EDITORIAL

In memoriam
Eugenio Filloy y François Pluvinage
Ricardo Cantoral

ARTÍCULOS

Relaciones entre pensamiento proporcional
y pensamiento probabilístico
en situaciones de toma de decisiones
Andrea Vergara, Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó

Esquemas de demonstração para proposições de
Álgebra Linear com valor lógico verdade
Patrícia Damas Beites, Maria Cecília Rosas Pereira
Peixoto da Costa, Maria Luísa Frazão Rodrigues Branco

Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del
pensamiento estocástico: retos para su enseñanza
y en la formación de profesores
M. Pedro Huerta

Analyse des interactions dans une classe où les élèves
présentent des difficultés langagières : l'influence
des pratiques d'une enseignante sur l'activité
mathématique des élèves
Raquel Isabel Barrera-Curin, Laurie Bergeron, Audrey Perreault

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

RELIME 23-1
9 771665 243002 02301

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 23, Núm. 1, marzo 2020

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 23, Núm. 1, 2020

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN
Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Editora Asociada: GISELA MONTIEL
Editora: DANIELA REYES

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
MÉXICO

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 23, Núm.1, marzo, 2020. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2020 Impreso en México

Volumen 23 – Número 1 – 2020

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2020

Volumen 23 Número 1 Marzo de 2020

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 23, Número 1, se terminó de imprimir en marzo de 2020, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

IN MEMORIAM
Eugenio Filloy y François Pluvinage

Ricardo Cantoral
Departamento de Matemática Educativa,
PIDPDM, Cinvestav-IPN México

Genèvieve Pluvinage me dijo telefónicamente esta mañana que Eugenio Filloy invitó a François Pluvinage a México para apoyar algo nuevo, la naciente Matemática Educativa; ahora ambos se fueron juntos, *c'est incroyable*!

Ambos dejaron, a su manera, un legado y una manera de entender nuestro quehacer que, en formas distintas, permeará por años a nuestra comunidad. Un aspecto que les caracterizaba era su preocupación por colocar a las Matemáticas en el centro de los estudios didácticos, sólo así, consideraban, se trataría de una investigación en Matemática Educativa.

Recuerdo que en la oficina de François Pluvinage en Cinvestav, México, él pidió que su identificador de puerta dijera *Pançhois*, un francofonismo mexicanizado muy original y divertido. Fue sin duda, un incanzable promotor de la Matemática Educativa en Latinoamérica así como de la Didáctica Francesa, a la vez que promovía al Cinvestav en Europa, pero sobre todo su labor se llevó a cabo en México, país del que conocía más que muchos de nosotros y amaba profundamente; él decía con su voz ronca, cuando escuchaba a otro francés opinar sobre temas académicos en nuestras tierras: ah... esos franceses no entienden! Genèvieve recién comentó, "despierto a un lado de Estrasburgo y veo México por todos lados, nuestra historia, las artesanías, las anécdotas y las personas que apreciamos".

Eugenio por su parte, un hombre visionario, fue el principal exponente internacional de la Matemática Educativa mexicana en diversos foros, abrió las puertas de la Secretaría de Educación Pública para nuestra disciplina, impulsó desde la Sociedad Matemática Mexicana acciones para el profesorado de matemáticas y participó en varias reformas nacionales, participó con frecuencia en la Asociación

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 5-6.
DOI: 10.12802/relime.20.2310

de Profesores de Matemáticas, en los congresos internacionales del Psychology of Mathematics Education Group−North American Chapter, en la International Conference of Mathematics Education, en la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, e impulsó desde el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas a la Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa (el antecedente histórico de las Reuniones Latinoamericas de Matemática Educativa).

Un par de semanas atrás, coincidí con Eugenio en Acapulco durante el homenaje que los colegas de la Facultad de Matemáticas de la UAGro brindaron a Carlos Ímaz, en tal ocasión, él refrendó su mirada respecto de la importancia del saber matemático y de la teorización que sobre ello se hiciera. Eugenio fue siempre un tipo generoso y afable, que creó un marco teórico y metodológico para el estudio de fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas al que denominó "Modelos Teóricos Locales" y que se nutrió fuertemente de su interés por la historia de las ideas, marcadamente del Álgebra Escolar.

François por su parte, fue un experto en Didáctica de la Matemática que tuvo un impacto social importante en su país sobre la incipiente investigación de formación de profesores y en el ánalisis teórico de la evaluación en matemáticas, era remarcable su amplia cultura matemática y su capacidad para resolver dilemas. Hacia el final de su vida académica se interesó por la Socioepistemología y no desaprovechaba ocasión para citarla. Aun recuerdo un día cuando de pronto, sin más me dijo, Brousseau decía que cuando se enseña matemáticas, se enseña mucho más que matemáticas, y remató, la *socio*, hace eso.

Ambos fueron colaboradores de Relime, sobre todo a partir de 2008, ya fuese con revisiones rigurosas, consultores con valiosas recomendaciones para su mejora. De hecho, alguna evaluación quedó en curso entre sus escritorios. La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* les rinde tributo, sabedores que Relime se ha posicionado en el "ranking mundial" gracias a muchas iniciativas y colegas, pero debemos reconocer que ellos en particular jugaron, a su manera, un papel medular.

Dos líderes académicos que desde sus trincheras y con su generosidad, supieron guiar la nave en tiempos inciertos. La nao va ...

Ricardo Cantoral
Huitzilac, Mor. México

Andrea Vergara, Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó

RELACIONES ENTRE PENSAMIENTO PROPORCIONAL Y PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN SITUACIONES DE TOMA DE DECISIONES

Relationships between proportional thinking and probabilistic thinking in decision-making situations

RESUMEN

Tomar decisiones es un acto cotidiano en el ser humano, a mayor incertidumbre más difícil es decidir. A partir de una situación de aprendizaje, consistente en decidir entre dos juegos aleatorios con dados, se estudia la relación entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico, considerando tres estados para el pensamiento proporcional y tres tipos de pensamiento probabilístico. Bajo el enfoque de un estudio de casos instrumental, se analizan las decisiones y argumentos de estudiantes de secundaria chilenos. Los resultados indican que existen relaciones tanto beneficiosas como perjudiciales entre el pensamiento proporcional y el probabilístico, y que las dificultades en la determinación de probabilidades no necesariamente obedecen a la ausencia del uso de proporciones. Se recomienda una enseñanza que considere la argumentación y el aprendizaje del espacio muestral para encauzar el uso de recursos intuitivos.

PALABRAS CLAVE:

- *Pensamiento probabilístico*
- *Pensamiento proporcional*
- *Incertidumbre*
- *Heurística*
- *Toma de decisiones*

ABSTRACT

Making decisions is a daily act in the human being, to greater uncertainty more difficult it is to decide. From a learning situation, consisting of deciding between two random games with dices, the relationship between proportional thinking and probabilistic thinking is studied, considering three states for proportional thinking and three types of probabilistic thinking. Under the focus of an instrumental case study, the decisions and arguments of Chilean high school students are analyzed. The results indicate that there are both beneficial and harmful relationships between proportional and probabilistic thinking, and that the difficulties in determining probabilities are not necessarily due to the absence of the use of proportions. A teaching that considers argumentation and learning of the sample space is recommended to channel the use of intuitive resources.

KEYWORDS:

- *Probabilistic thinking*
- *Proportional thinking*
- *Uncertainty*
- *Heuristics*
- *Decision making*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 7-36.
Recepción: Mayo 6, 2019 / Aceptación: Marzo 18, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2311

RESUMO

Tomar decisões é um ato diário no ser humano, quanto maior a incerteza, mais difícil é decidir. Em uma situação de aprendizado, que consiste em decidir entre dois jogos aleatórios com dados, estuda-se a relação entre pensamento proporcional e pensamento probabilístico, três estados específicos para pensamento proporcional e três tipos de pensamento probabilístico. Sob o foco de um estudo de caso instrumental, são analisados argumentos de estudantes chilenos do ensino médio. Os resultados indicam que existem relações benéficas e prejudiciais entre o pensamento proporcional e o probabilístico, e que as dificuldades na determinação das probabilidades não se devem necessariamente à ausência do uso de proporções. Recomenda-se o ensino que considera a argumentação e o aprendizado do espaço de amostra para canalizar o uso de recursos intuitivos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Pensamento probabilístico*
- *Pensamento proporcional*
- *Incerteza*
- *Heurística*
- *Tomada de decisão*

RÉSUMÉ

Prendre des décisions est un acte quotidien de l'être humain, plus l'incertitude est grande est plus difficile décider. A partir d'une situation d'apprentissage, consistant à choisir entre deux jeux aléatoires avec dés, on étudie la relation entre la pensée proportionnelle et la pensée probabiliste, considérant trois états spécifiques de la pensée proportionnelle et trois types de pensée probabiliste. Sous l'approche d'une étude de cas instrumentale, on analyse les décisions et les arguments des lycéens chiliens. Les résultats indiquent qu'il existe des relations à la fois bénéfiques et néfastes entre la pensée proportionnelle et probabiliste, et que les difficultés à déterminer les probabilités ne sont pas nécessairement dues à l'absence d'utilisation des proportions. Nous recommandons un enseignement qui tient compte de l'argumentation et l'apprentissage de l'espace échantillon afin de canaliser l'utilisation des ressources intuitives.

MOTS CLÉS:

- *Pensée probabiliste*
- *Pensée proportionnelle*
- *Incertitude*
- *Heuristique*
- *Prise de décision*

1. Introducción

El pensamiento humano se rige por dos sistemas, uno racional, lógico, deductivo, estructurado y consciente; y otro, automático, práctico, intuitivo, emocional e inconsciente (Kahneman, 2012). Desde estas ideas, toda expresión de pensamiento tiene una base racional y otra intuitiva. No obstante, la intuición ha sido uno de los aspectos más complejos de abordar en su relación con la construcción de conceptos probabilísticos (Gandhi, 2018). Al respecto, existe una temática abierta en situaciones contraintuitivas, en que la base racional se opone a la base intuitiva, y el vínculo entre el pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico es difuso. Con el fin de abordar la relación entre dichos pensamientos, este estudio considera al razonamiento como la manifestación del sistema racional, a la intuición como la manifestación del sistema intuitivo, y al pensamiento como la coordinación entre ambos.

Hace más de 40 años las dificultades asociadas a la presencia de intuiciones en el pensamiento probabilístico han constituido un tema de interés. Fischbein (1975) es quien inicia la determinación de los tipos de intuiciones asociadas al desarrollo del pensamiento probabilístico. Actualmente, se estudia la influencia de la intuición sobre el razonamiento probabilístico, especialmente en contextos en los que es necesario elaborar juicios y realizar elecciones en juegos que involucran incertidumbre (e.g., Engel y Orthwein, 2018; Gandhi, 2018).

La noción de incertidumbre es amplia e incluye una gran variedad de fenómenos asociados a la aleatoriedad, y cada vez que existe necesidad de enfrentar situaciones que presentan incertidumbre se activa el pensamiento probabilístico para medir qué tan incierta es una situación (Pratt y Kazak, 2018). Enfrentar este tipo de situaciones demanda una enseñanza escolar enfocada en el desarrollo de un pensamiento probabilístico que contribuya a la formación del ciudadano crítico del siglo XXI, en que el estudio de la probabilidad proporcione herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre.

En relación a la enseñanza de la probabilidad, las pruebas internacionales proponen que estudiantes de 15 años puedan llegar a convertirse en ciudadanos capaces de emitir juicios y tomar decisiones bien fundadas (OECD, 2016). Particularmente en Chile, las bases curriculares para la enseñanza secundaria, postulan respecto de la probabilidad, que todos los estudiantes "estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; […] en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015, p. 100). Así, aunque el currículo chileno establece objetivos de aprendizaje en torno a la probabilidad para estudiantes de 12 a 15 años, no propone enfrentar problemas en escenarios de incertidumbre como un medio para construir significados.

Por otra parte, las relaciones conceptuales entre lo proporcional y la probabilidad son exiguas en el currículo chileno. Si bien se contempla que los estudiantes sean capaces de explicar probabilidades de eventos, a través de fracciones, razones y porcentajes (MINEDUC, 2015, p. 109), la acción de expresar una probabilidad como fracción o razón no implica, por sí sola, el uso de proporciones. Sin embargo, los conceptos de fracción y razón son parte de las mismas estructuras cognitivas que permiten pensar en proporciones, a saber, las estructuras multiplicativas (Cf., Vergnaud, 1997). El cálculo de probabilidades no es suficiente para que emerja pensamiento proporcional, hace falta que el estudiante tenga la necesidad de comparar, pues la esencia del pensamiento proporcional reside en la comparación de razones entre magnitudes elegidas convenientemente (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016). Una buena forma de promover la comparación de probabilidades es presentando experimentos aleatorios a modo de juegos, que involucren tomar decisiones para ganar por medio de la probabilidad.

Esta investigación tiene como foco las argumentaciones de estudiantes de secundaria, quienes enfrentaron dos experimentos aleatorios con dados y decidieron sobre cuál ofrece mayor oportunidad de ganar en un contexto de juego. Se caracteriza así la relación entre el pensamiento probabilístico, el pensamiento proporcional y la naturaleza de los posibles conflictos entre estos. Para ello, se levanta un marco conceptual que articula la noción de pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016; Vergnaud, 1997) con aquellas características y nociones claves del pensamiento probabilístico (Borovcnik, 2011). De este modo, se busca responder ¿cuáles son las posibles relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico activadas en una situación de juego con dados, que involucra la toma de decisiones en un escenario de incertidumbre?

2. Antecedentes

Las formas en que los seres humanos elaboran conjeturas, concluyen o toman decisiones están determinadas tanto por razonamientos conscientes como por intuiciones inconscientes, aunque estos estén en constante confrontación (Gigerenzer, 2011; Kahneman, 2012). Esta diferenciación no obedece a considerar sólo a los razonamientos como formas de pensar correctas, ya que pueden existir razonamientos erróneos e intuiciones acertadas.

Las heurísticas poseen una base racional y también intuitiva, y pueden entenderse como atajos mentales, estas ayudan a hacer inferencias en situaciones con tiempo limitado, conocimiento limitado y capacidad de cómputo restringida, siendo una de las características de las heurísticas la reducción del procesamiento de información (Hoffrage, Krauss, Martignon y Gigerenzer, 2015). Desde otra mirada, Kahneman y Tversky (1982) estudiaron la emergencia de heurísticas como sesgos sistemáticos de razonamiento en el ámbito de las probabilidades. Otros estudios han reportado la persistencia de sesgos o errores en el razonamiento asociado a la resolución de problemas probabilísticos en estudiantes de primaria y secundaria (e.g., Chiesi y Primi, 2014; Garfield y Ahlgren, 1988). Los sesgos pueden observarse en distintos niveles educativos y se caracterizan por ser difíciles de cambiar, incluso después de procesos adecuadamente intencionados de enseñanza (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018; Chiesi y Primi, 2010; Garfield y Ben-Zvi, 2007).

Debido a las dificultades que tiene la conformación del pensamiento probabilístico, existen diversas perspectivas de su aprendizaje, que incluyen enfoques cognitivos, y también enfoques ecológicos, socioculturales y afectivos, entre otros (Van Dooren, 2014). Asimismo, se ha estudiado cómo opera el razonamiento de la probabilidad en procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre (e.g., Bennett, 2014; Eriksson y Simpson, 2010; Kahneman, 2012), evidenciándose que la relación entre el desarrollo de pensamiento probabilístico y la elaboración de estrategias para decidir en escenarios de incertidumbre es compleja y, a veces, contradictoria (e.g., Bennett, 2014; Kruger, Wirtz y Miller, 2005). Esta relación permite explicar las tensiones posibles entre pensar probabilísticamente y tomar decisiones.

Dada la complejidad que involucra el desarrollo de pensamiento probabilístico, se hace necesaria una enseñanza de la probabilidad a nivel escolar, que permita considerar diversos factores, tales como conceptos, actitudes, contextos, creencias e incluso sentimientos (Gal, 2005). Conceptualmente, la probabilidad se vincula fuertemente con el pensamiento proporcional (Van Dooren, 2014), dado que históricamente la primera definición de probabilidad es concebida como una medida basada en razones[1] (Laplace, 1814). La razón suele entenderse como relación parte-todo y relación entre partes, esta última estudiada por Fischbein y Gazit (1984), quienes reconocieron esta relación como la manera más intuitiva de comparar probabilidades desde los primeros años de escolaridad. Actualmente, persiste la controversia sobre si el pensamiento proporcional contribuye u obstaculiza el desarrollo de pensamiento probabilístico (Pratt y Kazak, 2018) y las posturas varían según si se prescinde o no del cálculo correcto de probabilidades para tomar decisiones en incertidumbre.

Existen posturas opuestas sobre el rol de las proporciones para comparar probabilidades. Por un lado, se defiende el uso de frecuencias absolutas en vez de razones para facilitar la comprensión, pues tanto niños como adultos son mucho más propensos a estimar probabilidades si la información básica es entregada como frecuencia absoluta, sosteniendo que las personas prefieren comparar valores aproximados de las partes, en vez de determinar cada probabilidad, al estilo de la regla de Laplace (Zhu y Gigerenzer, 2006). Por otro lado, se demuestra empíricamente que usando razones es posible mejorar la comprensión formal de la probabilidad a través de adecuados procesos de enseñanza; y que ciertos sesgos cognitivos, como la falacia de la conjunción y la confusión entre causalidad

1 "Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles." (Laplace, 1814, p. 7)

y condicionalidad, persisten a pesar del uso de frecuencias absolutas en la presentación de los problemas probabilísticos (Díaz y Batanero, 2009).

Asimismo, hay estudios que manifiestan una relación beneficiosa entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional. Watson y Shaughnessy (2004) reportan conexiones explícitas entre posibilidades y proporciones al resolver problemas contextualizados en niños de 9 y 10 años, mientras que Martignon (2014) muestra que niños menores de 11 años pueden dar inicio al pensamiento probabilístico desde el razonamiento con proporciones en un contexto lúdico. Sin embargo, otras investigaciones dan cuenta de obstáculos entre el razonamiento basado en proporciones y el desarrollo del pensamiento probabilístico, puesto que la cuantificación de la probabilidad como razón es difícil en sí misma y porque lograr este razonamiento basado en proporciones no supera necesariamente las dificultades propias referidas a la conceptualización de la probabilidad (e.g., Ashline y Frantz, 2009; Bryant y Nunes, 2012).

3. Marco conceptual

A continuación, se presentan elementos conceptuales que permiten construir indicadores suficientes para caracterizar distintas formas en las que se pueden manifestar los pensamientos probabilístico y proporcional en sujetos que deben tomar decisiones comparando experimentos aleatorios con dados.

3.1. *Pensamiento Proporcional*

El pensamiento proporcional concierne a las estructuras multiplicativas como también al concepto específico de función lineal (Reyes-Gasperini, 2016; Vergnaud, 1997). Vergnaud (1997) define a las estructuras multiplicativas como el conjunto de situaciones, cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, junto con el manejo de conceptos y teoremas que permiten analizar estos tipos de situaciones. Los problemas de proporciones que involucran estructuras multiplicativas son de naturaleza compleja porque se apoyan en relaciones entre cuatro magnitudes y devienen en la proporción entre dos variables (Vergnaud, 1983).

Reyes-Gasperini (2016) modela el desarrollo del pensamiento proporcional mediante etapas distintas; inicialmente, existe una situación en la cual debe realizarse una medición sobre dos variables, pero estas no son conmensurables bajo un criterio directo; luego, surge la necesidad de construir una unidad de medida pertinente al contexto; posteriormente, se eligen magnitudes que representan a las variables, vinculándolas intuitivamente para establecer algún tipo de relación; y por último, se realiza una comparación, la cual puede ampliarse a la acción de conmensurar, al argumentar y establecer relaciones de equivalencia. Reyes-Gasperini y Cantoral (2016) sostienen que la raíz epistémica del surgimiento de las proporciones, como relaciones entre magnitudes desde el ámbito de lo variacional, se encuentra en el problema de medir magnitudes inconmensurables, problema que fue enfrentado a través de la comparación.

Para efectos de este estudio, se entiende pensamiento proporcional como las intuiciones y los razonamientos que guían las acciones de relacionar o comparar razones mediante una proporción, implícita o explícitamente, pudiendo ser este cualitativo o bien cuantitativo, según se caracteriza en la Tabla I.

TABLA I
Características y manifestación de los tipos de pensamiento proporcional

	Tipos de Pensamiento Proporcional	
	Cualitativo	*Cuantitativo*
Características	Es aquel que tiene una base intuitiva y permite contextualizar una relación entre magnitudes o cantidades mediante el uso del lenguaje informal. Se caracteriza por estar restringido a situaciones que determinan implícitamente una constante de proporcionalidad positiva.	Es aquel que tiene una base en el razonamiento, permite reconocer relaciones proporcionales de manera numérica y varias propiedades. Se caracteriza por considerar una proporción entre cuatro cantidades y dos magnitudes, de tal modo que la cantidad reporta numéricamente a la magnitud.
Manifestación	Suele expresarse mediante lenguaje informal, utilizando expresiones del tipo "a más - más… a menos-menos…".	Suele manifestarse de distintas maneras, según el tipo de regularidad numérica que se identifique, por ejemplo, expresiones como "si uno aumenta al doble, el otro también".

Nota: adaptado de Reyes-Gasperini y Cantoral (2016).

