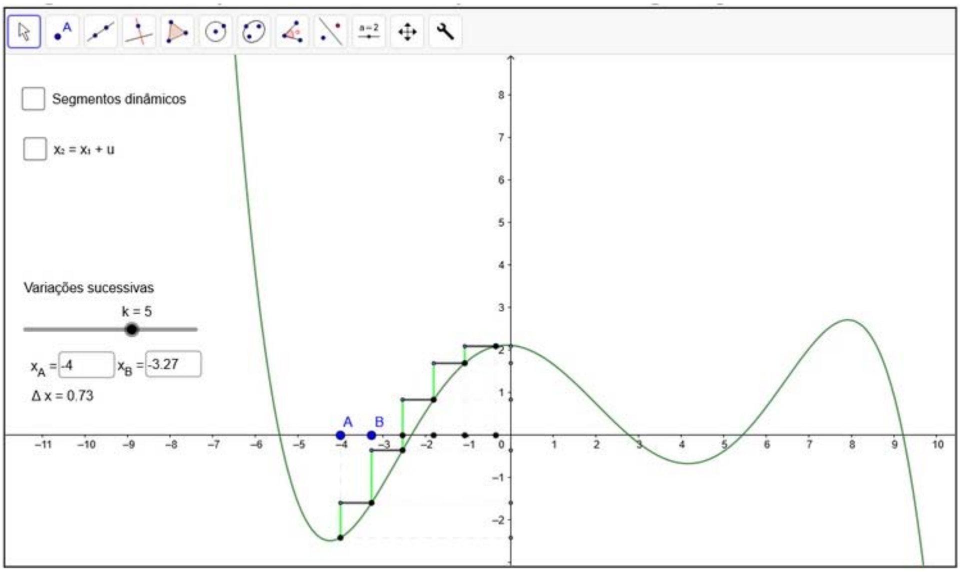


Figura 11. Mobilização da ferramenta de variações sucessivas, na segunda questão da entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 153)

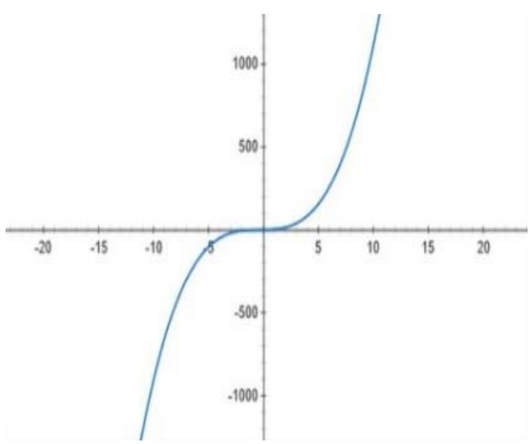


Figura 12. Gráfico do questionário revisitado na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 281)

TABELA I
Evolução na interpretação da variação variável

Questionário	*Entrevista*
À medida que a variável independente cresce, a variável dependente cresce também (a função é estritamente crescente). (Eric) (Silva, 2022, p. 164)	Eu basicamente disse que a função ela é crescente (…) Eu poderia dizer com mais detalhes de *como estaria ocorrendo esse crescimento* (...) nesse primeiro trecho que é que os valores de x (são) menores que zero (...) *a taxa de variação é positiva, mas ela é decrescente*(...) Foi uma observação que eu não fiz no começo porque eu não tinha essa compreensão e, eu comecei a prestar atenção nisso depois do curso(...) para valores de x maiores que zero, *a taxa de variação continua positiva, só que agora ela é (...) crescente.* (Eric) (Silva, 2022, p. 282)
É uma função de grau 3, onde, para cada X existe apenas um Y correspondente, de forma que o conjunto imagem é todo R. À medida que X cresce Y cresce, à medida que X diminui (decresce) Y diminui. (Alice) (Silva, 2022, p. 165)	*Eu falaria em relação à variação da variação* (...) Vindo da esquerda do gráfico(...) na parte negativa do x eu diria que aí a gente tem uma *variação decrescente* até esse ponto de inflexão que é mais ou menos na origem, e a partir daí a gente tem uma *variação crescente.* (Alice) (Silva, 2022, p. 289)
Para X positivo a função é crescente, para X negativo a função é decrescente. (Louise) (Silva, 2022, p. 164)	A gente pode acrescentar aqui, algo sobre a *taxa de variação,* né? … Eu creio que aqui a taxa de variação é sempre crescente… e na parte que tá positiva, também vai ser uma *taxa de variação positiva, porque ela tá aumentando né?* (Louise) (Silva, 2022, p. 296)