3.2. *Pensamiento Probabilístico*

Estudios epistemológicos e históricos de la probabilidad han categorizado su tratamiento a través de los enfoques intuitivo, frecuentista, clásico, lógico, tendencial, subjetivo y axiomático (Cf., Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016). También, es posible analizar la información que utiliza una persona para elaborar un argumento probabilístico, considerando dos tipos de información sobre la probabilidad (Borovcnik, 2011). El tipo de información objetivista, que describe la probabilidad recurriendo a algún tipo de garantía cuantitativa expresada de distintas maneras —escala de 0 a 1, fracciones, porcentajes o razones—. Y el tipo de información subjetivista, que usa el conocimiento personal en torno a la ocurrencia de un evento y la valoración cualitativa de esta.

Respecto a la información objetivista, Borovcnik (2011) establece dos tipos: razones de casos equiprobables y frecuencias de un evento en repeticiones idénticas e independientes de un experimento aleatorio dado, ambas requieren de algún mecanismo de cuantificación. Por su parte, la información subjetivista está fuertemente vinculada a afirmaciones que pretenden comunicar con lenguaje informal el grado de verosimilitud de un hecho o evento, mediante expresiones tales como "sin duda", "casi seguro", "tal vez", "tan cierto como", entre otras.

En base a lo anterior se han considerado tres tipos de pensamiento probabilístico, los que se caracterizan en la Tabla II.

TABLA II

Características y manifestación de los tipos de pensamiento probabilístico

	Tipo de Pensamiento Probabilístico		
	Basado en información objetivista laplaciana	*Basado en información objetivista empírica*	*Basado en información subjetivista interpretativa*
Características	Evoca un conjunto de referencia a modo de espacio muestral, pero no necesariamente un conjunto de eventos elementales; y ocupa la definición laplaciana de la probabilidad, esto es, "sólo una razón cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles" (Laplace, 1814, p. 7).	Toma en cuenta los datos cuantitativos basados en la experiencia propia o de otros, y comunicable por medio de frecuencias de eventos. Ocupa la experimentación como fuente de validación, sin considerar necesariamente la estabilización de las frecuencias relativas para un gran número de ensayos.	Recurre a las creencias personales frente a la incertidumbre, y su base es más intuitiva que racional. Recurre a información cualitativa de diversas fuentes, con el propósito de facilitar y agilizar la toma de decisiones.

Manifestación	Expresa la probabilidad como una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia, la que puede ser representada de varias maneras, como decimal, fracción, razón o porcentaje.	Expresa la probabilidad como frecuencia absoluta o relativa, comparando número de casos favorables con desfavorables o favorables con totales, desde el registro de la ocurrencia de los eventos.	Expresa estimaciones en lenguaje informal de las posibilidades de los eventos, las que se realizan sin comunicar un resultado numérico y expresadas como expectativas o creencias.

Nota: adaptado de Borovcnik (2011).

4. Metodología

Esta investigación se enmarca en un paradigma cualitativo-interpretativo, llevándose a cabo mediante un estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 2007). La unidad de análisis son los argumentos escritos de los sujetos sobre su elección entre dos experimentos aleatorios con dados, lo cual permite comprender en profundidad tanto la relación entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional como la naturaleza de los posibles conflictos entre estos.

4.1. *Casos y criterio de selección*

Los sujetos partícipes fueron 54 estudiantes, 30 hombres y 24 mujeres, del grado 11 (16 a 17 años de edad) de dos cursos de un establecimiento educacional mixto de secundaria de la región de Valparaíso de Chile, clasificado en el grupo socioeconómico medio alto según la Agencia de Calidad de la Educación, que se encontraban en la categoría de desempeño alto[2], de acuerdo a los resultados obtenidos en el grado anterior correspondientes al año 2017. Estos cursos participaron de una secuencia de cuatro clases, diseñadas para la promoción del pensamiento probabilístico, a través de procesos de toma de decisiones. Esta escuela fue elegida por resultar accesible a los investigadores y tener un desempeño académico sobre la media nacional.

2 Esta categoría de clasificación es la más alta entre cuatro y agrupa a establecimientos cuyos estudiantes obtienen resultados que sobresalen respecto de la media nacional de su grupo socioeconómico en la prueba SIMCE, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación en Chile, (MINEDUC, 2014).

El criterio de selección también consideró además el nivel escolar y los conocimientos previos relativos a la probabilidad. Según el currículo implementado, los estudiantes conocían los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y regla de Laplace, pero en el momento de la investigación, aún no conocían los conceptos de variable aleatoria y distribución de probabilidad.

Los casos de esta investigación corresponden a las producciones escritas, realizadas por los estudiantes trabajando en parejas, que expresan una decisión y un argumento para la misma. Se constituyen parejas de trabajo con el propósito de favorecer la elaboración de argumentos y consolidar así el uso de estos como unidad de análisis. Las parejas son definidas por los propios estudiantes, principalmente según afinidad. Estos 27 casos fueron asignados como P1, P2, …, P27, respectivamente. Para profundizar los resultados del análisis general fueron seleccionadas 6 producciones del total de 27.

4.2. *Situación de Aprendizaje y su aplicación*

La situación de aprendizaje utilizada para recolectar datos es parte de la segunda clase de una secuencia de cuatro clases de 90 minutos, creadas, diseñadas e implementadas por un docente del equipo de investigadores. En todas las clases, la motivación fue tomar una decisión y argumentarla, en las dos primeras, a partir de juegos de apuestas con dados y, en las dos siguientes, a partir de problemas cruciales, cercanos a la vida cotidiana de los estudiantes. En las clases de juegos de apuestas los estudiantes trabajaron en parejas con el propósito de vivir la experiencia de la apuesta, para luego discutir y consensuar con el compañero o compañera de juego, tanto la decisión como la redacción de la argumentación. En las clases asociadas a problemas cruciales, los estudiantes trabajaron de manera individual. En todas las clases los estudiantes recibieron una hoja de trabajo que describió la situación, un cuestionamiento principal y otros cuestionamientos secundarios de profundización. El trabajo realizado por los estudiantes se monitoreó constantemente por el docente, mediante notas de campo, las que facilitaron concluir cada clase con un plenario. La secuencia de aprendizaje fue diseñada para propiciar la reflexión y argumentación en la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre, antes que la enseñanza explícita del concepto probabilidad.

Se seleccionó la situación de la segunda clase, la cual se basa en dos experimentos aleatorios con dados equilibrados reales de 6 caras. La comprensión de los experimentos está facilitada por las experiencias lúdicas previas de los sujetos, debido a que el uso de experimentos aleatorios con artefactos, tales como dados, monedas y cartas, son comunes en el currículo chileno. A partir de la presentación de estos experimentos aleatorios como juegos (ver figura 1), los sujetos debían justificar de forma escrita su decisión respecto a la conveniencia de uno de los juegos para ganar. La implementación de la situación consideró 45 minutos, que contempló un primer momento para que los estudiantes efectivamente experimentaran ambos juegos con dados, y un segundo momento, para llegar a consenso, argumentar la decisión y registrarla en forma escrita.

> Se tienen dos juegos de dados.
>
> JUEGO 1: consiste en lanzar *un dado* no cargado de seis caras y observar *si sale un número par o impar en la cara superior*. Se gana el doble de lo apostado si sale par, si no, pierde todo lo apostado.
>
> JUEGO 2: consiste en lanzar *dos dados* no cargados de seis caras y observar *si la suma de los números de las caras superiores resulta par o impar*. Se gana el doble de lo apostado si sale par, si no, pierde todo lo apostado.
>
> ¿En qué juego conviene apostar para ganar? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Hoja de trabajo del estudiante que describe la situación.

4.3. *Procedimiento de Análisis*

Para llevar a cabo el análisis de los datos, se procedió en tres etapas, todas con el 100% de consenso entre investigadores. En la primera etapa, dos investigadores clasificaron los argumentos de los estudiantes, en relación a la elección realizada. En la segunda etapa, dos investigadores evaluaron el estado del pensamiento proporcional, a través de la presencia o ausencia de su manifestación (Cf., Tabla I), y se codificaron los 27 casos, considerando las seis combinaciones posibles entre la decisión tomada y el estado del pensamiento proporcional. Y en la última etapa, tres investigadores clasificaron los casos de acuerdo a la manifestación de los tipos de pensamiento probabilístico (Cf., Tabla II).

4.3.1. *Espacios muestrales de la situación de aprendizaje*

Para tomar una decisión sobre la conveniencia de elegir un juego u otro, los estudiantes debían comparar las probabilidades de ganar en ambos juegos, esto es, que salga par o la suma sea par. Varios son los estudios que señalan que el espacio muestral es una construcción clave en el desarrollo del pensamiento probabilístico (e.g., Chernoff y Zazkis, 2011; Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1999; Nikiforidou, 2019). Dado que la definición escolar de espacio muestral hace alusión al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, es común que surjan distintos tipos de conjuntos, no necesariamente equiprobables, según qué elementos se consideren de interés (Chernoff y Zazkis, 2011). Así, los estudiantes suelen describir espacios muestrales no convencionales, es decir, listas o conjuntos de muestras que se componen de eventos no elementales. Previniendo lo anterior, se realizó un análisis a priori de la situación, estableciendo algunos posibles conjuntos que podrían ser referidos por los estudiantes como espacios muestrales.

Para el juego 1, lanzar un dado y observar si sale par o impar, es posible anticipar dos espacios muestrales, A_1={1,2,3,4,5,6} de eventos elementales, y A_2={{2,4,6}; {1,3,5}} de subconjuntos de eventos, ambos equiprobables. El conjunto A_2 también podría ser descrito en lenguaje natural como par e impar.

El juego 2, lanzar dos dados y observar si la suma es par o impar, proviene de un experimento compuesto y podrían determinarse los espacios muestrales de distintas maneras. A continuación, se presentan los espacios muestrales en lenguaje conjuntista junto a la cardinalidad, descripción y consideración del orden al lanzar el dado, en cada uno de ellos (véase Tabla III).

TABLA III
Espacios Muestrales previstos para el juego 2

Tipos de Espacios muestrales en juego 2	*Espacio Muestral*	*Cardinalidad y/o Descripción*
Conjunto de eventos elementales	E_1 = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); …; (6,6)}	36 eventos descritos como pares ordenados, considerando el orden.
	E_2 = {(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6); (4,5); (4,6); (5,6)}	21 eventos descritos como pares ordenados, sin considerar el orden.
	E_3 = {(1_a,1_b); (1_b,1_a); (1_a,2_b); (1_b,2_a); ...; (6_a,6_b); 6_b,6_a)}	42 eventos descritos como pares ordenados, que distinguen el primer del segundo lanzamiento, sin considerar el orden.
	E_4 = {(1_a,1_b); (1_b,1_a); (1_a,2_b); (1_b,2_a); (2_a,1_b); (2_b,1_a); …; (6_a,6_b); (6_b,6_a)},	72 eventos descritos como pares ordenados, que distinguen el primer del segundo lanzamiento, considerando el orden.
Conjuntos de eventos no elementales	E_5 = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},	11 eventos descritos como los resultados posibles de la suma.
	E_6 = {(par, par); (impar, impar); (par, impar)}	3 eventos descritos según paridad de los resultados posibles de cada dado, sin considerar el orden.
	E_7 = {(par, par); (par, impar); (impar, par); (impar, impar)}	4 eventos descritos según paridad de los resultados posibles de cada dado, considerando el orden.
	E_8 = {par, impar}	2 eventos descritos como los posibles resultados para la suma, según paridad.

<table>
<tr><td>Registros de resultados en tablas o listas</td><td>E₉
<table>
<tr><td>D1</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D2</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, consignando el valor numérico de cada dado (D1, D2) para cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E₁₀
<table>
<tr><td>S</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, consignando la suma (S) de los valores de los dados para cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E₁₁
<table>
<tr><td>D1</td><td>p</td><td>p</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D2</td><td>i</td><td>p</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, distinguiendo y registrando par de impar (p, i) para cada dado (D1, D2) en cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E₁₂
<table>
<tr><td>S</td><td>p</td><td>p</td><td>i</td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, registrando par e impar (p, i) para los resultados de las sumas en cada lanzamiento.</td></tr>
</table>

5. Resultados

Se recolectaron los datos de las decisiones y respectivas argumentaciones de las parejas de estudiantes en forma de respuestas escritas, las que fueron analizadas de acuerdo a los tres criterios principales definidos en el marco conceptual: estado del pensamiento proporcional, decisión respecto a la oportunidad de ganar que brindan ambos juegos y estados del pensamiento probabilístico (ver Tabla IV).

De todos los casos clasificados en la Tabla IV (véase página siguiente), el 56% de estos (15) argumentan que ambos juegos dan la misma oportunidad de ganar, presentando mayormente un pensamiento proporcional cuantitativo y un tipo de pensamiento probabilístico objetivista laplaciano. Los que tomaron la decisión contraria, esto es, que los juegos no dan la misma oportunidad de ganar, presentan una mayor variabilidad en los argumentos, respecto al estado del pensamiento proporcional y al tipo de pensamiento probabilístico.

TABLA IV
Clasificación de los 27 casos, según tipo de pensamiento probabilístico
y el estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión

Tipo de pensamiento probabilístico	*Estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión*

Tipo de pensamiento probabilístico	*Estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión*						
	los juegos dan la misma oportunidad de ganar			*los juegos no dan la misma oportunidad de ganar*			
	ausente	*cualitativo*	*cuantitativo*	*ausente*	*cualitativo*	*cuantitativo*	*Total*
objetivista laplaciano	0	0	10	0	1	4	15
objetivista empírico	1	0	2	1	0	1	5
subjetivista interpretativo	2	0	-	2	3	-	7
Total	3	0	12	3	4	5	27

Nota: El signo - denota que la combinación es inviable.

Las argumentaciones predominantes corresponden a aquellas que conjugan el pensamiento probabilístico basado en información objetiva laplaciana y el pensamiento proporcional cuantitativo. Además, ocho de las combinaciones no presentaron casos, dos de ellas habían sido previstas como inviables.

La presencia de pensamiento probabilístico basado en información objetivista empírica no resultó compatible con el pensamiento proporcional cualitativo, ya que los estudiantes que obtenían resultados de manera experimental usaban estos para comparar cuantitativamente o bien no los usaban para tomar la decisión. En los 5 casos que presentaron este tipo de pensamiento probabilístico, la noción frecuentista de la probabilidad fue más bien intuitiva, los estudiantes llevaron la cuenta del número de veces que se perdía y que se ganaba sin reparar en la necesidad de realizar un gran número de experimentos.

En cuanto al pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, este se presenta unido tanto al pensamiento proporcional cualitativo como a la ausencia de pensamiento proporcional, siendo las expresiones cualitativas las que permitieron comprender el razonamiento subyacente.

Finalmente, y de acuerdo a lo previsto en la sección 4.3.1., fue posible identificar distintos espacios muestrales referidos al juego 2. La siguiente sección presenta el análisis de los tipos de espacios muestrales referenciados por los estudiantes y cómo se vinculan con los tipos de pensamiento probabilístico y los estados de pensamiento proporcional.

5.1. *Relación entre tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que manifiestan espacios muestrales explícitos para el juego 2*

5.1.1. *Caso P23: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral de eventos elementales*

La pareja de estudiantes P23 determina los espacios muestrales de los experimentos aleatorios: juego 1 y juego 2 (ver figura 2). Para el juego 1, expresa el espacio muestral como una lista y enmarca con un círculo los números impares 1, 3 y 5 (tres casos de seis), calcula la probabilidad de perder mediante la relación $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Mientras que para el juego 2, construye una tabla de doble entrada, y enmarca con un círculo los números impares 3, 5, 7, 9 y 11 (18 casos de 36), calculando también la probabilidad de perder como $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Estos estudiantes determinan que “en ambos [juegos] existe la misma probabilidad [de perder]”.

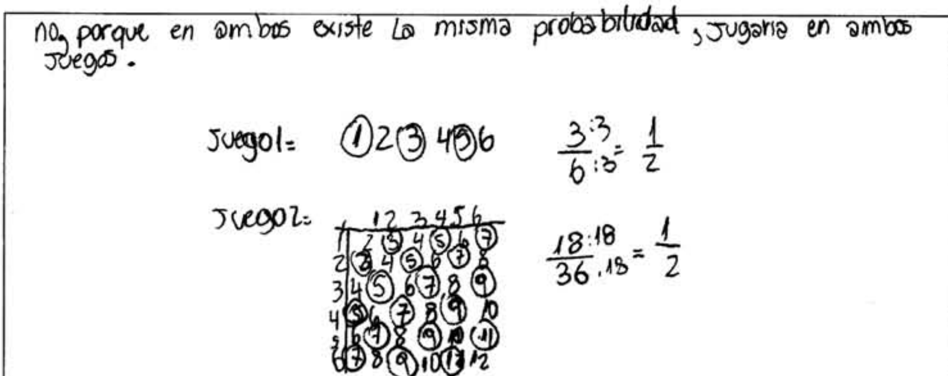


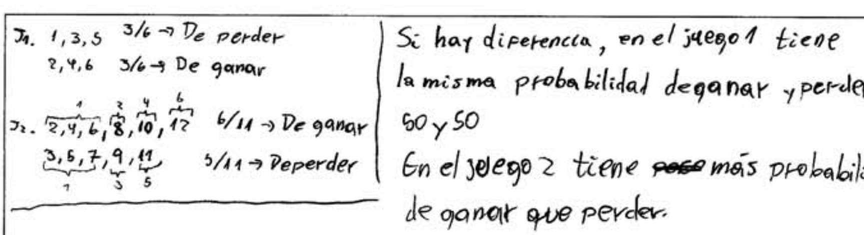
Figura 2. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P23, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cuantitativo, en un espacio muestral tipo E_1

P23 evidencia un pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana, manifestando la probabilidad como una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia, al determinar todos los eventos del espacio muestral de cada experimento aleatorio $\frac{3}{6}$ y $\frac{18}{36}$ respectivamente. A su vez, P23 evidencia un correcto pensamiento proporcional cuantitativo, pues compara la opción de perder a través de los resultados del cálculo de la probabilidad de ambos casos y, mediante las magnitudes resultantes, encuentra una regularidad numérica cuya expresión es $\frac{1}{2}$.

Este caso da cuenta de una relación favorable entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional cuantitativo, lo que permitió a P23 tomar una decisión correcta respecto a la situación propuesta.

5.1.2. *Caso P26: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral descrito como resultados posibles para la suma*

La pareja P26 determina los espacios muestrales del juego 1 y 2, rotulándolos como J1 y J2 (ver figura 3). Para J1 describe eventos elementales separados en dos casos, el caso en que se pierde, {1,3,5} y el caso en que se gana, {2,4,6}, y en ambos calcula la probabilidad mediante la regla de Laplace como $\frac{3}{6}$. Para J2 determina el conjunto correspondiente al recorrido de la variable aleatoria suma de dos números del 1 al 6 y también lo separa según el criterio de ganar y perder, esto es, {2,4,6,8,10,12} y {3,5,7,9,11} respectivamente, lo cual hace que calcule una probabilidad de $\frac{6}{11}$ para el primero y $\frac{5}{11}$ para el segundo. En consecuencia, P26 responde que el juego 1 tiene "la misma probabilidad de ganar y perder...", mientras que para el juego 2 indica que "tiene más probabilidad de ganar que perder."


J1. 1,3,5 3/6 → De perder
2,4,6 3/6 → De ganar
J2. 2,4,6,8,10,12 6/11 → De ganar
3,5,7,9,11 5/11 → Deperder

Si hay diferencia, en el juego 1 tiene la misma probabilidad deganar y perder 50 y 50
En el juego 2 tiene ~~poco~~ más probabilidad de ganar que perder.

Figura 3. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P26, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cuantitativo, sobre el espacio muestral tipo E_5

La pareja P26 da cuenta de un pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana, pues expresa la probabilidad tanto de ganar como de perder como una medida cuantitativa a través de la razón entre casos favorables y casos totales. A partir de la argumentación, puede interpretarse que implícitamente se considera una proporción cuyos cuatro términos están constituidos por fracciones, pues para cada juego se compara la probabilidad de ganar contra la probabilidad de perder, así P26 manifiesta un pensamiento proporcional cuantitativo.

En este caso, tanto el pensamiento probabilístico como el pensamiento proporcional se muestran sostenidos por elementos cuantitativos, logrando concordancia. Sin embargo, el cálculo de la probabilidad resulta incorrecto. Las causas de este error no obedecen a las dificultades en elaborar un pensamiento basado en proporciones, sino en asumir erróneamente la equiprobabilidad de los eventos que constituyen el espacio muestral establecido para el juego 2.

5.1.3. *Caso P16: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista empírico y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral descrito como registro de resultados del experimento*

La pareja P16 realizó 14 veces ambos experimentos aleatorios (ver figura 4). Para el juego 1 obtuvieron siete resultados en que el número observado en la cara superior del dado era impar y siete en que era par, rotulando como $I = 7$ y $P = 7$, respectivamente. De igual forma procedieron para el juego 2. Para cada juego, registran los resultados en una lista vertical, cuyas secuencias son distintas, pero las cantidades resultantes para los resultados par e impar son las mismas. En base a dicha experiencia, P16 concluye que ambos juegos tienen la misma probabilidad de ganar "... la frecuencia de que salga par o impar no influye en el resultado ya sea tirando uno o dos dados...".

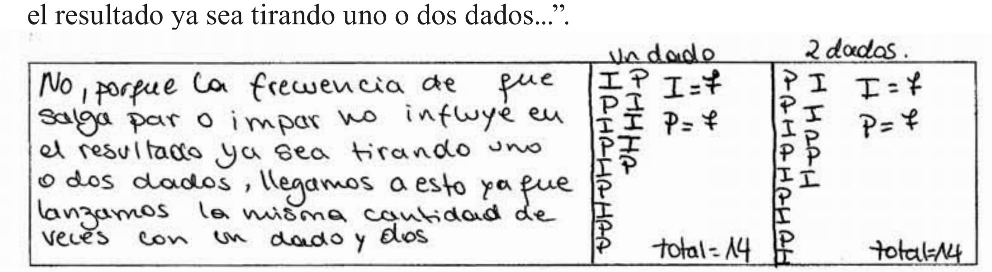


Figura 4. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P16, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista empírico y un pensamiento proporcional cuantitativo, sobre el espacio muestral tipo E_{11}

La pareja P16 manifiesta un pensamiento probabilístico objetivista empírico porque expresa la probabilidad como frecuencia absoluta, registrando el número de casos en que se obtiene par e impar en ambos juegos, a partir del lanzamiento de los dados. La comparación implícita, es de carácter cuantitativa, pues se realiza un cómputo de los resultados y se establece una base común para comparar, a saber, el mismo número de ensayos. Lo anterior es evidencia de un pensamiento proporcional cuantitativo, el cual permite a los estudiantes comparar directamente las frecuencias absolutas de los resultados pares e impares en cada juego.

En este caso, la evaluación de la probabilidad del juego 2 es plausible, no obstante, el hecho de que el experimento se realice una cantidad arbitraria y pocas veces es indicador de la ausencia de un adecuado significado frecuentista de la probabilidad. Luego, la decisión se ve influenciada por la coincidencia afortunada de los resultados obtenidos, los cuales hacen que el pensamiento objetivista empírico guíe el pensamiento proporcional cuantitativo, aún sin contar con información suficiente.

5.1.4. *Caso P9: Relación entre el pensamiento probabilístico subjetivista y el pensamiento proporcional cualitativo sobre un espacio muestral descrito según paridad de los resultados posibles de cada dado*

La pareja P9 argumenta que "los juegos no son equivalentes", ya que la suma entre dos pares o entre dos impares es par, siendo esta la opción que permite ganar (ver figura 5). Esto se relaciona con un espacio muestral conformado por tres tipos de sumas como eventos, descritos de la forma *par + par*, *par + impar*, *impar + impar*, en el que las posibilidades de obtener par son más que las posibilidades de obtener impar.

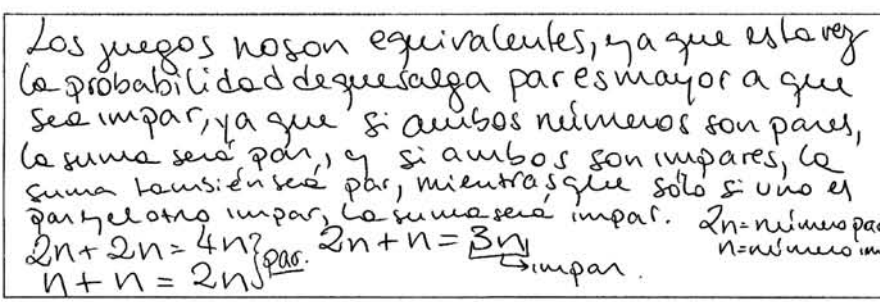

Los juegos no son equivalentes, ya que esta vez la probabilidad de que salga par es mayor a que sea impar, ya que si ambos números son pares, la suma será par, y si ambos son impares, la suma también será par, mientras que sólo si uno es par y el otro impar, la suma será impar. 2n = número par
n = número impar
$2n + 2n = 4n$ } par.
$n + n = 2n$
$2n + n = 3n$ → impar.

Figura 5. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P9, que evidencian un pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cualitativo, en el espacio muestral E_6

La pareja P9 manifiesta un pensamiento proporcional cualitativo, pues relaciona, a través del uso del lenguaje matemático escolar, los posibles tipos de sumas de ambos juegos bajo el criterio de la paridad. De esta manera, en el juego 2 se advierte que al haber más tipos de sumas que dan par, hay más probabilidad de ganar. Por otra parte, P9 activa un pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, pues ocupa una fuente de información algebraica y expresa posibilidades haciendo uso de lenguaje tanto natural como simbólico. Así, la elección entre los juegos se realiza sin recurrir a un resultado numérico. Este caso da cuenta de una relación adversa entre el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo y el pensamiento proporcional cualitativo, puesto que la necesidad de eludir el cálculo lleva a P9 a realizar una sobreestimación de la probabilidad de ganar en el juego 2, lo que conduce a tomar una decisión incorrecta.

En la Tabla V se sintetizan los tipos de espacios muestrales asociados al juego 2, que surgieron como parte de las argumentaciones y su relación con las combinaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico.

TABLA V

Tipos de espacio muestral y pensamientos asociados para el juego 2, desde las argumentaciones de los cuatro casos (P23, P26, P16 y P9)

Espacio Muestral	*Caracterización de la argumentación*	*Pensamientos asociados*
E_1	Se construye E_1 y cuentan los casos favorables {(1,1); (1,3); (1,5); … (6,6)} directamente desde el espacio muestral. Se decide que tanto el juego 1 como el juego 2 ofrecen las mismas oportunidades de ganar, pues en ambos juegos las posibilidades de obtener valores pares corresponden a la mitad de los casos totales, 1 de 2 y 18 de 36, respectivamente.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista laplaciano.
E_5	Se construye un conjunto simplificado de las posibilidades resultantes en función de la paridad. Se decide que los juegos no son equivalentes pues al apostar por obtener una suma par, hay más opciones de ganar en el juego 2, porque 2 de 3 combinaciones ofrecen una suma par (*par* + *par* = *par*; *impar* + *impar* = *par*).	Pensamientos proporcional cualitativo y probabilístico subjetivista interpretativo

E_6	Se considera de forma implícita el recorrido de la variable aleatoria suma de los números obtenidos en el juego 2 como conjunto referencia. Se identifican así todos los resultados posibles para la suma, desde el 2 hasta el 12. Se decide que los juegos no ofrecen la misma oportunidad de ganar, pues en el juego 2 hay más de la mitad de opciones favorables para obtener un valor par, esto es, 6 de 11.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista laplaciano.
E_{10} y E_{11}	Se registran los resultados obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, en listas o tablas, ya sea el resultado numérico de la suma o la posibilidad par - impar para cada dado. Se puede decidir que los juegos ofrecen igual o distinta oportunidad de ganar, según el conteo de casos favorables y casos totales.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista frecuentista.

Nota: Elaboración propia.

Los espacios muestrales si bien fueron descritos y representados de distintas maneras por los estudiantes, se manifestaron de acuerdo a lo previsto (ver Tabla IV), según se indica en la Tabla V. Los espacios muestrales E_1, E_5 y E_6 son válidos, aunque varían en cardinalidad y notación. No obstante, la forma en la que se visualiza el conteo de posibilidades a partir de dichos espacios muestrales puede afectar significativamente en la asignación de probabilidades específicas para cada evento y, por tanto, en la decisión sobre la conveniencia de un juego sobre el otro. En los casos P26 y P9, las dificultades evidenciadas en la estimación de la probabilidad de ganar en el juego 2, obedecen al supuesto de la equiprobabilidad de los espacios muestrales referenciados y no necesariamente a la interpretación y descripción de los conjuntos asociados a los espacios muestrales. De ahí que las reflexiones relativas a la conveniencia por apostar en el juego 1 o en el juego 2 varían incluso si la base común es el pensamiento probabilístico basado en información objetivista.

5.2. *Relación entre tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que no manifiestan espacios muestrales explícitos para el juego 2*

Los siguientes dos casos, permiten profundizar —dada la legibilidad de la redacción— en la relación entre los tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que no manifiestan espacios muestrales explícitos.

5.2.1. *Caso P24: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cualitativo, sin espacio muestral explícito*

La pareja P24 argumentó que el primer juego "tiene menos probabilidad porque tiene menos opciones", [esto es, {1,2,3,4,5,6}] tiene cardinalidad 6 y "solo 3 son pares", mientras, para el segundo juego, "hay un mayor número de combinaciones [entonces hay mayor probabilidad de ganar]", pues si se tienen "ambos dados con números impares..., la suma puede ser par" (ver figura 6).

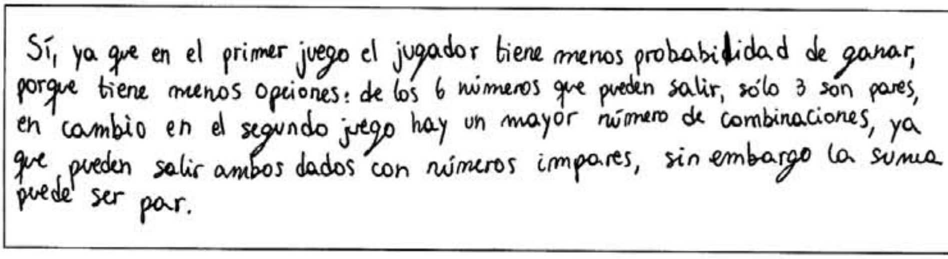

Sí, ya que en el primer juego el jugador tiene menos probabilidad de ganar, porque tiene menos opciones: de los 6 números que pueden salir, sólo 3 son pares, en cambio en el segundo juego hay un mayor número de combinaciones, ya que pueden salir ambos dados con números impares, sin embargo la suma puede ser par.

Figura 6. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P24, que evidencian un pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cualitativo, sin explicitar espacio muestral para el juego 2

P24 activa un pensamiento proporcional en estado cualitativo, pues al comparar ambos juegos, asocia a más posibilidades mayor probabilidad de ganar. La pareja P24 entrega elementos del espacio muestral para el juego 1, y un espacio muestral implícito para el juego 2. Es posible interpretar que considera el conjunto {(*par*, *par*), (*par*, *impar*), (*impar*, *impar*)}, desde el cual se infiere que hay más posibilidades de que la suma sea *par* que *impar,* pues *par* + *par* = *impar* + *impar* = *par.* P24 manifiesta un estado de pensamiento probabilístico laplaciano, de acuerdo a cómo concibe la probabilidad para el juego 1. Si bien en el juego 2 no se calcula numéricamente la probabilidad de ganar, igualmente se insinúa la relación entre casos favorables y casos totales, al intentar conceptualizar las combinaciones que arrojan resultados pares para la suma y las posibles combinaciones.

Este caso evidencia dos dificultades, por una parte, se cambia el tipo de espacio muestral de referencia, de uno de eventos elementales a otro de eventos descritos según paridad del resultado de cada dado y, por otra, el análisis de los resultados posibles para el juego 2 no distingue el evento par - impar del evento impar - par. Junto con lo anterior, el recuento de los resultados posibles realizado para el juego 2 manifiesta un sesgo de equiprobabilidad.

5.2.2. *Caso P19: Relación entre el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo y ausencia de pensamiento proporcional, sin espacio muestral explícito*

La pareja P19 reconoce la existencia de diferencias entre ambos juegos, pero la argumentación se reduce a repetir las características de cada uno, como el número de dados que se usa en cada caso y las condiciones que permiten ganar (ver figura 7). El argumento expresa que la diferencia está en las probabilidades de obtener par en cada juego, que es finalmente lo que permite ganar.

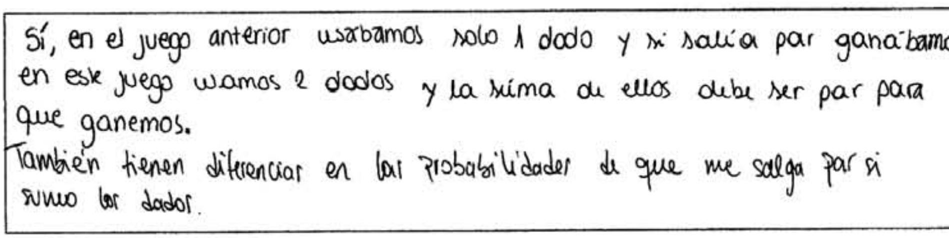

Sí, en el juego anterior usabamos solo 1 dado y si salía par ganabamos
en este juego usamos 2 dados y la suma de ellos debe ser par para
que ganemos.
También tienen diferencias en las probabilidades de que me salga par si
sumo los dados.

Figura 7. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P19, que evidencia ausencia de pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, sin espacio muestral explícito

La pareja P19 manifiesta ausencia de pensamiento proporcional, pues no realiza ningún tipo de comparación en base a razones, como tampoco expresa un pensamiento proporcional cualitativo, ya que no relaciona, por ejemplo, el aumento de posibilidades con el aumento de probabilidades. Además, P19 manifiesta un pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, dado que argumenta que existen diferencias en las probabilidades de ganar, pero sin comunicar un resultado numérico ni justificar las fuentes de información.

En este caso la relación entre la ausencia de pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo obstaculizó la concreción de una decisión respecto de la conveniencia de un juego por sobre otro.

6. Discusión

Los resultados generales evidencian que el pensamiento proporcional puede jugar un doble rol al estar en interacción con el pensamiento probabilístico. En ocasiones ambos pensamientos se muestran en una relación beneficiosa, pero en otros casos el pensamiento proporcional predomina sobre el pensamiento probabilístico, generando ideas sesgadas acerca de la probabilidad. Específicamente, la relación explícita entre el pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana y el pensamiento proporcional cuantitativo brindan señales sobre cómo influye la construcción del espacio muestral en la determinación de probabilidades. De las 15 argumentaciones que sugirieron una lógica laplaciana, sólo 10 de ellas ofrecieron argumentos correctos respecto de las probabilidades involucradas, que son justamente aquellas que definieron el espacio muestral de eventos elementales. Por su parte, el pensamiento proporcional cuantitativo, presente en 17 de los 27 casos, manifestaron el proceso de plantear probabilidades como razones cuando existía acceso a espacios muestrales, ello se contrapone a lo señalado por Sedlmeier (1999), quien manifiesta que uno de los factores que explican las dificultades para razonar o comparar probabilidades está precisamente en el uso de razones.

Aquellos casos que evaluaron su decisión sobre el espacio muestral de eventos elementales, determinado por el juego 2, lograron identificar que la razón entre casos favorables *versus* casos totales era la misma en ambos juegos, pero esto se debió a que los eventos compuestos fueron distinguidos claramente, al igual que el orden de la aparición de los resultados. De esta manera, las decisiones que acertaron en relación a las probabilidades de los juegos no responden necesariamente a un mejor desempeño del razonamiento proporcional, porque algunos argumentos utilizan la misma base proporcional, pero llegan a conclusiones distintas, al considerar distintos conjuntos de resultados posibles. De este modo, los cálculos probabilísticos, que no coinciden con la probabilidad laplaciana, no se debieron a la ausencia de pensamiento proporcional, puesto que la mayoría de los casos evidencia que evaluar una probabilidad activa la necesidad de establecer una unidad de medida mediante comparación constante entre magnitudes, que es la base del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2016). Al parecer, los argumentos incorrectos tienen relación con la convicción de que dos posibilidades que se componen de iguales elementos, pero en distinto orden son indistinguibles entre sí, fenómeno conocido históricamente por el caso de d'Alembert (d'Alembert, 1784). En este mismo sentido, determinar el espacio muestral al lanzar dos dados de seis caras, presenta dificultades epistemológicas constatables en la historia. Por ejemplo, en el poema De Vetula, un escrito medieval de mediados del siglo XIII (Bellhouse, 2000), se establece que, en vez de 36, hay 21 formas de lanzar dos dados —quince combinaciones de parejas del 1 al 6, más seis parejas de la forma (h, h)—, conteo que se realiza precisamente para evaluar las opciones de ganar en un juego.

Los hallazgos evidencian que enfrentar a los estudiantes a situaciones que involucran incertidumbre, como los juegos de apuestas basados en experimentos aleatorios, promueven el desarrollo de argumentaciones probabilísticas, aun cuando el concepto de probabilidad no es intencionado como objeto de enseñanza. Además, dado que los estudiantes son interpelados a tomar una decisión antes que realizar cálculos, la situación resultó propicia para identificar cómo el pensamiento probabilístico recurre o descarta, de manera natural, el uso de proporciones. En el análisis de las relaciones entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, el espacio muestral desempeñó un rol fundamental, pues permitió determinar que las dificultades en el desarrollo del pensamiento probabilístico no obedecían necesariamente a la ausencia de pensamiento proporcional como lo ha indicado la literatura especializada, sino más bien a una consideración uniforme de los elementos que conformaban dichos espacios muestrales.

Todos los estudiantes asumieron la equiprobabilidad de los espacios muestrales. Este fenómeno, conocido como el sesgo de la equiprobabilidad, es uno de los sesgos más comunes, altamente resistente a la enseñanza y transversal en diversos niveles educativos (Lecoutre, Durand y Cordier, 1990). Los espacios muestrales $E_5 = \{par\text{-}par, par\text{-}impar, impar\text{-}impar\}$ y $E_6 = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, por ejemplo, son ponderados naturalmente como equiprobables por los estudiantes, sin notar que no todos los eventos tienen la misma cantidad de posibilidades. Esta creencia sobre el azar, que conduce a intuir que en general los fenómenos aleatorios se comportan de manera uniforme o equiprobable ha sido largamente documentada (e.g., Anway y Bennett, 2004; Fielding-Wells, 2014; Morsanyi, Primi, Chiesi, y Handley, 2009).

El sesgo de la equiprobabilidad también puede explicarse porque en el juego 2 la variable no uniforme (la suma de los dos dados) está determinada por variables uniformes (el resultado del lanzamiento de cada dado). Concordamos con Gauvrit y Morsanyi (2014) que la dificultad puede emerger al tratar de cuantificar la probabilidad de ganar, al creer que la uniformidad de cada experimento simple será heredada al espacio muestral compuesto. Por otra parte, la idea de equiprobabilidad es una hipótesis frecuente, cuya naturalidad puede ser explicada como parte de un contrato didáctico implícito, corroborado por la predominancia del uso de artefactos aleatorios equiprobables (dados equilibrados, monedas, mazos de cartas, entre otros) y de la llamada regla laplaciana, cuya hipótesis requiere que los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables.

Si bien el pensamiento proporcional, en su manifestación cuantitativa, permitió apoyar la argumentación de los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre, también condujo a la prevalencia de una concepción determinística.

Este mismo fenómeno es corroborado por Gandhi (2018), quien explica que formular proporcionalmente la relación entre el evento deseado y el tamaño del espacio muestral tiene como base un enfoque determinista, el que podría ser la causa de la persistencia del sesgo de equiprobabilidad. Asimismo, en tres de los casos analizados, el pensamiento proporcional jugó un papel en una dirección distinta. Estos estudiantes juzgaron que "a mayor cantidad de posibilidades mayor probabilidad de ganar", lo que los llevó a tomar una decisión sin recurrir a la elaboración de un espacio muestral como conjunto ni a la cuantificación explícita de sus elementos. Hemos nombrado a este tipo de creencias como *heurística de lo proporcional*, la cual impulsó a los estudiantes a tomar una decisión, prescindiendo de la probabilidad como razón. Y como heurística, podría ser útil para decidir de forma rápida cuando el acceso a datos es incompleto o parcial, o simplemente cuando no se cuenta con técnicas directas para calcular probabilidades.

En relación con las limitaciones del estudio, por razones de extensión, no fueron analizados los argumentos que tuvieron lugar en el plenario de la clase seleccionada, sólo se consideraron los argumentos escritos. Dado lo anterior, con el propósito de aclarar específicamente cómo los estudiantes evocan espacios muestrales al momento de tomar una decisión, los procedimientos de trabajo de campo de futuras investigaciones podrían incluir entrevistas o grupos focales. Asimismo, el hecho de considerar experimentos aleatorios, a partir de artefactos de uso común en el aula de clase, restringe la incertidumbre a escenarios artificiosos de juegos de apuestas. De ahí que uno de los desafíos para la extensión del estudio, esté en la creación de situaciones cercanas a la vida cotidiana del estudiante que, al igual que las situaciones de juegos, permitan la experimentación o la simulación para evaluar los resultados de la decisión en varios intentos, modelar y cuantificar la incertidumbre.

7. Conclusiones

Esta investigación indagó en las posibles relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico, que involucraba tomar una decisión bajo incertidumbre. Para ello se propuso una situación con artefactos aleatorios reconocidos por los estudiantes, que implicaba decidir entre dos juegos con dados respecto a la mejor oportunidad para ganar, y argumentar tal decisión. El análisis se fundamentó en un marco conceptual que permitió establecer las relaciones entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, y se enfocó en los argumentos que podían o no incluir procedimientos calculatorios de probabilidad. Para el análisis se elaboraron categorías orientadas por la conceptualización del pensamiento proporcional de Reyes-Gasperni y Cantoral (2016), y las características del pensamiento probabilístico de Borovcnik (2011). Los casos fueron clasificados de acuerdo a la presencia de tres tipos de pensamiento probabilístico y tres estados del pensamiento proporcional, las que se manifestaron al argumentar la decisión por uno de los juegos. En particular, se profundizó en algunos casos para evidenciar el análisis de los datos, organizándolos según la presencia explícita e implícita del espacio muestral. De este modo, por una parte, fue posible determinar cómo los procesos de toma de decisiones pueden contribuir al uso natural de la noción de probabilidad para evaluar una decisión; y, por otra parte, se profundizó en el rol del pensamiento proporcional en la comparación de probabilidades. En aquellos casos en los que no se realizaron comparaciones, cualitativas o cuantitativas, la decisión perdió consistencia y claridad.