A coordenação da variação variável em y em função de x e Δx permitiu interpretar a taxa de variação $\Delta y/\Delta x$ em função de x. A gênese instrumental da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx (Figura 13) teve um papel fundamental para a progressão no raciocínio covariacional, sobretudo de Eric, que após ter descrito detalhadamente como as variáveis variaram no gráfico revisitado na entrevista, destacou o papel da gênese instrumental desta ferramenta para o desenvolvimento do seu raciocínio covariacional:

Eric (entrevista): *Então, todas tiveram um grande impacto pra esse tipo de raciocínio, mas sem dúvida quando eu olho para o gráfico eu to vendo aqueles segmentos de reta que variavam, aqueles que quando você construía aqueles segmentos que mostravam o delta y e o delta x e à medida que iam avançando a gente conseguia ver o delta y, geralmente tava la de uma cor diferente, e aí ele aumentava, ele diminuía, então é aquilo que eu enxergo quando tento fazer essa análise, então acho que era a* *construção daqueles segmentos que você definia pra o delta y e pra o delta x, geometricamente.* (Silva, 2022, p.282)

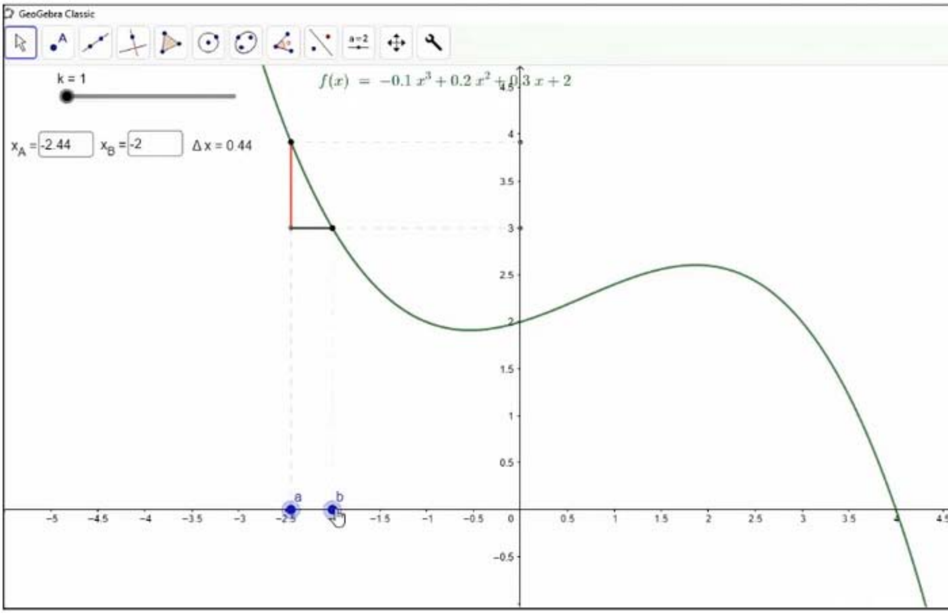


Figura 13. Ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 222)

A possibilidade do GeoGebra de permitir a conexão simultânea entre o gráfico e as ferramentas descritas acima permitiu aos estudantes o uso instrumentado dessas ferramentas para interpretar os seguintes aspectos do gráfico por uma coordenação da covariação contínua: intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão.

No início do experimento, os estudantes tiveram dificuldades para interpretar estes aspectos em termos da covariação entre y e x (por exemplo, quando a concavidade é voltada para cima, a taxa de variação é crescente), porém o uso instrumentado das ferramentas 'variação dinâmica entre Δy e Δx'(exibida na Figura 13) e 'variações sucessivas'(exibida na Figura 11) conectadas ao gráfico contribuiu para coordenar a covariação contínua entre Δy e x em cada aspecto da forma do gráfico, permitindo uma interpretação covariacional desses aspectos.