Los hallazgos demostraron que los procesos de toma de decisiones en escenarios de incertidumbre activan tanto el pensamiento proporcional como el pensamiento probabilístico siempre que se establezca algún fundamento. La relación entre estos pensamientos puede ser beneficiosa o no, según cómo se produzca la coordinación. Es beneficiosa si el sujeto compara probabilidades, elaborando proporciones desde el espacio muestral explícito de eventos elementales; y se torna desfavorable, si el sujeto considera que las probabilidades siempre son igualmente proporcionales a las posibilidades, o bien, si evalúa probabilidades como razones entre el número de eventos favorables y el número de eventos totales, sin distinguir si estos corresponden o no a eventos elementales. Así, el pensamiento proporcional cuantitativo puede coordinarse positivamente con el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano si el espacio muestral es un conjunto de eventos elementales, pero negativamente si el espacio muestral está constituido por algún(os) evento(s) no elemental(es), pues esto último podría derivar en el sesgo de equiprobabildad. De un modo similar, el pensamiento proporcional cuantitativo se relaciona beneficiosamente con el pensamiento probabilístico objetivista empírico solo si el experimento se realiza una cantidad suficiente de veces. Además, el pensamiento proporcional cualitativo se coordina desfavorablemente con el pensamiento probabilístico basado en información subjetivista interpretativa al prescindir de un espacio muestral.

A la luz de los resultados, surge la necesidad de discutir con los estudiantes las formas en las que conciben los espacios muestrales, orientando la enseñanza de la probabilidad hacia el análisis argumentado de las diferencias entre las medidas de las razones según el espacio muestral que se tenga como referencia. La explicitación de los eventos elementales, ya sea teórica o empírica, adquiere relevancia en la articulación del pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, pues favorece la comparación proporcional a partir del conteo. El pensamiento proporcional, aunque responda a un paradigma determinístico, es necesario para construir pensamiento probabilístico, pues permite medir y comparar en escenarios de incertidumbre. La comparación asociada al pensamiento proporcional debe ser llevada a un siguiente nivel, de modo que los estudiantes puedan contrastar una distribución uniforme con una distribución no uniforme, mediante la visualización simultánea, por ejemplo, numérica y gráfica del espacio muestral. De esta forma, los estudiantes podrían asociar la no uniformidad con la no equiprobabilidad, lo cual contribuiría a subsanar las dificultades persistentes en el aprendizaje de la probabilidad.

Las proyecciones de la investigación apuntan a elaborar secuencias de aprendizaje que aborden la relación entre los pensamientos probabilístico y proporcional con nuevos artefactos aleatorios y visualizaciones, en escenarios de incertidumbre auténticamente realistas; e investigar las coordinaciones más predominantes entre los dos pensamientos estudiados. Asimismo, es necesario profundizar en el sesgo de equiprobabilidad, el cuál se manifestó en la asignación indiscriminada de dar a cada posibilidad la misma probabilidad, revelándose una nueva heurística, que hemos denominado *heurística de lo proporcional*, la que emergió al evitar el cálculo de probabilidades y tomar una decisión simple con base intuitiva, conduciendo a percepciones incorrectas respecto de la probabilidad.

Agradecimientos

Se agradece el financiamiento otorgado por Beca CONICYT-PCHA / Doctorado Nacional: 2016-21160151 y 2016-21161569; Proyecto CONICYT FONDECYT N° 1200346; ANID / PIA / Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003; y por Proyecto VRIE-PUCV 039.439/2020

Referencias bibliográficas

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*(2), 131-156. DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2121.

Anway, D., & Bennett, E. (2004, August). Common misperceptions in probability among students in an Elementary Statistics class. En B. Chance (Conference chair), *ARTIST Roundtable Conference on Assessment in Statistics held at Lawrence University* (pp. 1-4). Recuperado desde http://www.rossmanchance.com/artist/proceedings/AnwayBennett.pdf

Ashline, G., & Frantz, M. (2009). Proportional reasoning and probability. *Synergy Learning Nov / Dec,* 8-10. Recuperado desde https://web.archive.org/web/20071010023424/http://cf.synergylearning.org/displaygrade.cfm?selectedgrade=1

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. En *Research on Teaching and Learning Probability.* ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Boston, MA: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

Bellhouse, D. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68*(2), 123-136. DOI: https://doi.org/10.2307/1403664

Bennett, D. (2014). Sticking to your guns: a flawed heuristic for probabilistic decision-making. En E.J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 261-281). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_14

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study (Vol. 14)* (pp. 71-83). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_11

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's Understanding of Probability: A Literature Review (summary Report).* London: Nuffield Foundation.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 15-33. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-010-9288-8

Chiesi, F., & Primi, C. (2010). Cognitive and non-cognitive factors related to students' statistics achievement. *Statistics Education Research Journal, 9*(1), 6–26. Recuperado desde http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ9%281%29_Chiesi_Primi.pdf

Chiesi, F., & Primi, C. (2014). The interplay among knowledge, cognitive abilities and thinking styles in probabilistic reasoning: a test of a model. En E.J. Chernoff & B. Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 195-214). Dordrecht : Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_11

D'Alembert, J. (1784). Croix ou Pile. Dans *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonne des Sciences, des Arts et des Metiers*, Vol. 4, pp. 512-513. Paris: Societe des Gens de Lettres. Recuperado desde https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k505351/f1.item.r=alembert

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University student's knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 131-162. Recuperado desde http://www.iejme.com/article/university-students-knowledge-and-biases-in-conditional-probability-reasoning

Engel, J., & Orthwein, A. (2018). The Six Loses: Risky Decisions Between Probabilistic Reasoning and Gut Feeling. En C., Batanero & E., Chernoff (Eds.), Teaching and Learning Stochastics, *Advances in Probability Education Research, ICME-13 Monograph* (pp. 261-274). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_15

Eriksson, K., & Simpson, B. (2010). Emotional reactions to losing explain gender differences in entering a risky lottery. *Judgment and Decision Making, 5*(3), 159. Recuperado desde http://journal.sjdm.org/10/10601/jdm10601.html

Fielding-Wells, J. (2014). Where's your evidence? Challenging young students' equiprobability bias through argumentation. En T. Dunne (Conference chair), *The 9th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Recuperado desde https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2B2_FIELDINGWELLS.pdf

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. DOI: https://doi.org/10.1007/bf00380436

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel Publishing. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-010-1858-6

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gandhi, H. (2018). Understanding Children's Meanings of Randomness in Relation to Random Generators. En C., Batanero & E., Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, Advances in Probability Education Research, ICME-13 Monograph* (pp. 181-200). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 44–63. DOI: https://doi.org/10.2307/749110

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372-396. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Gauvrit, N., & Morsanyi, K. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Advances in cognitive psychology, 10*(4), 119-130. Recuperado desde https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4310748/

Gigerenzer, G. (2011). *Decisiones Instintivas: la inteligencia del inconsciente*. Barcelona: Editorial Ariel.

Hoffrage, U., Krauss, S., Martignon, L., & Gigerenzer, G. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in psych*ology, 6, 1473. DOI: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01473

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Mogill, A. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 487–519. DOI: https://doi.org/10.2307/749771

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. Barcelona: Penguin Random House.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). The psychology of preferences. *Scientific American, 246*(1), 160-173. DOI: http://dx.doi.org/10.1038/scientificamerican0182-160

Kruger, J., Wirtz, D., & Miller, D. (2005). Counterfactual thinking and the first instinct fallacy. *Journal of personality and social psychology, 88*(5), 725-735. DOI: https://doi.org/10.1037/e413812005-243

Laplace, P. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris: Mme Ve Courcier. Recuperado desde de https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3684.

Lecoutre, M., Durand, J., & Cordier, J. (1990). A study of two biases in probabilistic judgments: Representativeness and equiprobability. En J. P. Caverni, J. M. Fabre & M. González (Eds.), Advances *in Psychology: Cognitive Biases* (pp. 563-575). Amsterdam: Elsevier. DOI: https://doi.org/10.1016/s0166-4115(08)61343-6

Martignon, L. (2014). Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk evaluation. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 149-160). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_9

Ministerio de Educación de Chile (2014). Comprender la categoría de desempeño. En Autor (Ed.), *Guía para comprender la categoría de desempeño y orientar las rutas de mejora* (pp. 13-26). Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/guia_para_comprender_categoria_de_desempeno.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2015). Matemática. En Autor (Ed.), *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio* (pp. 93-106). Recuperado de http://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Morsanyi, K., Primi, C., Chiesi, F., & Handley, S. (2009). The effects and side-effects of statistics education: Psychology students'(mis-) conceptions of probability. *Contemporary Educational Psychology, 34*(3), 210-220. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.05.001

Nikiforidou, Z. (2019). Probabilities and Preschoolers: Do Tangible Versus Virtual Manipulatives, Sample Space, and Repetition Matter?. *Early Childhood Education Journal*, *47*(6), 769-777. DOI: https://doi.org/10.1007/s10643-019-00964-2

OECD (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. DOI: https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. En Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193-227), Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 2(11), 155-176*. Recuperado de http://www.revistacseducacion.unr.edu.ar/ojs/index.php/educacion/article/viewFile/265/248

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning: Theoretical models and practical implications*. New York: Psychology Press. DOI: https://doi.org/10.4324/9781410601247

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer, Dordrecht. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove, England: Psychology Press.

Watson, J., & Shaughnessy, M. (2004). Proportional Reasoning: Lessons from Research in Data and Chance. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(2), 104-109. Recuperado desde https://www.researchgate.net/publication/234667935_Proportional_Reasoning_Lessons_from_Research_in_Data_and_Chance

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: The role of representation in mental computation. *Cognition, 98*(3), 287-308. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cognition.2004.12.003

Autores

Andrea Vergara. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. andrea.vergara@pucv.cl

Soledad Estrella. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. soledad.estrella@pucv.cl

Pedro Vidal-Szabó. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. pedro.vidal@pucv.cl

Patrícia Damas Beites, Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa,
Maria Luísa Frazão Rodrigues Branco

ESQUEMAS DE DEMONSTRAÇÃO PARA PROPOSIÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR COM VALOR LÓGICO VERDADE

Proof Schemes for Linear Algebra with Logical Value True

RESUMEN

El presente trabajo se propone analizar esquemas de demostración en producciones de alumnos en la asignatura universitaria de Álgebra Lineal. Concretamente, estudiamos las representaciones de tres estudiantes, y sus transformaciones, en tareas que involucran proposiciones de Álgebra Lineal con valor lógico verdad, procurando acceder a su razonamiento matemático. Las conclusiones del estudio indican que el nivel de rendimiento académico en Matemáticas de un alumno puede no traducir el nivel de rendimiento académico de ese alumno en la construcción de demostraciones. Sugieren también una posible conexión entre los contenidos, y la experiencia, asociados al primer contacto de los alumnos con la demostración y las representaciones por ellos utilizadas en los esquemas de demostración. Por último, las conclusiones aclaran los significados atribuidos por los alumnos a esquemas de demostración no deductivos. En un sentido lato, los resultados muestran la necesidad de intervenciones en clase, basadas en investigación, para generar soluciones para los desafíos de la enseñanza y del aprendizaje de la demostración en la Enseñanza Superior.

PALABRAS CLAVE:

- *Demostración en matemáticas*
- *Esquemas de demostración*
- *Razonamiento matemático*
- *Representaciones*
- *Álgebra Lineal*

ABSTRACT

The purpose of the present work is to analyse proof schemes in students' productions in a curricular unit of Linear Algebra in Higher Education. Concretely, we study the representations of three students, and their transformations, in tasks that contain propositions of Linear Algebra with logical value true, trying to access their mathematical reasoning. The conclusions of the study indicate that the level of performance in Mathematics of a student may not translate the level of performance of that student in the construction of proofs. They also suggest a possible connection between the contents, and the experience, associated to the first contact of the students with proof and

KEYWORDS:

- *Proof in mathematics*
- *Proof schemes*
- *Mathematical reasoning*
- *Representations*
- *Linear Algebra*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 37-78.
Recepción: Enero 22, 2019 / Aceptación: Marzo 20, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2312

the representations used by them in the proof schemes. Last but not least, the conclusions shed light on the meanings for the students of proof schemes which are not deductive. In a broad sense, the findings show the need for research-based interventions in the classroom to address the challenges of the teaching and the learning of proof in Higher Education.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar esquemas de demonstração em produções de alunos numa unidade curricular de Álgebra Linear do Ensino Superior. Concretamente, estudamos as representações de três alunos, e suas transformações, em tarefas que envolvem proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade, procurando aceder ao seu raciocínio matemático. As conclusões do estudo indicam que o nível de desempenho em Matemática de um aluno pode não traduzir o nível de desempenho desse aluno na elaboração de demonstrações. Sugerem também uma possível ligação entre os conteúdos, e a experiência, associados ao primeiro contacto dos alunos com a demonstração e as representações por eles utilizadas nos esquemas de demonstração. As conclusões apontam ainda para os significados atribuídos pelos alunos a esquemas de demonstração não dedutivos. Em sentido lato, os resultados mostram a necessidade de intervenções na sala de aula, com base em investigação, de modo a gerar soluções para os desafios do ensino - aprendizagem da demonstração no Ensino Superior.

PALAVRAS CHAVE:

- *Demonstração em matemática*
- *Esquemas de demonstração*
- *Raciocínio matemático*
- *Representações*
- *Álgebra Linear*

RÉSUMÉ

Le présent travail vise à analyser les schémas de démonstration dans les productions de étudiants dans une unité curriculaire d'Algèbre Linéaire de l'Enseignement Supérieur. Plus spécifiquement, nous étudions les représentations de trois étudiants, et leurs transformations, dans les tâches qui impliquent des propositions d'Algèbre Linéaire avec une valeur logique vraie, cherchant à accéder à leur raisonnement mathématique. Les conclusions de l'étude indiquent que le niveau de performance dans les mathématiques d'un étudiant peut être ne peut pas traduire le niveau de performance de cet étudiant dans l'élaboration de démonstrations. Ils suggèrent aussi un lien possible entre le contenu, et l'expérience, associée au premier contact avec la démonstration et les représentations utilisées dans les schémas de démonstration. Les conclusions indiquent également les significations attribuées par les étudiants aux schémas de démonstration non déductives. Dans un sens large, les résultats montrent la nécessité d'interventions en classe, basées sur la recherche, afin de générer des solutions aux défis du enseignement-apprentissage de la démonstration dans l'Enseignement Supérieur.

MOTS CLÉS:

- *Démonstration en mathématiques*
- *Schémas de démonstration*
- *Raisonnement mathématique*
- *Représentations*
- *Algèbre Linéaire*

1. Introdução

O cerne da Matemática como ciência em permanente construção são as demonstrações, envolvendo raciocínio para "convencer-se a si próprio, convencer um amigo, convencer um inimigo" (Mason, Burton, & Stacey, 1982, p. 106). Essenciais para compreender, estabelecer e comunicar o conhecimento matemático, no ensino as demonstrações permitem convencer os alunos "com base na razão, em vez da autoridade" (Lima, 1999, p. 5).

Apesar da sua relevância, uma tarefa cuja resolução passe por uma demonstração é, para muitos alunos, algo difícil "com letras". Ainda que as mais recentes orientações curriculares portuguesas em Bivar et al. (2013, 2014) tenham vindo reforçar a importância da demonstração nos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, da nossa experiência, os seus reflexos ainda não são notórios no Ensino Superior.

No Ensino Superior português não há um documento condutor único, sendo os docentes das unidades curriculares da área científica de Matemática, na sua instituição, intervenientes na definição dos programas das mesmas. No que diz respeito à demonstração, em muitos casos, os docentes têm alguma liberdade, o que não significa que não estejam sujeitos a pressões, no sentido da menorização da demonstração, nos cursos que não formam futuros matemáticos.

Mesmo nos casos de unidades curriculares em que a demonstração é considerada, tal pode não conduzir à perceção dos processos associados ao raciocínio matemático dos alunos ou à criação de esquemas de demonstração por estes. Com efeito, fazer muitas demonstrações não significa que a demonstração seja trabalhada (Costa & Tadeu, 2006). É também difícil desenvolver a noção de demonstração quando o professor se limita a reproduzi-las.

Acresce o facto de ser escassa, pelo menos em Portugal, a investigação com alunos do Ensino Superior e, em particular, no âmbito da demonstração. Do nosso conhecimento, os estudos relativos a (esquemas de) demonstração reportam-se aos Ensinos Básico, como o de Rodrigues (2012), e Secundário, como o de Neto, Breda e Godino (2011). Também não abundam em Portugal os estudos cuja prática letiva passe pela aprendizagem pelos pares (Beites & Serôdio, 2015).

A aprendizagem pelos pares encontra fundamento na obra de Dewey, que enfatizou a importância da construção colaborativa do conhecimento. No registo pragmatista em que se move, Dewey concebe a importância das comunidades de aprendizagem enquanto possibilidades de acesso a várias perspetivas e à busca colaborativa de soluções. Por induzir a reorganização dos argumentos de alunos que tentam convencer os seus pares em discussões, escolhemos este método de ensino-aprendizagem.

O presente estudo tem por objetivo analisar os esquemas de demonstração nas produções de três alunos, em tarefas de demonstração para proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade. Procuramos compreender o raciocínio matemático dos alunos nessas produções, tentando aceder ao mesmo através das representações e suas transformações. Nos esquemas de demonstração não dedutivos, tentamos ainda compreender os significados associados que os alunos lhes atribuem.

Tendo em vista os objetivos descritos, procuramos responder às seguintes questões de investigação: Que esquemas de demonstração são elaborados pelos alunos para demonstrar proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade?; que representações e suas transformações são utilizadas pelos alunos nessas produções?; quais os significados atribuídos pelos alunos aos esquemas de demonstração não dedutivos?.

2. Enquadramento teórico

O lugar da demonstração no currículo matemático é um tópico central de discussão desde a década de 90 do século passado (Gabel & Dreyfus, 2017; Stylianides & Stylianides, 2017; Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). Efetivamente, o papel da demonstração no ensino da Matemática está longe de ser consensual, assim como não reúne unanimidade o critério do que torna uma demonstração aceitável ou não. Insistir na importância da demonstração, no âmbito do conhecimento matemático, implica entender a Matemática como ciência que privilegia, simultaneamente, a abordagem heurística e indutiva e a abordagem dedutiva, contestando a perceção, partilhada por vários educadores, que privilegia o desenvolvimento de competências investigativas e de resolução de problemas, considerando que estas permitem tornar a Matemática mais atraente e próxima da realidade dos alunos (Hanna, 2000; Stylianides & Stylianides, 2008).

2.1. *Demonstração e suas Funções*

Hanna (2000) pronuncia-se a favor da centralidade da demonstração no currículo matemático, realçando a importância de discutir quer a sua relevância, quer as suas limitações, com os alunos. De Villiers (2001) realça, a este propósito, que a necessidade de demonstração não é facilmente compreendida pelos alunos, devendo-se esta incompreensão menos a problemas de desenvolvimento cognitivo, mas sobretudo à sua motivação para a abordagem às mesmas, pelo que se torna imperativo tornar as demonstrações significativas para aqueles, explorando algumas das suas funções.

Mais do que o rigor, enfatizado pelo movimento da matemática moderna, nos anos 50/60 do século passado, Hanna (2000) realça a sua importância enquanto caminho para uma "efetiva compreensão matemática" (p. 7). Significa isto que a demonstração não serve, apenas, fins de justificação, mas, sobretudo, de um conhecimento mais aprofundado, pois, como referido pela autora, "a melhor demonstração não é apenas que *aquilo* é verdadeiro, mas também *porque* é que aquilo é verdadeiro" (p. 8). Deste modo, e em contexto de sala de aula, o grande desafio ao ensino da demonstração consiste na sua própria justificação, o que acaba por conceder prioridade à função de explicação da mesma.

É importante que os alunos compreendam que só através da demonstração é possível obter uma explicação cabal, isto é, verificar uma conjetura (De Villiers, 2001). Associada à confirmação, a demonstração é efetivamente a única forma de verificação de uma proposição. Embora mediante a exploração com casos particulares possamos alcançar um elevado grau de convicção acerca da validade de uma conjetura (De Villiers, 2001; Hanna, 2000), "a validade dos resultados matemáticos depende, em última instância, da demonstração" (Hanna, 2000, p. 12) e é mediante esta que o conhecimento matemático adquire o grau de certeza que o caracteriza, devendo esta ideia ser incorporada pelos alunos.

Reforçando esta linha de pensamento, há que referir que há muito do raciocínio dedutivo, base da demonstração, na própria exploração matemática e que, em última análise, apesar de atividades separadas, a exploração e a prova completam-se e reforçam-se no desenvolvimento do conhecimento e na aprendizagem da matemática. A complementaridade entre argumentos heurísticos e demonstrações corretas justifica uma outra função da demonstração, que pode ser utilizada em sala de aula, que é a função do desafio intelectual. Após um primeiro momento de exploração heurística, o professor pode e deve motivar os alunos no sentido de tentar elaborar uma demonstração ou, pelo menos, acompanhar o desenvolvimento de uma (Hanna, 2000). Despertar nos alunos a necessidade da demonstração, após uma exploração mais empírica, pode ser uma boa forma de os envolver neste processo (Stylianides & Stylianides, 2008) e um poderoso estímulo para aquisição de hábitos de pensamento, na medida em que o aluno é conduzido à demonstração a partir da experiência de um problema (Dewey, 1997).

Uma outra função especialmente significativa em sala de aula é a da demonstração como forma de comunicação, associada à sua dimensão social (Rodrigues, 2009). Efetivamente, a demonstração corresponde "a um argumento matemático, uma sequência de asserções relacionadas, a favor ou contra uma proposição" (Stylianides & Stylianides, 2008, p. 107), implicando, por conseguinte, uma aceitação consensual, por parte de uma determinada comunidade de aprendizagem e/ou científica, em torno do conjunto de fundamentos de partida (definições, lemas,...), consenso que se deve estender aos modos de argumentação (como se desenvolve) e formas de representação (como se expressa) utilizadas, bem como à demonstração como um todo. Deste modo, a demonstração em si mesma pode surgir como potenciadora e como momento real de concretização de uma aprendizagem pelos pares, cuja base, recordamos, consiste em convencer os pares com bons argumentos, o que nos remete para uma outra função da demonstração que é a do convencimento, traduzida no estabelecer a verdade de uma conjetura (De Villiers, 2001), neste caso através de um trabalho colaborativo.