Esta progressão é mostrada nos seguintes trechos, que revelam regras de ação e tomada da informação dos esquemas de Eric e Alice (descritas entre parênteses) e os aspectos do seu raciocínio covariacional sobre a forma do gráfico mobilizados e inferidos nesses esquemas, revelados nas suas falas enquanto manipulam o GeoGebra:

Eric (situação 2): (Retorna x_A e x_B a um pouco antes do x do ponto de inflexão e varia os valores até um pouco depois do x do ponto de inflexão. Observa a variação em Δy na planilha. Repete o procedimento duas vezes.) *E aí tá nessa região aqui de mudança de concavidade. Começa a aumentar, aumentar... Então, onde tá aqui esse ponto, na mudança da concavidade, o Δy que estava diminuindo, ele passa a aumentar, ele começa a crescer.* (Silva, 2022, p. 229)

Eric (situação 2): *A taxa de variação é decrescente quando a concavidade está voltada para baixo e crescente quando a concavidade está voltada para cima. Nos pontos de máximo e de mínimo a taxa de variação se anula e nos pontos de inflexão a taxa de variação deixa de ser decrescente para se tornar crescente e vice-versa.* (Silva, 2022, p. 229)

Alice (situação 2): (Varia x_A e x_B do início até o final do intervalo exibido na tela, com uma pequena pausa próximo ao $x_{\text{INFLEXÃO}}$. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy. Repete o procedimento algumas vezes) *Então aqui, vamos olhar as concavidades, tem concavidade voltada para cima aqui, concavidade voltada para baixo aqui. E como a gente já tinha visto, onde a concavidade é voltada para cima, a gente tem uma variação crescente em Δy. Ela é crescente... E, quando a concavidade é voltada pra baixo, ela passa a ser decrescente. Essa mudança acontece mais ou menos por aqui, que é onde tem um ponto de inflexão, então esse ponto de inflexão é o responsável por mudar a concavidade, alterar concavidade, né? se a gente tem uma concavidade voltada para cima, ela passa a ser voltada para baixo... e ocorre essa mudança. A variação em Δy vem sendo crescente até esse ponto de inflexão, onde há a mudança da concavidade e a partir daqui ela passa... a variação passa a ser decrescente.* (Silva, 2022, p. 239)

Alice (situação 2): (Varia x_A e x_B próximo aos valores do x_{MIN}. Repete o procedimento algumas vezes, nos dois sentidos. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy). *Deixa eu ver mais o quê... os pontos de máximo e mínimo… No ponto de... nesse ponto de mínimo, ele... Se aproxima, né? Se aproxima de zero no ponto de mínimo, e por aqui acontece a mudança de sinal. Ele vem crescendo, só que com o sinal negativo e mais ou menos por aqui tem essa mudança de sinal. Continua crescendo só que o sinal se altera e passa a ser positivo. Então eu diria que esse ponto de mínimo é o responsável por alterar o sinal dessa variação …* (Silva, 2022, p. 239)

Também foram observadas particularidades no raciocínio covariacional no caso de cada estudante nas situações de esboço de um gráfico para representar a covariação entre as variáveis.

Em uma situação na qual foi solicitado aos estudantes representarem graficamente a taxa de variação $\Delta y/\Delta x$ em função de x, considerando-se o valor de Δx como pequeno o suficiente para simular a taxa instantânea, os esquemas de Alice e Louise (principalmente) basearam-se na correspondência entre valores de x

e da taxa de variação e envolveram uma sequência de regras como: (i) calcular os valores das variáveis, (ii) definir pontos no gráfico e (iii) traçar uma curva aproximando a trajetória dos pontos. Essas regras revelaram a influência dos esquemas baseados em uma abordagem de função como correspondência entre valores e em um pensamento da forma estática (Moore & Thompson, 2015), geralmente desenvolvidos no ambiente papel-e-lápis. As Figuras 14 e 15 exibem os gráficos esboçados por Louise e Alice, respectivamente.

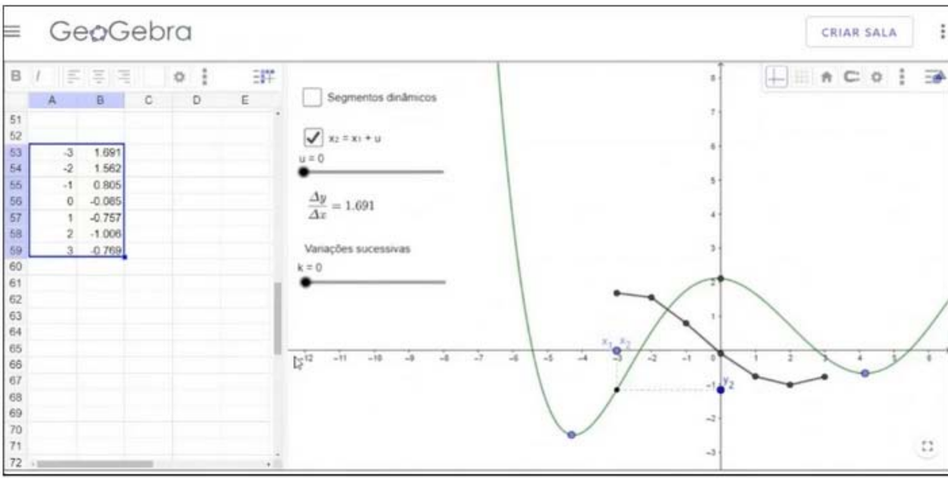


Figura 14. Gráfico esboçado por Louise na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 301)

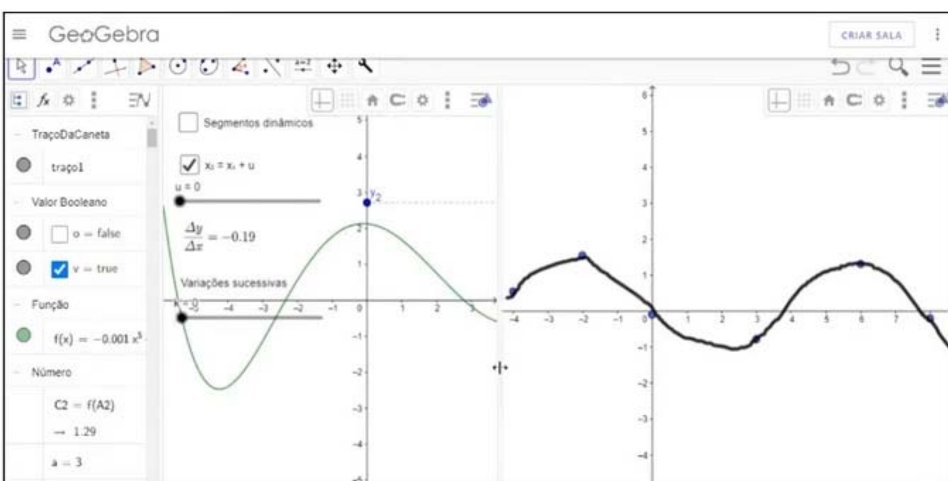


Figura 15. Gráfico esboçado por Alice na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 295)

Por outro lado, embora os esquemas de Eric também tenham envolvido alguns dos aspectos mobilizados pelas suas colegas, ele foi além ao integrar aspectos de um raciocínio covariacional no seu esquema para esboçar o gráfico. Eric mobilizou a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy para visualizar a forma como a taxa de variação variou em cada intervalo e em seguida traçou curvas suaves e côncavas para cima ou para baixo, em função do comportamento da taxa de variação em cada intervalo.

Eric não recorreu à definição de pares ordenados dos valores de x e da taxa de variação para traçar o gráfico, o que sugere que aqui ele se baseou em uma imagem da covariação contínua em cada intervalo em vez de usar esquemas baseados na correspondência entre valores. O gráfico traçado por Eric é mostrado na Figura 16.