Também Harel e Sowder (1998, 2007) usam o termo demonstração, não no sentido matemático estrito do mesmo, mas como aquilo que estabelece a verdade de uma proposição para um indivíduo ou comunidade. Esta definição evidencia a subjetividade da perspetiva dos autores, ao deixar claro que o que para um indivíduo ou comunidade pode ser considerado demonstração pode não o ser para outros e, até para os mesmos indivíduos, pode modificar-se ao longo do tempo. O mesmo acontece com o conceito de esquema de demonstração, o qual é detalhado na próxima secção. É sabido que os alunos constroem conhecimento novo apoiado no que já têm (Piaget, 1952), o que também no contexto da demonstração implica que o aluno irá refinar gradualmente o seu conhecimento e capacidade de demonstrar. Fica também claro que o ensino e a aprendizagem da demonstração se adequa a qualquer nível de escolaridade.

2.2. *Esquemas de Demonstração*

A perspetiva de Harel e Sowder (1998, 2007) apoia-se no conceito de esquema de demonstração, que é definido como o que constitui autoconvencimento e persuasão para um indivíduo ou comunidade. Dada uma afirmação, esta pode ser considerada uma conjetura ou um facto por um indivíduo, dependendo da sua certeza sobre a veracidade da mesma. Portanto, uma conjetura passa a facto para um determinado indivíduo logo que este a considere verdadeira. Ao processo usado pelo indivíduo (ou comunidade) para eliminar as dúvidas sobre a verdade da afirmação chamam processo de demonstração. Este admite dois subprocessos, um de autoconvencimento (relacionado com a eliminação das próprias dúvidas sobre a veracidade da afirmação) e outro de persuasão (usado por esse indivíduo ou comunidade para eliminar as dúvidas de outros sobre a verdade da afirmação), como referem Harel e Sowder (1998, 2007).

A observação das ações de alunos no seu processo de demonstração efetuadas por Harel e Sowder (1998) permitiram-lhes estabelecer as categorias dos esquemas de demonstração, as quais representam níveis cognitivos diferentes do desenvolvimento matemático dos alunos. As categorias que recordamos na Tabela I, cuja descrição foi adaptada de Kanellos, Nardi e Biza (2018), não são mutuamente exclusivas, pois o mesmo indivíduo pode manter mais do que um esquema de demonstração. A ideia de combinações de esquemas de demonstração surge no estudo de Kanellos, Nardi e Biza (2018), que refinou a perspetiva de Harel e Sowder (1998, 2007). No contexto do ensino não superior, os primeiros autores depararam-se com oito combinações dos esquemas de demonstração propostos por Harel e Sowder (1998, 2007).

TABELA I
Classificação dos esquemas de demonstração (ED) segundo Harel e Sowder (1998, p. 245)

Categorias	*Subcategorias*	*Descrição*
ED de convicção externa		*As conjeturas são validadas por recurso a fatores externos, como:*
	Autoritário	a autoridade de outro (pessoa ou material)
	Ritual	o ritual da argumentação apresentada
	Simbólico não referencial	a forma de escrita simbólica da argumentação
ED empíricos		*As conjeturas são validadas com recurso à experiência.*
	Indutivo	A argumentação baseia-se num ou mais exemplos, em medições diretas, em concretizações de variáveis, etc.
	Percetual	A argumentação baseia-se em perceções (entendimento sensorial)
ED dedutivos		*As conjeturas são validadas para todos os casos (generalidade). A argumentação é organizada em etapas apropriadas para alcançar o objetivo final (pensamento operacional) e é baseada em regras lógicas (inferência lógica)*
	Transformativo	A argumentação envolve as características de generalidade, pensamento operacional e inferência lógica (atrás referidas)
	Axiomático	Acrescenta à anterior o reconhecimento da fundamentação axiomática da teoria matemática correspondente

Vários estudos mostram que os esquemas de demonstração empíricos são os mais utilizados pelos alunos dos diferentes níveis de ensino (Chazan & Lueke, 2009; Healy & Hoyles, 2000; Recio & Godino, 2001; Rodrigues, 2009), ficando convencidos que com um ou alguns exemplos demonstram a validade de certa afirmação e, em contrapartida, apresentam grandes dificuldades na compreensão da prova através de um contraexemplo. Recio e Godino (2001) concluíram que alunos universitários espanhóis evidenciaram limitações no uso espontâneo de esquemas de demonstração dedutivos para demonstrar proposições matemáticas elementares.

Lee (2016), por considerar que os estudos existentes não estudaram com profundidade a demonstração da falsidade de proposições e por entender que faltava perceber certas nuances cognitivas manifestadas pelos alunos nas demonstrações que apresentavam, desenvolveu um estudo que lhe permitiu estabelecer categorias mais finas para os esquemas de demonstração dos alunos. Esta categorização mais fina de Lee (2016) complementa a estabelecida por Harel e Sowder (1998, 2007).

No que respeita à construção de esquemas de demonstração dedutivos este autor classificou-os em sete níveis (de 0 a 6 por ordem crescente) que traduzem uma progressão através de quatro fases, a saber: tentativas que falham ao relacionar antecedente e consequente (nível 0); demonstrações baseadas em exemplos ou erros de raciocínio lógico (níveis 1 e 2); demonstrações baseadas em inferências dedutivas incompletas (níveis 3 e 4); demonstrações baseadas em inferências dedutivas coerentes (níveis 5 e 6).

TABELA II
Classificação dos esquemas de demonstração dedutivos (EDD) (Lee, 2016, p. 33)

Nível	*Características*	*Descrição*
0	Tentativas irrelevantes ou minimais em inferências	Não sabe como provar ou apela à convicção em fontes de conhecimento externas
		Incapaz de relacionar o antecedente e o consequente com exemplos
1	Utilização novata de exemplos ou raciocínio lógico	Conclui que a implicação é verdadeira (ou falsa incorretamente) recorrendo a um ou mais exemplos, ou a um exemplo incorreto, ou a um contraexemplo
		Falsifica a implicação “se P então Q” através de raciocínio lógico incorreto, isto é, “se não P então não Q”
		Obtém uma propriedade matemática que não está relacionada com a implicação

2	Utilização estratégica de exemplos para raciocinar	Gera exemplos ao acaso ou por amostragem baseada em casos, ou casos extremos
		Utiliza propriedades matemáticas inferidas a partir de exemplos gerados para obter conclusões
3	Utilização de inferências dedutivas com falhas graves na coerência lógica e na validade	Deduz propriedades matemáticas relevantes mas faltando uma ou duas inferências dedutivas para provar a implicação
		Deduz que a implicação é verdadeira para alguns casos do antecedente mas omite outros casos
4	Utilização de inferências dedutivas com falhas menores na coerência lógica e na validade	Gera uma cadeia de inferências dedutivas para justificar conclusões, mas uma ou duas inferências podem ser interpretadas como indutivas, devido a insuficiente fundamentação, ou como erros de escrita
		Apresenta desorganização na cadeia de inferências dedutivas
5	Construção de demonstrações dedutivas informais	Gera uma cadeia de inferências dedutivas para justificar a implicação utilizando justificações informais
6	Construção de demonstrações dedutivas utilizando representações formais	Gera uma cadeia de inferências dedutivas para justificar a implicação utilizando representações formais

Quanto à construção de esquemas de demonstração por construção de contraexemplo, Lee (2016) estabeleceu seis níveis, de 0 a 5 por ordem crescente, também estes traduzidos em quatro fases de progressão similares às anteriores. Mais detalhes podem ser consultados na referência citada.

2.3. *Representação e significação em processos de raciocínio matemático*

Mata-Pereira e Ponte (2011, 2013) apresentam um quadro conceptual para o estudo do raciocínio matemático que envolve os processos de representação e significação (*sense making*), o qual está sintetizado no esquema da Fig. 1 e cujas componentes, e suas relações, passamos a detalhar.

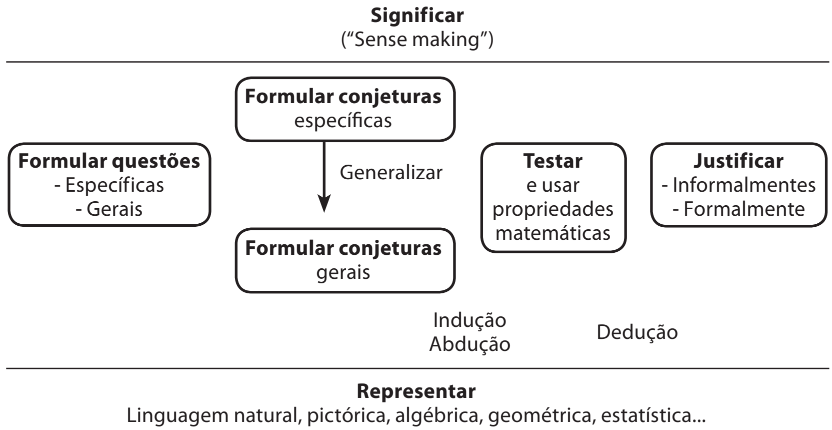


Figura 1. Quadro conceptual para o estudo do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 20)

De acordo com Mata-Pereira e Ponte (2013), a definição de raciocínio matemático não é consensual entre os educadores matemáticos. No estudo agora apresentado adota-se a definição mais lata, considerando o raciocínio matemático como o processo de usar informação conhecida para obter informação nova, o qual pode ser de tipo dedutivo, indutivo e abdutivo (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Raciocinar matematicamente envolve formular e enunciar questões, formular e testar conjeturas (incluindo generalizações) e produzir justificações. A formulação de conjeturas gerais a partir de casos particulares envolve, primordialmente, o raciocínio indutivo, mas também o raciocínio abdutivo pode ser, e é, usado para estabelecer hipóteses explicativas de factos observados. Por sua vez, o raciocínio dedutivo é usado na testagem das conjeturas e na construção das justificações. As justificações têm níveis de complexidade diferentes, a saber: (i) não justificar; (ii) apelar à autoridade externa; (iii) utilizar evidência empírica; (iv) utilizar um exemplo genérico; e (v) justificar dedutivamente (Lannin, 2005). Os estudos que levaram ao estabelecimento destes níveis basearam-se em estudos empíricos com alunos do Ensino Básico.

O facto de os conceitos matemáticos serem abstratos implica que, quer para pensar neles, quer para os comunicar, se tem de recorrer a representações. Seguimos a definição de representação matemática de Goldin (2008): configuração que pode substituir uma entidade de qualquer forma. As representações mais usadas são as palavras (linguagem verbal), os símbolos numéricos e algébricos (linguagem simbólica, também designada algébrica) e imagens, tabelas, gráficos e esquemas (linguagem visual, também designada pictórica), as quais serão as consideradas neste estudo. Outros autores, como Mata-Pereira e Ponte (2011, 2013), discriminam mais os tipos de representações explicitando, entre outras, a linguagem geométrica e a linguagem estatística. Todas estas representações pertencem a sistemas de linguagem diferentes, com códigos e regras próprios.

De acordo com Duval (2006a, 2006b) há dois tipos de transformação de representações, estreitamente ligadas com o raciocínio matemático: tratamentos e conversões. Tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo sistema de linguagem e conversões são transformações de uma representação, num dado sistema de linguagem, noutra representação equivalente, mas noutro sistema de linguagem. Segundo Duval (2006b) e Presmeg (2006) as conversões entre representações suportam e promovem a abstração matemática e o raciocínio matemático. No entanto, os mesmos autores e outros, como Callejo e Zapatera (2014), consideram que a conversão entre representações é a atividade cognitiva menos espontânea e a mais difícil.

Esta interligação de componentes só funciona se estiver embebida num processo de significação, no sentido de que o desenvolvimento da compreensão da situação, contexto ou conceito em estudo seja conseguido efetuando conexões com o conhecimento prévio do aluno (NCTM, 2009, p. vii). Para tal é essencial conhecer o *background* do aluno, o nível de desenvolvimento e experiência matemática em que se encontra. As representações e transformações de representações são a forma visível do raciocínio matemático e, portanto, é através delas que o professor e o investigador em educação matemática pode aceder e analisar o raciocínio do aluno. Em geral, estas características variam de aluno para aluno numa mesma turma o que dificulta o papel do professor. Özkan, Tepedeldiren e Ünal (2011) defendem que uma forma de contornar esta dificuldade é recorrer a múltiplas representações na abordagem de um mesmo conceito.

3. Metodologia

3.1. *Opções metodológicas*

A abordagem seguida foi qualitativa e interpretativa, por um lado, por pretendermos estudar um fenómeno no seu ambiente natural e em toda a sua complexidade (Bogdan & Bilken, 2010) e, por outro lado, por considerarmos que os objetos e os acontecimentos não têm significado só por si. Como refere Yin (2009), os significados dos objetos e dos acontecimentos, geralmente não diretamente observáveis nem facilmente perceptíveis, são conferidos pelos indivíduos.

O *design* de investigação escolhido foi o estudo multicasos. O estudo de caso caracteriza-se pela compreensão aprofundada de um fenómeno contemporâneo, proporcionando os estudos multicasos a comparação entre casos diferentes (Baxter

& Jack, 2008). Saliente-se ainda que "as evidências obtidas com casos múltiplos são frequentemente consideradas mais convincentes e, globalmente, o estudo é olhado como sendo mais robusto" (Herriot & Firestone, como citados em Yin, 2009, p. 53).

Selecionámos três alunos para garantir diversidade entre estes. A seleção dos alunos caso foi feita de entre os alunos de uma unidade curricular de Álgebra Linear, do 1.º ano de uma licenciatura do ensino superior, que tiveram a primeira autora como professora no ano letivo a que se refere o estudo e no ano letivo precedente. Os nomes empregues para referenciar os alunos caso, Alice, Maria e Pedro, são fictícios de modo a garantir questões de ordem ética.

Os três alunos estavam a repetir a unidade curricular por terem reprovado no ano letivo anterior com classificações finais entre 7 e 8 numa escala de 0 a 20 valores. No final da primeira aula do ano letivo do estudo, os três alunos referiram à professora que queriam esforçar-se. Também mencionaram, tal como outros alunos, ter gostado do método de ensino-aprendizagem, exemplificado nessa aula, diferente do ano letivo anterior (aulas tradicionais).

Da conversa informal, a professora ficou a saber que os três alunos tinham tido algum contacto com demonstrações no ensino secundário. Essencialmente, os três associavam essas experiências a algo feito pelo professor, embora em distintos conteúdos. A experiência e os conteúdos associados ao primeiro contacto com a demonstração, e o nível de desempenho em matemática, no ensino secundário foram os critérios de seleção diferenciadores considerados (ver Tabela III).

TABELA III
Critérios diferenciadores dos alunos caso

	Alice	*Maria*	*Pedro*
Nível de desempenho em matemática no ensino secundário (de 0 a 20 valores)	Médio classificações entre 12 e 14	Suficiente classificações entre 10 e 12	Bom classificações maioritariamente iguais ou superiores a 15
Conteúdo(s) que associa ao contacto com a demonstração no ensino secundário	Geometria	Funções e Álgebra	Probabilidades Números Complexos
Experiência que associa ao contacto com a demonstração no ensino secundário	subdividir uma figura geométrica noutras figuras geométricas para mostrar algo geral	mostrar que a área de uma figura geométrica é dada por uma função definida por f(x)	demonstrar propriedades em tarefas de Probabilidades e de Números Complexos

A recolha dos dados foi feita com recurso a: análise documental, observação participante e entrevista. No âmbito da primeira, analisaram-se produções da Alice, da Maria e do Pedro em tarefas propostas nas aulas, em testes escritos e em trabalhos de casa, estes últimos com resolução escrita à mão e digitalização da mesma recolhida via plataforma *Moodle*. Fruto da observação participante, foram tomadas notas de campo pela investigadora relativamente à prestação dos alunos caso.

Para além da conversa informal já referida, foi realizada uma entrevista semiestruturada no final do semestre a cada aluno caso, orientada por un guião, gravada em áudio e depois transcrita, em que as produções nas tarefas selecionadas para o presente trabalho foram objeto de discussão. Na entrevista procurou-se aceder aos processos de raciocínio dos alunos, tentando clarificar aspetos ambíguos e motivos inerentes aos esquemas de demonstração nas produções, sua representação e sua significação.

Em complemento à descrição dos factos, através de ciclos de observação, reflexão e interpretação, procedemos à interpretação dos factos com base no enquadramento teórico. Após a análise de cada aluno caso separadamente, com vista à elaboração de uma síntese e à enunciação de proposições interpretativas, levámos a cabo a confrontação dos três alunos caso para destacar elementos, por um lado, de homogeneidade e, por outro lado, de heterogeneidade.

Uma base para a análise dos dados é constituída pelas categorizações de esquemas de demonstração de Harel e Sowder (1998, 2007) e, de forma mais fina, de Lee (2016). Em particular, atendendo a que as tarefas cujas produções analisamos envolvem proposições que, pelo enunciado, têm assumidamente valor lógico verdade, seguimos as categorias para esquemas de demonstração dedutivos e as suas descrições.

Tendo em conta a noção de representação matemática de Goldin (2008) e o quadro conceptual de representação e significação de Mata-Pereira e Ponte (2013), analisamos as representações utilizadas e os significados atribuídos pelos alunos caso nos esquemas de demonstração das suas produções. Com os modos de representação de Duval (2006a, 2006b), procuramos ainda a presença de processos de tratamento e de conversão entre representações.

3.2. *Características das aulas*

Nas aulas foram usadas as linguagens natural, simbólica e visual, por a unidade curricular incluir Álgebra Linear e alguns tópicos de Geometria Analítica, mas, sobretudo, para proporcionar o contacto dos alunos com várias representações. Apesar de se pretenderem produções com esquemas de demonstração dedutivos, a ordem dos conteúdos de Álgebra Linear seguiu uma abordagem cálculo-abstração

(Harel, 1987). Começar com matrizes e sistemas de equações lineares permite uma aprendizagem gradual no sistema de linguagem da Álgebra, preparando a compreensão de noções tradicionalmente difíceis para os alunos – espaços vetoriais e aplicações lineares.

As aulas foram norteadas pela aprendizagem pelos pares (Crouch & Mazur, 2001; Beites & Romano, 2014), método de ensino-aprendizagem que remete para a constituição de comunidades de aprendizagem, que são, desde há vários anos, encorajadas por educadores matemáticos construtivistas. Pretendemos assim dar importância ao conhecimento informal dos alunos e dos seus conceitos espontâneos, bem como ao trabalho de colaboração dos alunos com os seus pares em tarefas matemáticas, no sentido de encorajar o questionamento individual e em grupo, a comunicação de ideias matemáticas e a exploração conjunta (Kennedy, 2012).

Visámos também a apropriação das tarefas, o despoletamento do diálogo e a articulação dos esforços de compreensão (Bruce & Bloch, 2013), com o intuito da criação de situações de aprendizagem contrárias às propostas pela educação tradicional, marcadas pelo papel passivo e recetivo do aluno. Tentou-se, assim, uma demarcação de um ensino baseado na mera transmissão de conteúdos e centrado no professor (Branco, 2014). Com efeito, a criação de comunidades de aprendizagem amplifica o espaço de aprendizagem, transformando-o "num espaço no qual todas as pessoas podem ensinar e aprender" (Catela, 2011, p. 37).

Previamente a uma aula, os alunos leram sobre o tópico a abordar e resolveram um trabalho de casa associado, como o que consta na Fig. 2.

TPC3: leitura das páginas 39 a 44 de gaalt0.pdf e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes

1. Considere o exemplo 1.13. de gaalt0.pdf. Escreva a forma escalonada reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações dado e, recorrendo às características desta e da matriz simples, justifique que o referido sistema é impossível.

2. Dado um sistema de equações lineares $AX = B$, car(A) pode ser maior que car([A|B])?

3. O que achou difícil ou confuso na leitura das páginas indicadas? Se nada foi difícil ou confuso, então diga o que lhe pareceu mais interessante.

Figura 2. Enunciado do trabalho de casa 3 (TPC3)

Apesar de existirem momentos expositivos pelo professor, em geral de curta duração, na aula houve momentos de votação individual com cartões coloridos, em que cada um começou com uma questão concetual despoletadora de discussão, como a da Fig. 3.

Qual das matrizes que se seguem está na forma escalonada reduzida por linhas?

A) $[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Figura 3. Enunciado de uma questão conceptual

A percentagem de respostas corretas guiou a tomada de decisão da professora quanto ao passo seguinte, frequentemente discussão dos alunos com os seus pares (Beites & Romano, 2014; Beites & Serôdio, 2015; Crouch & Mazur, 2001).

3.3. *Características das tarefas*

Como "um único tipo de tarefa dificilmente atingirá todos os objectivos curriculares valorizados pelo professor" (Ponte, 2005), as tarefas propostas ao longo do semestre foram diversificadas. No que se segue, apresentamos as propostas que envolvem proposições de álgebra linear com valor lógico verdade e cujas produções dos alunos caso são analisadas no presente trabalho.

Na tarefa TCAV na Fig. 4, um trabalho de casa, pedia-se uma demonstração matricial da comutatividade da adição de vetores do espaço (pela terminologia das aulas, $\mathbb{R}^3$). Uma resolução passa pela representação algébrica dos vetores com matrizes coluna, ou linha, e pela comutatividade da adição de matrizes demonstrada, no âmbito das propriedades da álgebra matricial, numa aula anterior. Alternativamente, pode-se invocar a comutatividade da adição de números reais nas entradas das matrizes soma resultantes.

Demonstre, recorrendo a uma representação matricial adequada, que a adição de vetores do espaço é comutativa.

Figura 4. Enunciado da tarefa da comutatividade da adição de vetores do espaço (TCAV)

A tarefa TSPI na Fig. 5, de um teste de avaliação, é inspirada num resultado clássico de classificação de sistemas de equações lineares com incógnitas reais. Uma demonstração compreende as seguintes partes: para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução de $DX = E$; se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $X_{\lambda_1} \neq X_{\lambda_2}$; a classificação indeterminado por $\mathbb{R}$ ter um número infinito de elementos. O mencionado resultado, na Fig. 6, e uma demonstração constavam das páginas para leitura no TPC3, preparatório para uma das aulas.

Sejam $D \in M_{m\ \ n}(\mathbb{R})$, $E \in M_{m\ \ 1}(\mathbb{R})$. Suponha que o sistema de equações lineares $DX = E$, com X matriz de incógnitas reais, possui duas soluções distintas X_0 e X_1. Mostre que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1$$

é solução de $DX = E$. Como se classifica $DX = E$ quanto ao número de soluções?

Figura 5. Enunciado da tarefa da classificação em sistema possível e indeterminado (TSPI)

As dificuldades reportadas por muitos alunos no TPC3 e na exploração da demonstração na aula, com propriedades da álgebra matricial abordadas, levaram a professora a pedi-la de outra forma (Fig. 5) no teste. Concretamente, foi dada a expressão das soluções de $DX = E$ em função de duas soluções distintas X_0 e X_1, a qual só aparecia na demonstração associada ao enunciado do resultado na Fig. 6. A necessidade de justificar que se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $X_{\lambda_1} \neq X_{\lambda_2}$, por redução ao absurdo ou por contrarecíproco, manteve-se sem pedido explícito.

Sejam A uma matriz $m \quad n$ e B uma matriz $m \quad 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas X_0 e X_1, então ele tem infinitas soluções.

Figura 6. Enunciado da Proposição 1.3 em Santos (2010, p. 43)

Na tarefa TAPL na Fig. 7, um trabalho de casa, pedia-se uma demonstração para uma fórmula da área de um paralelogramo, definido por dois vetores (não paralelos) u e v de $\mathbb{R}^3$, que envolve o produto vetorial desses vetores. Para além do conceito de produto vetorial de vetores do espaço, a resolução passa pela aplicação de uma razão trigonométrica conveniente. Concretamente, há que relacionar a altura do paralelogramo com um dos seus lados e com o ângulo formado pelos vetores u e v.

Mostre que a área de um paralelogramo definido por dois vetores (não paralelos) u e v do espaço é igual à norma do produto vetorial dos referidos vetores.

Figura 7. Enunciado da tarefa da área de um paralelogramo (TAPL)

4. Apresentação de resultados

4.1. *Alice*

Na produção da Fig. 8 para a tarefa TCAV, a Alice começa por escrever o que é pedido em linguagem verbal. Pode observar-se, depois, a conversão para linguagem algébrica com a igualdade $u + v = v + u$, que salienta com recurso à linguagem visual e complementa com a explicitação "para quaisquer u e v". Em nenhuma das linguagens a Alice menciona que os vetores são do espaço, mas, após o tratamento em notação matricial com matrizes coluna de tipo $3 \quad 1$, nota-se que assim os considera.

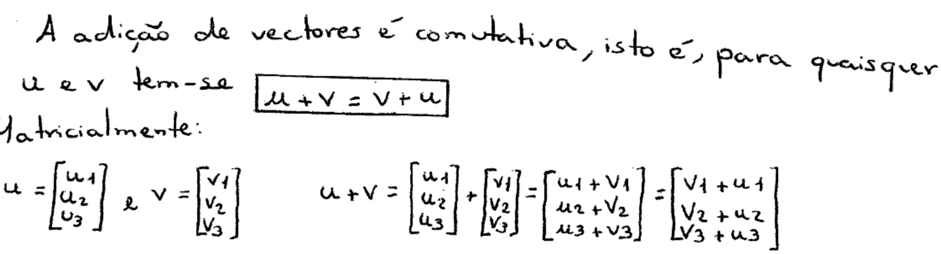


Figura 8. Primeira parte da resposta da Alice à tarefa TCAV

Efetua a adição das matrizes que utilizou para representar u e v, obtendo as entradas da matriz soma de u e v. Na última igualdade na Fig. 8, para $i \in \{1,2,3\}$, a Alice substitui $u_i + v_i$ por $v_i + u_i$ mas não escreve, por palavras, que utiliza a comutatividade da adição de números reais. Deste modo, obtém as entradas da matriz soma de v e u sem escrever a expressão $v + u$. Apresenta assim dedução coerente num esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5 pela informalidade.

A Alice indica, na entrevista, a propriedade comutativa da adição de matrizes com entradas reais para justificar a terceira igualdade após $u + v$. Diz "se nós tivermos a soma de uma matriz com outra e nós fizermos o inverso, acontece o mesmo", onde inverso significa "Trocar a ordem das matrizes". Refere que não fez o tratamento para $v + u$ por escrever "logo o resultado", mas não é um esquema de demonstração de convicção externa, autoritário, com nível 0, por não apelar a conhecimento externo.

Produz ainda o exemplo na Fig. 9, onde, como diz na entrevista, vê os vetores do plano como "vetores do espaço com zero na terceira coordenada que não é preciso escrever", o que ilustra um tratamento. Mas não conclui daí o que pretendia, excluindo um esquema de demonstração empírico, indutivo. Também não há evidências de utilização novata de exemplos ou raciocínio lógico (nível 1) ou de utilização estratégica de exemplos para raciocinar (nível 2).

Sendo $u = (1,3)$ e $v = (5,8)$

$$u = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$$

$$u + v = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+5\\3+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+1\\8+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\11\end{bmatrix}$$

Figura 9. Segunda parte da resposta da Alice à tarefa TCAV

Não parece ter claro até onde deve chegar o esquema para demonstrar, mas na entrevista clarifica que "a demonstração seria só esta parte" (Fig. 8). A Alice refere ainda que o exemplo serve "para confirmar que aquilo que disse anteriormente estava bem", pois "por letras torna-se mais complicado". Assim, tem-se uma combinação de esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, com um exemplo, este para confirmar o que fez em linguagem simbólica no primeiro.

A Alice escreveu o que apresentamos na Fig. 10 em resposta à tarefa 3 do TPC 3 (Fig. 2), indicando, sem especificar, o que não fora claro no estudo pré-aula. Na entrevista recorda-se que teve dúvidas nessa demonstração, posteriormente solicitada na forma da tarefa TSPI do Teste 1 (Fig. 5).

O que achei mais confuso foi: a demonstração da página 44.

Figura 10. Resposta da Alice à tarefa 3 do TPC3

Na aula em que a demonstração foi explorada, a Alice fez poucas intervenções ao longo da mesma mas reagiu à questão preparatória colocada pela professora. Perante como justificar, sem resolver, que 2 é solução da equação $3x = 6$, a Alice respondeu dizendo que havia que substituir x por 2 e ver que se obtém uma proposição verdadeira.

Na produção da Fig. 11 para a tarefa TSPI, a Alice começa por transcrever alguns dados do enunciado em linguagem algébrica, nomeadamente, $DX = E$ e $X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1$. Escreve ainda $X = \begin{bmatrix}X_0\\X_1\end{bmatrix}$, tentativa de conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica que torna incorretamente X_0 e X_1 matrizes de tipo n 1 que são soluções de $DX = E$, em entradas de X – que passa a ser uma matriz de matrizes.

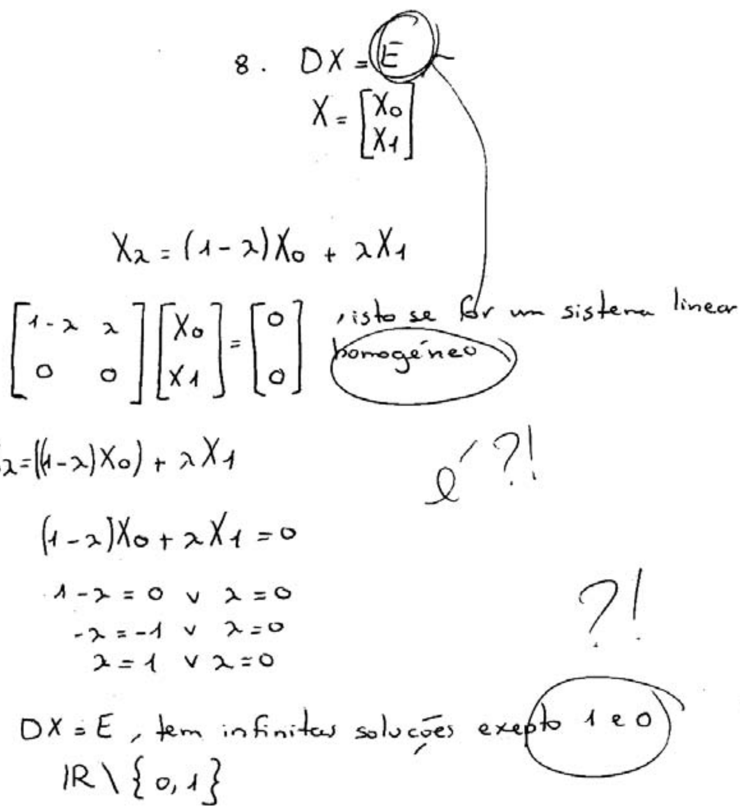


Figura 11. Resposta da Alice à tarefa TSPI, com anotações da professora

Na entrevista, perante a questão de como escrever simbolicamente que X_0 é solução de $DX = E$, a Alice realiza a conversão em linguagem verbal: "o DX_0 ... Ia ser o meu E. E o DX_1 ia ser também o meu E.". Apesar da escrita precedente de X, a Alice parece saber testar se um elemento do conjunto em que está a trabalhar é solução de uma equação no mesmo.

Contudo, quanto a X_0 e a X_1, refere: "pensei mal", "tinha duas soluções distintas", "eu associei que só poderiam ser mesmo essas". Para além de soluções, atendendo à escrita $\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\ X_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, a Alice parece considerar X_0 e X_1 como componentes de uma solução. Refere que X_0 e X_1 "São números.", não atribuindo um significado apropriado a X_0 e a X_1. O mesmo ocorre noutras situações da Fig. 11.

A referida igualdade matricial, acompanhada da consideração “isto se for um sistema linear homogéneo”, conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal, é clarificada na entrevista. A aluna diz estar a considerar $DX = 0$, onde 0 é a matriz nula de tipo adequado, e refere ter pensado num caso mais simples para tentar chegar às soluções, mas estas já estavam no enunciado (Fig. 5).

A entrevista ajuda a comprovar a combinação de esquemas de demonstração: simbólico, não referencial, com nível 0; de convicção externa, autoritário e ritual, com nível 0. O apelo a fontes de conhecimento externas pode ser apreciado por a demonstração ter sido explorada nas aulas: “neste contexto, sei que... iriam ser infinitas soluções”, num esquema com o significado de facto conhecido.

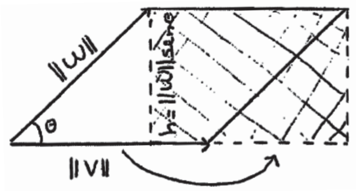
A manipulação simbólica, que a Alice não é capaz de esclarecer e atribuir significação na entrevista, leva a aluna a escrever depois que $\lambda = 1 \vee \lambda = 0$. Segundo a Alice, atendendo à infinitude patente no enunciado e por ter feito “um exercício (...) que era dentro do mesmo género”, como um rito, conclui que o conjunto-solução é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Assim, deixa subentendido que está a pensar em números reais.

Na entrevista, no seguimento da escrita $DX_0 = E$ e $DX_1 = E$ que representa simbolicamente que X_0 e X_1 são soluções de $DX = E$, a Alice refere que teria de multiplicar D por X_λ e mostrar que dá E. Acaba por chegar a esta matriz recorrendo a propriedades da álgebra matricial, embora tenha pensado utilizar $D^{-1}E$ que deduz a partir de $DX = E$.

A dedução precedente é feita apesar de D ser uma matriz retangular, voltando a utilizar os símbolos sem referência à sua função e ao significado associado. Confrontada com os tipos das matrizes, diz que só poderia usar D^{-1} se $m = n$. Mesmo que pudesse escrever $D^{-1}E$, a Alice não tem em conta que em DX_λ já não tem onde substituir X por $D^{-1}E$.

Na produção da Fig. 12 para a tarefa TAPL, a Alice usa linguagem visual para representar um paralelogramo definido por dois vetores não paralelos. No esboço destaca, em linguagem algébrica, o ângulo por estes formado, as suas normas e a altura h do paralelogramo. O tratamento do triângulo retângulo destacado, para obter um retângulo assinalado a sombreado e com uma seta, sugerindo uma translação do triângulo retângulo, é feito em linguagem visual.

Em linguagem algébrica, escreve a norma do produto vetorial dos vetores em função das suas normas e do seno do ângulo por eles formado. Substitui depois este por uma expressão obtida por conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica. Após alguns tratamentos em linguagem algébrica, chega a uma expressão que converte para linguagem verbal: “Área do paralelogramo”.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{\|w\|}$$

$$\begin{aligned}\|v \times w\| &= \|v\|\|w\| \operatorname{sen}\theta \\ &= \|v\| \cancel{\|w\|} \frac{h}{\cancel{\|w\|}} \\ &= \|v\| . h \implies \text{Área do paralelograma}\end{aligned}$$

Figura 12. Resposta da Alice à tarefa TAPL

Pelas deduções lógicas, através de inferências dedutivas coerentes, mas com informalidade, o esquema de demonstração na produção da Fig. 12 é, pelo exposto, dedutivo, transformativo, com nível 5.

4.2. *Maria*

Na produção para a tarefa TCAV da Fig. 13, um esquema de demonstração dedutivo, transformativo com nível 5, a Maria usa a linguagem algébrica para escrever o que parecem ser dois vetores arbitrários do espaço com notação matricial. Na entrevista alude ao enunciado da tarefa, onde consta que são vetores do espaço, para justificar a omissão do conjunto a que pertencem as matrizes coluna escritas. Ainda assim, a respeito da produção, salienta que a informação relativa às entradas “devia cá estar mas não está”, “Pertencem ao conjunto ℝ.”.

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$V + U = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ v_3 + u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = U + V$$

Figura 13. Resposta da Maria à tarefa TCAV

Apesar da igualdade central e dos tratamentos dos vetores em linguagem algébrica, a Maria não invoca a comutatividade da adição de números reais em linguagem verbal. Na entrevista refere a propriedade após exemplificar: “Adicionar, por exemplo, o 2 com o 3 (...) dá 5, há-de ser a mesma coisa que adicionar o 3 com o 2.", pois "A ordem na soma não interessa". A investigadora pergunta-lhe, então, se poderia ter resolvido a tarefa só com números específicos, mas ela é peremptória ao afirmar que não, por se tratar do "caso geral" a demonstrar.

A Maria não apresentou dúvidas na resposta à tarefa 3 do TPC 3 (Fig. 2), escrevendo o que apresentamos na Fig. 14. Nas aulas, ela respondeu às várias perguntas que a professora foi colocando como forma de construir os vários passos da demonstração, que mais tarde seria pedida na tarefa TSPI do Teste 1 (Fig. 5).

$$car(A) = 2 = car([A|B]) < 3 = ordem(A)$$

Figura 14. Resposta da Maria a 3 do TPC3

Na produção em linguagem algébrica para a tarefa TSPI na Fig. 15, a Maria escreve as conversões $DX_0 = C$ e $DX_1 = C$ da hipótese (X_0 e X_1 são soluções de $DX = C$). A entrevista permite-nos confirmar que ela aplica, sem ter escrito em linguagem verbal, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de matrizes no desenvolvimento de DX_λ.

A Maria realça na entrevista que λ e $1 - \lambda$ são números reais, o que permite escrever a terceira igualdade no desenvolvimento de DX_λ. Refere-se à propriedade da álgebra matricial nos casos em que a aplicou através de uma representação informal em linguagem verbal. Por exemplo, diz "posso passar para o lado esquerdo" para a permuta de D e $1 - \lambda$.

Para fundamentar as últimas igualdades, menciona que "já tinha visto anteriormente que DX_0 era igual a C" e "substituía e fazia o mesmo para o DX_1". Numa conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal, com a designação distributividade da multiplicação de matrizes em relação à adição de escalares, justifica o passo seguinte na entrevista.

Refere depois que "tinha que atribuir vários valores para λ, para ver... as soluções", "Se fossem todas diferentes, pronto, infinitas soluções...", "Ele era possível e indeterminado.". Acrescenta: "Se eu obtivesse sempre a mesma solução, seria possível e determinado.", o que, apesar da demonstração feita nas aulas, exclui um esquema de demonstração de convicção externa.

A investigadora vinca a questão de como saber se as soluções são distintas. Quanto a X_0 e X_1, a Maria refere que estava no enunciado. Questiona-a depois sobre se X_2 é distinta de X_0 e de X_1 e, perante a afirmação "É.", como ver. A Maria diz "substituindo valores... Por exemplo, se o X_0 for 2 e o X_1 for 3", não atribuindo, nesse momento, um signficado apropriado aos símbolos matemáticos, mas depois exclama "Eram matrizes coluna!".

Após a digressão da Maria com casos particulares de matrizes coluna para ver que X_2 é diferente de X_0 e de X_1, a investigadora pergunta se poderia escrever todas as soluções X_λ e possibilidades para as matrizes a analisar. Ela diz que "Vão dar todos diferentes.", atribuindo um significado de demonstração implicada por regularidade observada e regularidade esperada ao esquema, mas reconhece a impossibilidade da listagem pela infinitude de números reais.

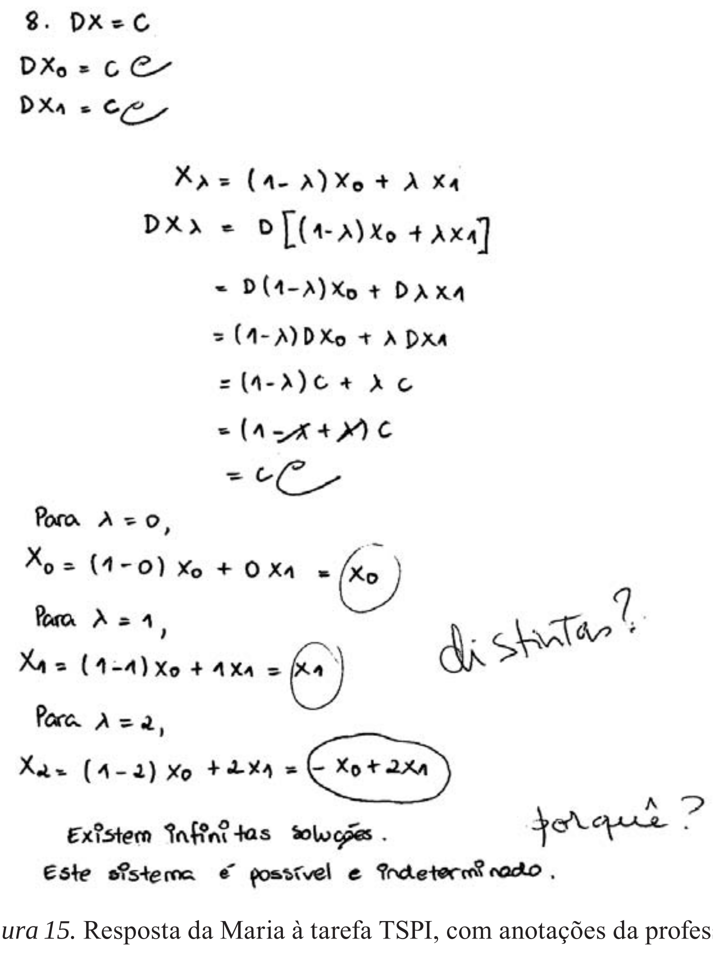


Figura 15. Resposta da Maria à tarefa TSPI, com anotações da professora

A produção na Fig. 15 reúne assim, em simultâneo, características de esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, na parte que se refere a que, para cada λ, X_λ é solução de $DX = C$, e de esquema de demonstração empírico, indutivo, com nível 1, na parte relativa ao número de soluções.

A investigadora, na entrevista, elabora uma redução ao absurdo para fundamentar que X_0 e X_2 são distintas: de $X_0 = X_2$ chega a $X_0 = X_1$, uma contradição. É a própria Maria a referir que $X_0 = X_1$ "É falso", pois "No enunciado já diz.". A investigadora sugere então que a Maria considere dois números reais arbitrários e distintos, λ_1 e λ_2, para a estratégia geral.

Em diálogo com a investigadora, explicando os passos em linguagem verbal, a Maria deduz, em linguagem algébrica, $X_0 = X_1$ a partir de $X_{\lambda_1} = X_{\lambda_2}$. Depois de escrever $X_0 = X_1$ e "X Falso", hesita perante $(\lambda_2 - \lambda_1)X_0 = (\lambda_2 - \lambda_1)X_1$ quando a investigadora lhe pergunta se $\lambda_2 - \lambda_1$ é distinto de zero para simplificar, mas recorda que λ_1 e λ_2 são diferentes.

A redução ao absurdo gera, no entanto, alguma confusão quando a Maria é interpelada para enunciar a conclusão do que fez e que, posteriormente, a investigadora tenta clarificar. Apresentamos o extrato transcrito da evidência da incompreensão do princípio da não contradição subjacente ao método de redução ao absurdo:

I: Tivemos [sic] a fazer uma data de passos e... chegámos à conclusão que isso implica que o X_0 é igual a X_1. Isso é verdade?
M: X_0 ser igual a X_1? É.
I: O que é que nós sabemos do enunciado?
M: Não, sabemos que eles são distintos. Então isto é falso! Pois não...
I: ... (risos)
M: Isto é falso.
I: Isto é falso.
M: X_0... Exato.
I: Então, o que é que isto significará?
M: Significa que, para qualquer que seja [sic] o λ_1 e o λ_2...
I: ...
M: X_0 e X_1 serão sempre distintos.