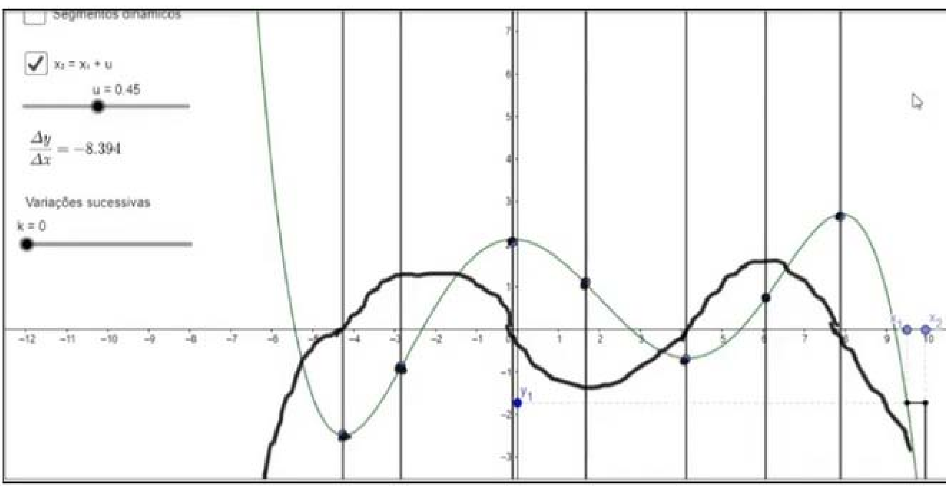


Figura 16. Gráfico esboçado por Eric na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 288)

Observou-se também que o fato de os estudantes terem interpretado aspectos como a variação variável nas situações de descrição da covariação não implicou que esse aspecto fosse mobilizado também nas situações de esboçar o gráfico como uma curva suave côncava para cima ou para baixo. Este resultado reforçou que houve a prevalência dos esquemas baseados na correspondência entre valores no ambiente papel-e-lápis e mostrou a necessidade de mais desenvolvimento dos esquemas baseados na perspectiva da covariação e na mobilização das possibilidades do meio dinâmico computacional.

Na entrevista, cada estudante também foi questionado sobre qual ferramenta contribuiu mais para o desenvolvimento do seu raciocínio covariacional. Eric destacou o papel da ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy, o que mostrou que o seu raciocínio covariacional envolveu uma imagem em desenvolvimento da coordenação da covariação contínua suave. Alice destacou a representação numérica tabular da planilha, a qual ela considerou útil para visualizar os valores das variáveis; a sua escolha reforçou a forma como ela usou o GeoGebra durante o experimento, com um raciocínio covariacional segmentado e apoiado nas representações que enfatizam os valores das variáveis. Já Louise não destacou uma ferramenta específica e usou o GeoGebra sobretudo para visualizar gráficos e valores das variáveis, com um menor uso das ferramentas para quantificar a covariação, o que parece ter influenciado nas suas dificuldades em interpretar a variação variável e progredir para uma coordenação da covariação contínua.

4.2. *Relações com a transposição informática da covariação nos materiais concebidos no GeoGebra*

O papel de aspectos da transposição informática no uso instrumentado do GeoGebra e consequentemente na forma como o raciocínio covariacional dos estudantes progrediu destacou-se nos resultados.

Como exemplo, a coordenação da covariação entre as variáveis foi consideravelmente influenciada pelo uso instrumentado de ferramentas que permitiram coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x. Neste sentido, destacamos o papel de duas ferramentas: (i) as marcações nos eixos x e y, cujo uso instrumentado por Eric permitiu a inferência da proporcionalidade na função afim; (ii) a ferramenta de variações sucessivas, cujo uso instrumentado pelos estudantes permitiu, entre outras contribuições, quantificar a variação e superar dificuldades em interpretar a variação variável e a variação negativa. A transposição informática nessas ferramentas envolveu uma representação da conexão entre a medida da variação em y e uma unidade de medida da variação respectiva em x.