Na produção da Fig. 16, a Maria começa por utilizar linguagem verbal para recordar a área de um paralelogramo em função da base e da altura deste, escrevendo a fórmula em linguagem algébrica. Apresenta, em linguagem visual, um esboço de um paralelogramo definido por dois vetores u e v não paralelos do espaço (aspeto que não refere formalmente). Neste destaca, em linguagem algébrica, os comprimentos dos vetores, o ângulo formado por estes, e a altura do paralelogramo.

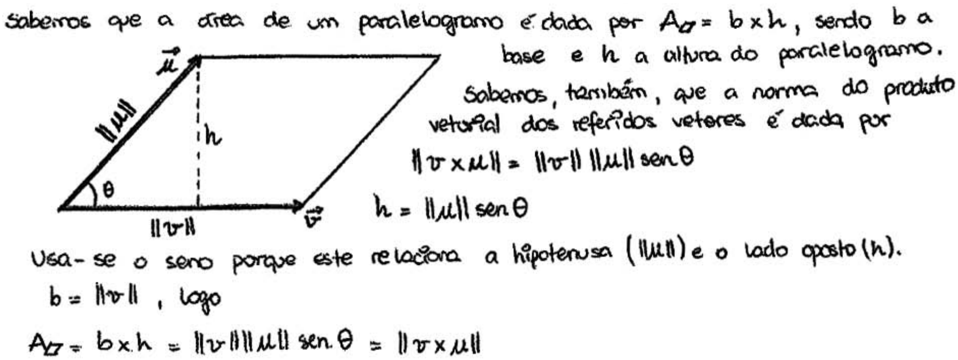


Figura 16. Resposta da Maria à tarefa TPAL

Após uma introdução em linguagem verbal, escreve a norma do produto vetorial dos referidos vetores em linguagem algébrica. Relaciona depois, numa conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica, a altura do paralelogramo com a norma de um dos vetores e a amplitude do ângulo por estes formado. A Maria realça ainda o motivo, recorrendo essencialmente a linguagem verbal, para utilizar a razão trigonométrica seno.

Salienta também, em linguagem algébrica, que a norma do vetor v é igual à medida da base do paralelogramo. Realiza depois um tratamento em linguagem algébrica, transformando a primeira fórmula escrita noutra em que h foi substituído por uma expressão anteriormente deduzida. No final do esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, na Fig. 16, a Maria conclui, em linguagem algébrica, o pretendido.

4.3. *Pedro*

O Pedro começa por escrever o que parecem ser dois vetores arbitrários do espaço com notação de triplos ordenados, o que ele confirma na entrevista em que também refere que u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 são números reais. Na produção da Fig. 17 nota-se o tratamento da notação inicial para a matricial, embora sem escrever o conjunto a que pertencem as coordenadas e as entradas. A referida transformação, dentro do sistema de linguagem algébrica, é assinalada em linguagem verbal através da expressão “Matricialmente”.

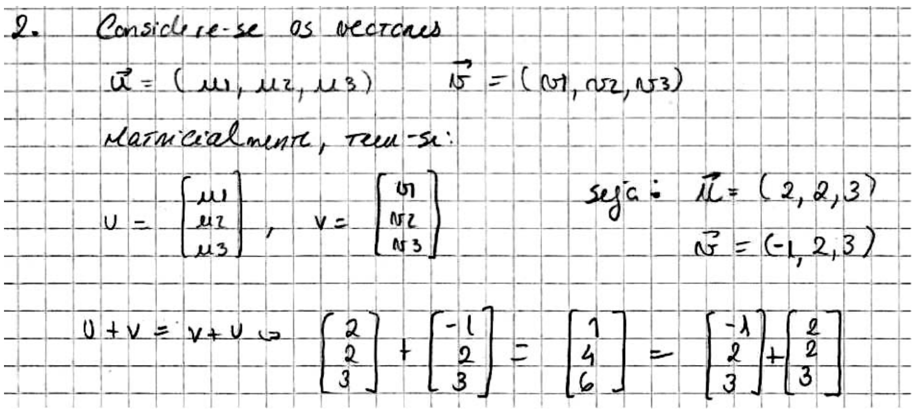


Figura 17. Resposta do Pedro à tarefa TCAV

Considera, depois, dois vetores concretos do espaço em linguagem algébrica, com as mesmas transformação e notação utilizadas para os vetores arbitrários, evidenciando a falta de atribuição de um significado apropriado aos símbolos matemáticos. Vê neste caso particular, efetuando a adição com notação matricial, que a soma não depende da ordem das parcelas na adição dos vetores considerados. Assim, o Pedro apresenta um esquema de demonstração empírico, indutivo, com nível 1. Na entrevista diz que o fez por ser "mais fácil" e para a compreensão dele, e ainda por ser "mais palpável".

Apesar de grande parte da produção da Fig. 17 corresponder a uma argumentação baseada num exemplo, o início da mesma e as respostas precedentes levam a investigadora a perguntar-lhe se o que fez é uma demonstração. Perante a pergunta, o Pedro refere que elaborou uma "demonstração específica, para um caso particular". Na entrevista diz ainda que, para o "caso geral", teria que passar pelas igualdades $u_i + v_i = v_i + u_i$. Menciona que a "adição de matrizes é comutativa", o que vem da comutatividade da adição de "escalares".

Na entrevista, o Pedro escreve um esquema de demonstração dedutivo, transformativo após a conversão das considerações em linguagem verbal para linguagem algébrica. Perante o motivo para não o ter apresentado antes, apoia-se na experiência empírica e na autoridade de outros, nomeadamente, em unidades curriculares distintas da do estudo em que adicionaram vetores: "já tinha percebido"; "tínhamos... em várias disciplinas feito"; "Para mim, somar a mais b ou b mais a iria de [sic] sempre dar o mesmo.". Apesar de não percetível só com a produção, complementada com as explicações dadas na entrevista, o esquema de demonstração na Fig. 17 também é de convicção externa, autoritário, com nível 0.

Ainda relativamente ao motivo, o Pedro esclarece que “Fui à internet, vi isto”, mas não escreveu o esquema de demonstração dedutivo, pois diz que “não sabia se havia de demonstrar assim”. Acrescenta que “transcrever isto para o papel seria surreal, porque para mim não era, de facto, estar a demonstrar. Para mim demonstrar era tipo ter um caso particular, aí sim conseguia demonstrar.”. Refere ainda que “É sempre igual.” quando a investigadora lhe pergunta se a produção na Fig. 17 serve para outros vetores, atribuindo um significado de demonstração implicada por regularidade esperada ao esquema.

O Pedro escreveu o que apresentamos na Fig. 18 em resposta à questão 3 do TPC 3 (Fig. 2), embora sem especificar o que não tinha compreendido. Uma demonstração foi depois solicitada na forma da tarefa TSPI do Teste 1 (Fig. 5).

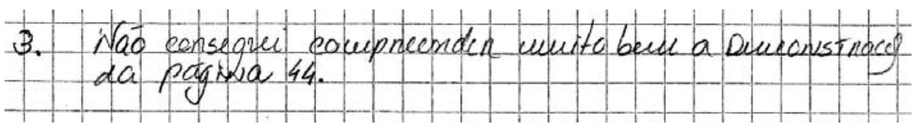
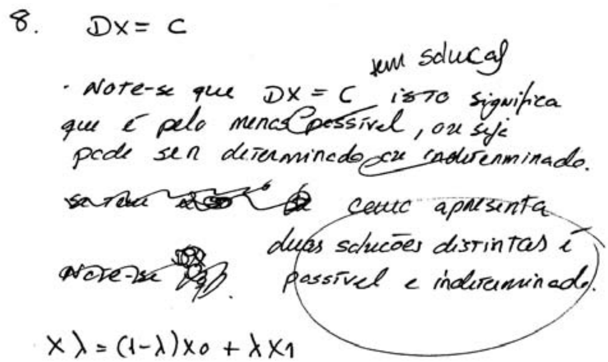

3. Não consegui compreender muito bem a Demonstração da página 44.

Figura 18. Resposta do Pedro a 3 do TPC3

Na aula em que a demonstração foi explorada, o Pedro disse que não sabia como começar e perguntou como é que se pensou em X_λ, o que representava – evidência das dificuldades com a notação. Referiu que havia que substituir X por X_λ em DX, que teria de dar C, e justificou os passos das inferências dedutivas com propriedades da álgebra matricial, mas que não conseguiria fazer sem a pista do X_λ.

Na produção para a tarefa TSPI na Fig. 19, o Pedro começa por transcrever um dado do enunciado em linguagem algébrica: $DX = C$. Com a mesma linguagem, após algumas considerações em linguagem verbal que incluem o significado de ter solução, escreve mais abaixo a expressão, para cada escalar real λ, de X_λ.


8. DX = C

tem solução

· Note-se que DX = C isto significa que é pelo menos possível, ou seja pode ser determinado ou indeterminado.

como apresenta duas soluções distintas é possível e indeterminado.

$X\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1$

Figura 19. Resposta do Pedro à tarefa TSPI, com anotações da professora

Usa linguagem verbal para o tratamento “apresenta duas soluções distintas é possível e indeterminado” de “é pelo menos possível”, configurando um esquema de demonstração de convicção externa, autoritário, com nível 0. A entrevista corrobora a hipótese, pois ele diz “A partir do momento que existe mais do que uma solução, temos um sistema indeterminado.”, não sentindo necessidade de demonstrar e atribuindo o significado de facto conhecido ao esquema.

Na entrevista dá exemplos de soluções atribuindo valores a λ, mas não consegue começar a demonstrar que, para cada λ, X_λ é solução de $DX = C$. Inicialmente, chega a escrever $DX_\lambda = C$, que se quer provar, como parte da hipótese. Fruto do diálogo com a investigadora, acaba por elaborar os passos dessa parte da demonstração em linguagem algébrica.

O Pedro não sente necessidade de provar mais nada, pois se há um número infinito de números reais, então “existem infinitas soluções” dadas por X_λ. Na entrevista, salienta que isso depende do conjunto, o que é correto, mas fala das distintas soluções recorrendo a argumentos empíricos em que concretiza alguns valores de λ.

Por fim, explica a produção da Fig. 20 que não foi avaliada. O Pedro pensou na inversa de D, mas depois deu conta que “podemos não conseguir tirar uma inversa”. Explica que tal poderia suceder por a matriz ser retangular ou por ser quadrada, mas não invertível, pelo que riscou a estratégia de utilização de inversa para resolver um sistema de equações lineares possível.

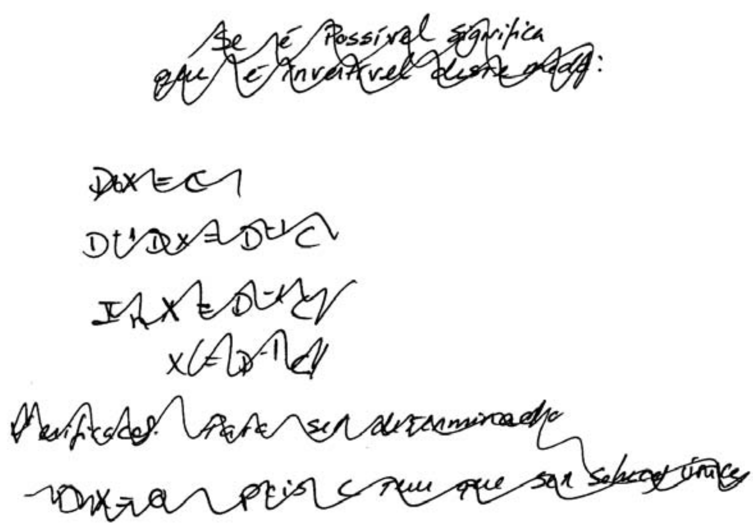


Figura 20. Continuação da resposta do Pedro à tarefa TSPI

Na produção da Fig. 21 para a tarefa TAPL, o Pedro elabora um esquema de demonstração empírico, indutivo, com nível 1. Com efeito, assinala com a expressão “c. q. d.”, em linguagem verbal, que conclui o pretendido a partir de dois vetores concretos do espaço, isto é, valida empiricamente. A escolha recai numa representação bidimensional, em linguagem visual e em linguagem algébrica, pela particularidade das cotas de v e w serem iguais a zero. Na entrevista, atribui o significado de demonstração implicada por regularidade esperada ao esquema.

O Pedro faz uma conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica e relaciona, essencialmente em linguagem algébrica, as áreas do paralelogramo definido por v e w com a área de um triângulo, destacado por tratamento em linguagem visual. Realiza os cálculos com v e w em linguagem algébrica, por dois processos: fórmula a deduzir na tarefa TAPL, parecendo incorrer em circularidade lógica; semi-produto da base pela altura. Nesta usa alguma linguagem verbal, com conversão para a linguagem algébrica, para destacar que está a calcular a área de um triângulo.

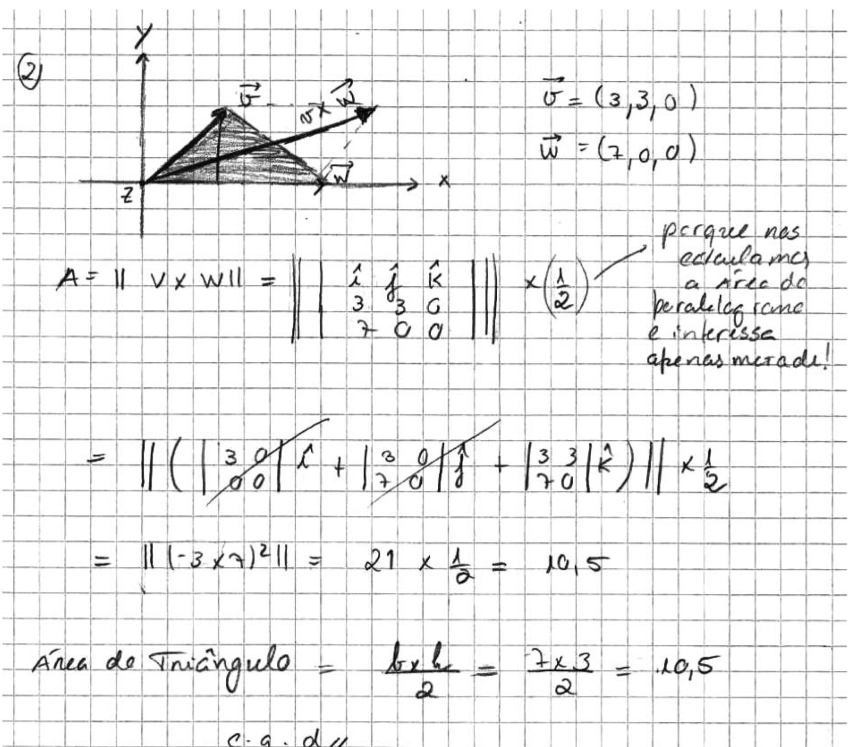


Figura 21. Resposta do Pedro à tarefa TAPL

Nos tratamentos em linguagem algébrica aplicando a fórmula cuja dedução era o objetivo final da tarefa TAPL, salienta, em linguagem verbal, o motivo para multiplicar por $\frac{1}{2}$ – uma conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal. Neste sentido, transforma o enunciado noutro relacionado. Duas incorreções ocorrem em linguagem visual, com a representação de $v \quad w$, e em linguagem algébrica, por não considerar a referida multiplicação nas expressões anteriores.

4.4. *Comparação de resultados*

A Alice, a Maria e o Pedro tiveram o segundo contacto com a demonstração no Ensino Superior, pelo menos, no semestre relativo à unidade curricular do estudo, em conteúdos de álgebra linear e de geometria analítica. Todos os alunos caso tiveram o primeiro contacto com a demonstração no ensino não superior, o que não implica que a demonstração tenha sido aí trabalhada. As diferentes experiências da Alice, da Maria e do Pedro são por estes associadas a distintos conteúdos do ensino secundário: geometria; funções e álgebra; probabilidades e números complexos, respetivamente. Na Tabela IV apresentamos um resumo dos resultados relativos aos alunos caso, com destaque para os tipos de esquemas de demonstração, representações e transformações de representações.

Embora o nível de desempenho em matemática no ensino secundário da Maria seja o mais baixo dos alunos caso, ela consegue aproximar-se mais dos esquemas de demonstração dedutivos para as proposições com valor lógico verdade. Uma explicação pode residir no facto desse nível de desempenho não traduzir, necessariamente, o desempenho particular na elaboração de demonstrações. Também a experiência mais algébrica da Maria no primeiro contacto com a demonstração no ensino não superior, em conteúdos de funções e álgebra, pode constituir outra explicação. Ainda assim, pela falta de formalidade nas justificações, o nível máximo alcançado nos seus esquemas é 5.

Nas produções da Maria nota-se um menor número de transformações de representações entre linguagens. Este aspeto é particularmente visível para as tarefas TCAV, só com linguagem algébrica, e TSPI, em que a linguagem algébrica domina sobre a pequena presença da linguagem verbal. A explicação poderá ser a última do parágrafo anterior, por a Maria recorrer logo a representações em linguagem algébrica, realizando tratamentos sem precisar de conversões. Para a tarefa TSPI, a Alice e, sobretudo, a Maria realizam tratamentos em linguagem algébrica, mas o Pedro só efetua tratamento em linguagem verbal, num esquema de demonstração de convicção externa, autoritário, com nível 0.

Num esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, para a tarefa TAPL, a Alice faz uma conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal, só para assinalar que a expressão a que chegou é a pretendida. O Pedro, apesar de realizar mais conversões (da linguagem algébrica para a linguagem verbal e vice-versa), obtém um esquema de demonstração empírico, indutivo, com nível 1. Não só para a tarefa TAPL mas de um modo geral, a Maria aproxima-se mais dos esquemas de demonstração dedutivos com poucas conversões, mas estas podem ter ocorrido de forma não visível. Com efeito, a investigadora acede às representações nas produções, eventualmente com o complemento da entrevista, mas não às que podem ter ocorrido mentalmente, sem registo escrito.

O primeiro contacto da Alice com a demonstração no ensino não superior, em geometria e com experiência associada de subdivisão de figuras geométricas, pode também contribuir para explicar o seu esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, na produção para a tarefa TAPL. Apesar de todos os alunos caso usarem linguagem visual, o que era expectável pela tarefa, e conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica, só a Alice realiza o tratamento da figura geométrica inicial que é transformada, por decomposição e reconstrução, num retângulo. Considera depois que os dois poliedros planos, paralelogramo e retângulo dele obtido, equidecomponíveis.

Nas produções da Alice e do Pedro acentua-se a presença da linguagem verbal, o que pode prender-se com a experiência não algébrica do primeiro contacto com a demonstração, e o número de conversões. Contudo, isso não se traduziu num maior número de esquemas de demonstração dedutivos, talvez pela simplicidade dessas conversões.Por exemplo, para a tarefa TCAV, a Alice executa uma conversão do enunciado da linguagem verbal para a linguagem algébrica, para saber onde tem de chegar. O mesmo faz o Pedro que, em contraste com os esquemas de demonstração dedutivos, transformativos, com nível 5, da Alice e da Maria (sem conversões), apresenta uma combinação de esquemas não dedutivos.

Um dos esquemas do Pedro para a tarefa TCAV é empírico, indutivo, com nível 1, num exemplo com o significado, por ele atribuído, de demonstração implicada por regularidade esperada. Esta tendência do Pedro volta a emergir na produção para a tarefa TAPL e na entrevista sobre a tarefa TSPI, mas é residual nas produções da Maria. Presencia-se, com o significado de demonstração implicada por regularidade observada e regularidade esperada, só quando apresenta exemplos para mostrar que há um número infinito de soluções na tarefa TSPI. Nesta situação, trata-se de uma combinação de esquemas de demonstração, um dedutivo, transformativo, nível 5, com um empírico, indutivo, nível 1.

Ainda nas produções para a tarefa TCAV, todos os alunos realizam, com nuances, tratamentos em linguagem algébrica. A Alice e a Maria trabalham com vetores arbitrários, enquanto o Pedro executa os tratamentos, maioritariamente, com vetores concretos do espaço. Nenhum aluno utiliza a estratégia mais curta com a sugestão do enunciado (representação matricial adequada) que, sem escrever entradas, passaria por invocar simplesmente a comutatividade da adição de matrizes, provada noutras aulas. Na entrevista, a Alice refere esta propriedade, mas não vislumbra o seu alcance para uma produção menos extensa no sentido mencionado.

Apesar do Pedro recorrer a vetores concretos do espaço, casos particulares, na produção para a tarefa TCAV, na entrevista escreve um esquema de demonstração dedutivo. Portanto, no sentido do conceito de demonstração em Matemática, ele parece saber fazer uma demonstração da comutatividade da adição de vetores do espaço e, em simultâneo, não achar relevante fazê-la. De facto, a respeito do esquema de demonstração dedutivo, transformativo, refere que não sabia se havia de demonstrar desta forma. Este aspeto remete para o conceito de demonstração para os alunos que, no caso do Pedro, acaba por variar consoante o contexto em que está.

Também na entrevista, os referidos casos particulares proporcionaram uma discussão da investigadora com a Maria, aparentemente facilitada pelo método de ensino-aprendizagem (aprendizagem pelos pares) das aulas associadas ao estudo. Como refere Maher (2010), "quando os alunos tentam convencer os outros de que as suas respostas estão corretas, eles podem reorganizar e reformular as suas representações de modo a tornar os argumentos convincentes." (p. 4). A partir da discussão e do diálogo com a investigadora sobre a tarefa TSPI, a Maria elaborou ainda uma redução ao absurdo que, das evidências obtidas, não compreendeu na totalidade.