Também foi destacado o papel das ferramentas que permitiram a coordenação da covariação contínua, como a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy. Ao conectar dois valores da variável em x com os respectivos valores em y e permitir a variação dinâmica destes valores, esta ferramenta permitiu um suporte à coordenação dos valores de Δx e Δy, com Δx fixo. O papel da variação dinâmica e da conexão simultânea das representações foi um princípio de *design* fundamental em todos os materiais concebidos neste estudo. Tais características permitiram explorar os aspectos da covariação revelados por cada representação, interpretar os aspectos da forma do gráfico covariacionalmente, construir relações entre o comportamento do gráfico da função e o gráfico da sua taxa de variação, bem como entre o modelo algébrico e a variação da função.

Do ponto de vista das restrições geradas no uso do GeoGebra, destacamos o papel da representação das variáveis por pontos dinâmicos e a representação da variação Δy por segmentos dinâmicos, que envolve a representação da diferença entre dois valores de uma variável por um segmento cujo comprimento varia conforme estes valores mudam, mas que não pode assumir um significado de valor negativo. Embora essa representação tenha sido associada ao suporte à coordenação e à quantificação da variação, foi no contexto da sua exploração que surgiram equívocos relacionados à variação negativa, como: (i) a associação de um ponto dinâmico que representa uma variável cujos valores são negativos e cada vez menores com o aumento da velocidade do ponto, produzindo o equívoco de uma variação crescente, em vez de decrescente; (ii) a associação entre a variação negativa decrescente e um segmento de comprimento cada vez maior para representar tal variação, produzindo um equívoco de mesma natureza que o anterior.

Ao considerar tais contribuições e restrições e o fato de que algumas ferramentas exploradas pelos estudantes foram concebidas pelos autores especificamente para este estudo, emergiu a necessidade de distinguir a origem dos fenômenos gerados pelo uso de ferramentas que não foram originalmente implementadas pelos *designers* do GeoGebra, mas que foram implementadas em um processo de *design* secundário realizado por professores e pesquisadores que concebem materiais no *software*, criando novos objetos e significados (no nosso caso, os segmentos dinâmicos para representar a variação, por exemplo). Propomos caracterizar tal processo como uma transposição informática de segunda ordem.

5. Conclusões

Neste artigo destacamos resultados de um estudo que teve por objetivo investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. Foi realizado um estudo de casos múltiplos das respectivas gêneses instrumentais de três licenciandos em Matemática que exploraram situações de covariação em função com o suporte de materiais concebidos no *software* GeoGebra. Os resultados destacados apontam as contribuições e restrições do uso instrumentado do GeoGebra no raciocínio covariacional dos estudantes.

Por um lado, algumas das contribuições envolveram: (i) a progressão de uma coordenação da covariação meramente em termos do crescimento ou decrescimento das variáveis para uma coordenação da covariação contínua, por meio do suporte de ferramentas que permitiram a quantificação e a coordenação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x* e das ferramentas que permitiram a coordenação dinâmica da covariação contínua; e (ii) a mobilização do raciocínio covariacional para interpretar aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo e de mínimo e pontos de inflexão com o suporte da conexão dinâmica e simultânea entre essas ferramentas e as representações de função, como o gráfico, o modelo algébrico e a planilha.

Já as restrições destacadas foram: (i) os conflitos na interpretação da variação negativa no contexto do uso das ferramentas que envolviam a representação da variação por segmentos dinâmicos; (ii) a influência e prevalência de esquemas baseados na correspondência entre valores, no ambiente papel-e-lápis e em um pensamento da forma estática nas situações de esboçar o gráfico, o que limitou a mobilização do raciocínio covariacional no esboço do gráfico.

A relação desses resultados com a transposição informática destacou as possibilidades de representar a covariação de forma dinâmica, conectando-se diferentes representações, além das características das ferramentas para coordenar e quantificar a covariação; por outro lado, foram destacadas as restrições da representação da variação por pontos e segmentos dinâmicos. O *design* secundário dos novos objetos concebidos para representar a variação nos materiais do estudo levou à emergência da ideia de uma transposição informática de segunda ordem.

A visão de uma não-neutralidade das tecnologias computacionais na aprendizagem nos permitiu ver que, para entender mais claramente o papel do uso desses artefatos no desenvolvimento conceitual, é necessário levar em conta aspectos como: (i) as possibilidades e as restrições dos artefatos e as formas pelas quais esses aspectos influenciam o desenvolvimento de esquemas que mobilizam o conceito em jogo; (ii) os diferentes usos instrumentados e as gêneses instrumentais; (iii) os aspectos matemáticos da situação; (iv) o papel do professor como *designer* de materiais didáticos computacionais e guia das orquestrações instrumentais; entre outros aspectos.

Referências

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2017) Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *Bolema*, 31(58), 777-798. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274. https://doi.org/10.1023/A: 1022103903080.

Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, & N. Balacheff (Eds.). *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364-370). La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 9-42. https://telearn.hal.science/hal-00190648

Carlson, M., Sally Jacobs, Coe, E., Sean Larsen, & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378.https://doi.org/10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding.* (Vol. 2, pp. 55–73). University of Wyoming. https://wilkins.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/2012cqr.pdf

Clement, J. (2000) Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. In Lesh, R. & Kelly, A. *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Lawrence Erlbaum.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 135–164. https://doi.org/10.1007/bf012 73661

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. https://doi.org/10.1080 /10986065.2016.1183090

Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. (2002). Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada. In L. M. Carvalho & L. C. Guimarães (Eds.), *História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* (Vol. 1, pp. 153-164). http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf

Gitirana, V., & Lucena, R. (2021). Orquestração instrumental on-line. *Educação Matemática Pesquisa: Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, *23*(3), 362–398. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p362-398

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Taylor & Francis Group.

Johnson, H. L., & McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(3), 299–316. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9799-7

Kujala, S., & Mäntylä, M. (2000). Studying users for developing usable and useful products. In *Proceedings of 1st Nordic Conference on Computer-Human Interaction*. https://www.nordichi.net/Proceedings2000/Papers/06Study.pdf

Lagrange, J-B. (2014) A functional perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. *The International Journal For Technology in Mathematics Education*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01740456.

Lagrange, J., & Psycharis, G. (2014) Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: a double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 255–286 https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2005). *A Matemática do Ensino Médio*. (8ª ed., Vol. 1). SBM.

Malik, M. A. (1980) Historical and pedagogical aspects of the definition of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11, (4), 489-492. https: //www.tandfonline.com/doi/abs/10.10 80/0020739800110404.

Meira, L. (1994) Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas psicológicos*, 2(3), 59-71. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X1994000300007 &lng=pt&nrm=iso

Moore, K. C. (2014) Quantitative reasoning and the sine function: the case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138. https://doi.org/10.5951/jresemathedu c.45.1.0102

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015) Shape thinking and students' graphing activity. In *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education*. (pp. 782-789). https://pat-thompson.net/PDFversions/2015MooreShapeThinking.pdf

Ndlovu, M., Wessels, D., & De Villiers, M. (2011) An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad. *Pythagoras*, 32(2), 1-15. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32 i2.52

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin

Silva, C. T. J. (2022). *O uso de um artefato computacional como suporte ao raciocínio covariacional em função* (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Silva, C. T. J., & Gitirana, V. (2023). Abordagem covariacional de função: aspectos do ensino, aprendizagem e possibilidades das tecnologias digitais. *Zetetike*, *31*, e023026–e023026. https://doi.org/10.20396/zet.v31i00.8664258

Thompson, P. W. (1994) Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017) Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 95-111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics. https://pat-thompson.net/PDFversions/2016ThompsonCarlsonCovariation.pdf

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 25 (1), 91-138. https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathem atiques-necessite-des-orchestrations/

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83-94. https: //doi.org/10.1159/000202727.

Yin, R. K. (2015). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* (5ª ed). Bookman.
Zengin, Y. (2018) Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 311–333. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5.

Autores

César Thiago Silva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil.
cesarthiago.silva@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0203-8542

Verônica Gitirana. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, Brasil.
veronica.gitirana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2594-4203

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame),* asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

– Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
– Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
– Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
– Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
– Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

– *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

- *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
- *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
- *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Los manuscritos se envían a través del gestor editorial de la Relime, durante los periodos indicados en la página web, y deben seguir las Normas de publicación de la revista.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 27, Número 1

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Marzo de 2024
Impresión bajo demanda