Salientamos que, para além da exploração completa da demonstração associada numa aula, a redução ao absurdo é um método de demonstração previsto no programa de matemática do ensino secundário. Contudo, tal não significa que tenha sido trabalhado no ensino secundário, incluído nos conteúdos de Lógica com presença transversal noutros conteúdos do programa em vigor para os alunos caso (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001/2002) e inserido no domínio de conteúdo lógica e teoria de conjuntos do atual programa (Bivar et al., 2014). As discussões com os outros alunos caso não chegaram a esse ponto devido às dificuldades na parte inicial da TSPI.

A necessidade de exemplos é ainda sentida pela Alice na tarefa TCAV, de forma diferente. Apresenta uma combinação de esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5, com um exemplo de significado confirmação. Partilhando o argumento "mais palpável" com o Pedro quando falam de exemplos na entrevista, a Alice não escolhe simplesmente dois vetores. A particularidade reside no tratamento dos vetores do espaço com terceira coordenada nula escolhidos, transformados em pares ordenados de números reais.

A sustentação não invocada vem do isomorfismo entre os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\{(x, y, 0): x, y \in \mathbb{R}\}$, munidos das usuais adição e multiplicação escalar.

A implementação da aprendizagem pelos pares visou a promoção das discussões entre alunos e ainda com a professora. Nas aulas, algumas foram despoletadas por questões conceptuais e outras resultaram das produções dos alunos caso nas tarefas TCAV, TPC3 associado à tarefa TSPI e TAPL. As funções da demonstração que se pretendiam implicadas eram, essencialmente, as de explicação, comunicação e convencimento. Mas os alunos caso nem sempre atribuíram esta última função a uma demonstração, o que é evidenciado com a produção da Alice para a tarefa TCAV – o anteriormente mencionado exemplo após um esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com nível 5.

Observamos ainda o recurso a fatores externos nas produções para a tarefa TSPI da Alice e do Pedro (que não sente necessidade de demonstrar), com o significado, por eles atribuído, de facto conhecido. Este aspeto também surge na produção do Pedro para a tarefa TCAV, com características de convicção externa, autoritário, nível 0. Na produção da Alice presencia-se, simultaneamente, o ritual da argumentação pelo apelo a produções da aluna noutras tarefas. Neste sentido, numa combinação de esquemas de demonstração, emerge a escrita simbólica não referencial da argumentação, em que os símbolos não coincidem com o seu significado, sem conexão entre representação e significação.

Diversas dificuldades exibidas pelos alunos na elaboração dos seus esquemas de demonstração resultam, de facto, da não atribuição de um significado apropriado aos símbolos matemáticos. Este aspeto emerge, também, quando se pede uma demonstração de que se X_1 e X_2 são duas soluções distintas de um sistema de equações lineares, então qualquer combinação linear convexa destas é também uma solução. Concretamente, a Alice e a Maria, esta momentaneamente na entrevista, consideram X_1 e X_2 como números reais e não como n-uplos de números reais, o que indica que estes estudantes não compreenderam o conceito de solução de um sistema de equações.

A não atribuição de um significado apropriado aos símbolos matemáticos evidencia-se ainda na produção do Pedro para a tarefa TCAV, uma combinação de esquema de demonstração empírico, indutivo, nível 1, com um esquema de demonstração de convicção externa, autoritário, nível 0. Para além de considerar um exemplo uma demonstração, utiliza o mesmo símbolo para representar um vetor arbitrário do espaço e um vetor concreto do espaço. A ausência de significado apropriado não se nota nas produções da Maria, registando-se apenas, na entrevista, a descrita ocorrência momentânea. Talvez este seja outro dos motivos para o maior sucesso da Maria nos esquemas de demonstração.

TABELA IV
Resumo dos resultados obtidos, destacando os tipos de esquemas de demonstração (ED), representações (R) e transformações de representações (TR)

	Alice			*Maria*			*Pedro*		
	TCAV	*TSPI*	*TAPL*	*TCAV*	*TSPI*	*TAPL*	*TCAV*	*TSPI*	*TAPL*
ED	combinação de ED dedutivo, transformativo, nível 5, com exemplo	combinação de ED simbólico, não referencial, com ED de convicção externa, autoritário e ritual, nível 0	ED dedutivo, transformativo, nível 5	ED dedutivo, transformativo, nível 5	combinação de ED dedutivo, transformativo, nível 5, com ED empírico, indutivo, nível 1	ED dedutivo, transformativo, nível 5	combinação de ED empírico indutivo, nível 1, com ED de convicção externa, autoritário, nível 0	ED de convicção externa, autoritário, nível 0	ED empírico, indutivo, nível 1
R	linguagem verbal linguagem visual linguagem algébrica	linguagem algébrica linguagem verbal	linguagem visual linguagem algébrica linguagem verbal	linguagem algébrica	linguagem algébrica linguagem verbal	linguagem verbal linguagem algébrica linguagem visual	linguagem verbal linguagem algébrica	linguagem algébrica linguagem verbal	linguagem visual linguagem algébrica linguagem verbal
TR	conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica	tratamento em linguagem algébrica conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal	tratamento em linguagem visual conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal	tratamento em linguagem algébrica	conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica	conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica	conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica	tratamento em linguagem verbal	tratamento em linguagem visual conversão da linguagem visual para a linguagem algébrica tratamento em linguagem algébrica conversão da linguagem algébrica para a linguagem verbal conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica

5. Discussão e conclusões

A demonstração no ensino-aprendizagem da matemática tem sido objeto de estudo de forma ténue em Portugal, mas com considerável expressividade internacional nos vários níveis de ensino (Hanna & de Villiers, 2012; Stylianides & Stylianides, 2017). Harel e Sowder (1998, 2007) apresentaram uma perspetiva compreensiva do ensino-aprendizagem da demonstração, complementada por Lee (2016), onde a noção de esquema de demonstração é central. Recentemente, Stylianides e Stylianides (2017) concluíram que a literatura existente até ao momento providencia enquadramentos teóricos de estudo e, ainda, o conhecimento sobre o lugar reduzido da demonstração no ensino e a sua (in)compreensão pelos alunos. Neste sentido, o ensino e a aprendizagem da demonstração, apesar de promoverem uma maior compreensão matemática (Balacheff, 2010; Hanna, 2000), são reportados como difíceis (Hanna & de Villiers, 2012).

O presente trabalho contribui para o campo da educação matemática, proporcionando elementos teóricos e metodológicos que podem apoiar investigadores e professores de matemática na compreensão das formas de pensamento dos estudantes e dos seus esquemas de demonstração de resultados matemáticos. Mais concretamente, analisámos os esquemas de três alunos caso em tarefas que visavam a demonstração de proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade. Os resultados evidenciam que as representações permitem o acesso parcial ao raciocínio, devido à existência de elementos associados não percetíveis nas produções. Em particular, só a entrevista a cada aluno caso permitiu classificar algumas das produções como elementos pertencentes a mais do que uma classe da categorização de Harel e Sowder (1998, 2007), ou seja, como combinações de esquemas de demonstração.

Trata-se de resultados novos, pois identificamos no ensino superior três das oito combinações identificadas por Kanellos, Nardi e Biza (2018) para o ensino não superior. Encontramos combinações dos níveis propostos por Lee (2016) e uma combinação nova: esquema de demonstração dedutivo, transformativo, nível 5, com um exemplo que serve para confirmar. Estes resultados são relevantes, uma vez que a ambiguidade das combinações tem, como referem Kanellos, Nardi e Biza (2018), interesse pedagógico, pois um professor alertado para a presença de mais do que um esquema de demonstração na mesma produção de um aluno pode intervir. Por outras palavras, pode traduzir um olhar construtivo do erro criando, como sugere Pinto (1998), uma estratégia didática após o erro ser observável para o professor.

A concretização do referido olhar poderá passar por: segunda oportunidade ao aluno, estratégia de retificação e melhoria, após as observações do professor e precedendo uma reclassificação das produções (Dias & Santos, 2016; Torre, 1993); aprendizagem pelos pares, considerando os erros na construção e na discussão de questões conceptuais (Beites & Serôdio, 2015); sessões de discussão de dúvidas norteadas pela análise de erros (Cury, 2007). Em particular, estas propostas poderão ajudar a combater as dificuldades, nomeadamente detetadas no presente trabalho, quando os alunos não atribuem um significado apropriado aos símbolos, em que os símbolos não coincidem com o seu significado. O *sense making* (Mata-Pereira & Ponte, 2013) é um aspeto relevante, pois a articulação entre significação e processos de raciocínio, estes sob a forma de representações, é fundamental para a compreensão da matemática (NCTM, como citado em Ponte & Mata-Pereira, 2013).

Nesta linha, num futuro trabalho de investigação, poderá ser importante recolher as argumentações dos alunos com os seus pares em sala de aula, em torno dos esquemas de demonstração por eles produzidos e em discussões de convencimento mútuo da sua validade. Efetivamente, a implementação de um ambiente pedagógico dialógico favorece uma melhoria da compreensão matemática, como ilustrado na presente investigação na entrevista facilitadora do diálogo entre a investigadora e a aluna Maria, por exemplo. Tendo em conta que a compreensão dos alunos, como evidenciado no estudo atual, é influenciada pela sua experiência anterior, pelas suas crenças e processos pessoais de verificação, seria interessante realizar um estudo com base na criação de uma espécie de "espaço filosófico" na sala de aula de Matemática (Kennedy, 2012), onde se discutissem conceitos (em particular, o de demonstração) no sentido de conseguir um entendimento alargado entre os estudantes.

Independentemente do nível de desempenho em matemática no ensino secundário, encontrámos representações e suas transformações (tratamentos e conversões) em todas as produções, mas com diferentes níveis cognitivos (Lee, 2016). Contrariamente ao expectável, o aluno caso com o melhor nível de desempenho em matemática no ensino secundário não foi o que produziu mais esquemas de demonstração dedutivos. Precisamente o aluno caso com o mais baixo nível de desempenho em matemática no ensino secundário é aquele que mais se aproxima dos esquemas de demonstração dedutivos que dariam resposta às tarefas propostas. Deste modo, constatou-sse, neste estudo, que a história académica prévia dos estudantes não é necessariamente um indicador do desempenho que um estudante pode vir a mostrar na construção de esquemas de demonstração. Trata-se de um contributo pedagógico relevante do presente estudo, pois constitui-se como um alerta ao professor.

Outro aspeto que sobressai, do aluno caso com o mais baixo nível de desempenho em matemática no ensino secundário, é que um menor número de transformações de representações numa produção de um aluno, nomeadamente as que correspondem a passar de um sistema de linguagem para outro – conversões, não significam necessariamente um nível mais baixo de abstração. De facto, pela entrevista realizada a cada aluno caso e a este em particular, parecem ter ocorrido processos mentais que levaram à escrita numa linguagem e a representações mais diretas para o objetivo pretendido, com eventuais processos mentais de conversão não visíveis nas produções. Esta contribuição do presente trabalho não contradiz os estudos que referem que as conversões, atividade cognitiva considerada menos espontânea e mais difícil, suportam e promovem o raciocínio e a abstração em Matemática (Duval, 2006b; Presmeg, 2006; Callejo & Zapatera, 2014), mas acrescenta que só os registos escritos podem não permitir averiguar da realização ou não de conversões.

As tarefas associadas ao estudo foram potencialmente promotoras da eliminação de descontinuidades entre os ensinos básico-secundário e superior. Segundo Costa e Catarino (2007), as mesmas surgem por não se fazerem conexões explícitas entre conceitos matematicamente interligados, um obstáculo para aprender álgebra linear devido à falta de ligação com o que os alunos já conhecem (Dorier, como citado em Costa & Catarino, 2007). Contudo, observámos que se o enunciado da tarefa é essencialmente um resultado conhecido do aluno, mesmo que não anteriormente demonstrado, a tarefa não parece ser a mais apropriada para mostrar a necessidade de uma demonstração, pelo menos não de modo isolado. Com efeito, tais tarefas não motivam a abordagem a uma demonstração, havendo que explorar algumas das suas funções para as tornar significativas (De Villiers, 2001), e, segundo o presente estudo, parecem facilitar a emergência de esquemas de demonstração de convicção externa. Trata-se de outro contributo pedagógico relevante do presente estudo, pois aponta para características a considerar numa tarefa de demonstração para que esta promova aprendizagens efetivas.

Elaborar uma demonstração em matemática envolve processos mentais complexos com raciocínio dedutivo (Lannin, 2005), que pode ser precedido por raciocínio indutivo mediante a formulação e o teste de conjeturas, com exemplos e contraexemplos (Beites, 2015). Apesar da sua importância, o raciocínio indutivo é negativamente apontado como emergente em esquemas de demonstração de álgebra, parecendo os tipos de tarefas facilitar o surgimento de certos tipos de esquemas de demonstração (Kanellos, Nardi, & Biza, 2018). No presente trabalho encontramos raciocínio indutivo em esquemas de demonstração empírico indutivos e, ainda, em combinações destes esquemas com outros, mas tal não era expectável nem deveria suceder. Com efeito, todas as tarefas associadas ao estudo são de demonstração para proposições de álgebra linear que, assumidamente pelo enunciado, têm valor lógico verdade.

Nos resultados encontrámos a utilização, por parte de alunos, de exemplos não constituíram um caminho para conjeturar, o que nos levou a outro aspeto relevante do presente estudo – a atenção dedicada aos significados, atribuídos pelos alunos, aos esquemas de demonstração não dedutivos. Um aluno caso apresentou uma combinação de um esquema de demonstração dedutivo, transformativo, com um exemplo, este com o significado, por ele atribuído, de confirmação. Os outros dois alunos caso também construíram exemplos, em esquemas de demonstração empírico indutivos e/ou combinações destes com outros esquemas, com o significado, por eles atribuído, de demonstração implicada por regularidade observada e/ou regularidade esperada. Deste modo, nos esquemas de demonstração não dedutivos das produções dos alunos caso, os exemplos serviram para complementar a insuficiência compreensiva da demonstração pelos alunos.

Esta insuficiência compreensiva mostra uma conceptualização da demonstração que não é consentânea com a noção de demonstração em matemática. De facto, há elementos que devem estar presentes numa demonstração (Stylianides, 2007): fundamentos (definições, lemas,...); argumentação (como se desenvolve; por exemplo, inferindo com *modus ponens*); representação (como se expressa; com linguagem algébrica, verbal ou visual); dimensão social (aceitação na comunidade matemática em que se cria). Para além de exemplos, que um aluno considera demonstração, detetámos outras situações em que o conceito imagem de demonstração dos alunos não coincide com o conceito definição (Tall & Vinner, 1981) de demonstração em matemática. Concretamente, dois alunos caso produziram esquemas de demonstração de convicção externa, autoritário, nivel 0. O significado, por eles atribuído, é o de facto conhecido, em que se chega a notar a ausência da necessidade de demonstrar.

Os resultados evidenciam também que a apresentação e a exploração completas de uma demonstração para uma proposição matemática, conjuntas com os alunos numa aula, pode não levar à compreensão de todos os elementos da demonstração por parte de cada aluno. Uma possibilidade de melhoria da compreensão de uma demonstração pelos alunos pode passar pela reorganização da apresentação da mesma pelo professor, e ainda pela reorganização da exploração, havendo que avaliar os efeitos sobre os alunos. A alteração da "flow of the proof" (Gabel & Dreyfus, 2017) pode consistir na ênfase de diferentes ideias, em particular cruciais (Weber & Hemmi, como citados em Gabel & Dreyfus, 2017), e detalhes que não sejam claros para os alunos, por vezes até omitidos pelo professor para não diminuir a qualidade pedagógica da demonstração (Lai & Weber, como citados em Gabel & Dreyfus, 2017).

Deste trabalho, cuja divulgação pode dar pistas para a prática letiva de outros professores, emergem desafios que se inserem no grande repto de como ensinar a demonstrar: contrariar a validação através da construção de exemplos; incorporar que a validade de um resultado depende da demonstração; mostrar que a construção de exemplos após um esquema de demonstração dedutivo é desnecessária; facilitar o *sense-making;* tornar clara e efetiva a apresentação e a exploração de uma demonstração. Deste modo, o futuro passa, como referem Stylianides e Stylianides (2017) após reflexão sobre o estado da arte na área da demonstração em Educação Matemática, por intervenções na sala de aula, apoiadas em investigação, de modo a gerar soluções para os desafios do ensino-aprendizagem da demonstração. De facto, "mathematics teachers at all levels, even experienced mathematicians, lack didactic knowledge regarding strategies for teaching proofs" (Gabel & Dreyfus, 2017, p. 187).

Agradecimentos

P. D. Beites foi financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), projetos UID/MAT/00212/2019 e UIDB/00212/2020 do Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA-UBI). C. Costa foi financiada por Fundos Nacionais através da FCT, no âmbito do projeto UID/CED/00194/2019. As autoras agradecem a M. C. Morais, J. A. Pires e A. P. Nicolás pela ajuda com, respetivamente, as transcrições, a tradução do resumo para francês e a tradução do resumo para espanhol.

Referências

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, *13*(4), 544-559.

Beites, P. D. (2015). O confronto do PMEB2007 com o PMEB2013 nas vizinhanças da demonstração. *Educação e Matemática*, 132, 13-18.

Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática*, 129, 13-16.

Beites, P. D., & Serôdio, R. (2015). A tecnologia não é a pedagogia, mas ajuda!. *Atas do CIEMeLP2015*, 5 p.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2010). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, M. L. (2014). A educação progressiva como alternativa: As vozes dos educadores. *Educação & Sociedade*, 35, 475-489.

Bruce, B., & Bloch, N. (2013). Pragmatism and community inquiry: a case study of community-based learning. *Education and Culture*, *29*(1), 27-45.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema*, *28*(48), 64–88.

Catela, H. (2011). Comunidades de aprendizagem: em torno de um conceito. *Revista de Educação*, *18*(2), 31-45.

Chazan, D., & Lueke, M. (2009). Exploring relationships between disciplinary knowledge and school mathematics: Implications for understanding the place of reasoning and proof in school mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 21-39). New York: Routledge.

Costa, C., & Catarino, P. (2007). Da Colinearidade no Ensino Secundário à Dependência Linear no Ensino Superior: Que descontinuidades?. *Quadrante*, 16, 147-162.

Costa, C., & Tadeu, P. (2006). A demonstração nos programas de Matemática: Uma análise transversal. *Atas do EIEM 2006* (pp. 1-7). SPIEM.

Crouch, C., & Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics*, 970-977.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros*. Belo Horizonte: Autêntica.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, 62, 31-36.

Dewey, J. (1997). *Democracy and education*. New York: Simon & Schuster.

Dias, C., & Santos, L. (2016). Portefólio reflexivo de matemática enquanto instrumento de autorregulação das aprendizagens de alunos do ensino secundário. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(2), 187-216.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Duval, R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In ULP. IREM de Strasbourg. In J-C. Rauscher (Eds). *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (pp. 67–89). Strasbourg, France: ULP. IREM.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence—a case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 187–205.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 178–203). New York: Routledge.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Harel, G. (1987). Variations in Linear Algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 29-32.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. Kaput, & A. M. Association (Ed.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, III, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Kanellos, I., Nardi, E., & Biza, I. (2018). Proof schemes combined: Mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(4), 277-294.

Kennedy, N. (2012). Lipman, Dewey, and philosophical inquiry in the mathematics classroom. *Education and Culture*, *28*(2), 81-94.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 26-44.

Lima, E. L. (1999). Conceituação, manipulação e aplicações. *Revista do Professor de Matemática*, 41, 1-6.

Maher, C. A. (2010). The longitudinal study. In C. A. Maher, A. B. Powell, & E. B. Uptegrove (Eds.), *Combinatorics and reasoning* (pp. 3-8). New York: Springer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison Wesley.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos de 9.º ano. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra* (pp. 347–364). Lisboa: SPIEM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM*, 62, 17-31.

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making Activities for High School Mathematics* (pp. vii-viii). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neto, T., Breda, A., & Godino, J. (2011). Desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas. *Quadrante*, *20*(1), 83-100.

Özkan, E., Tepedeldiren, Y., & Ünal, H. (2011). Geometrical and algebraic approach to multiple representations. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 72-75.

Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Dordrecht, Netherlands: Sense.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children*. New York: International Universities.

Pinto, N. B. (1998). O Erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar (Tese de doutoramento não publicada). Universidade de São Paulo, Brasil.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Rodrigues, M. (2009). *A demonstração na prática social da aula de matemática*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Rodrigues, M. (2012). A investigação curricular da demonstração. *Da Investigação às Práticas*, *II*(II), 53-77.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Santos, R. (2010). *Um curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~regi>. Acesso em: 27 mar. 2017.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001/2002). Programa de Matemática A – Ensino Secundário. Lisboa: ME, DES.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 103-133.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Torre, S. de la (1993). *Aprender de los errores*. Madrid: Escuela Española.

Yin, R. (2009). *Case study research: design and methods*. Los Angeles: Sage.

Autores

Patrícia Damas Beites. Departamento de Matemática e CMA-UBI – Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal. pbeites@ubi.pt
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-0266-7055

Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa. Departamento de Psicologia e Educação e Unidade de Investigação LabCom.IFP, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal. lbranco@ubi.pt
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-8589-1310

Maria Luísa Frazão Rodrigues Branco. Departamento de Matemática e CIDTFF – Centro de Investigação "Didática e Tecnologia na Formação de Formadores"- Laboratório de Didática de Ciências e Tecnologia, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal.
E-mail: mcosta@utad.pt
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-9962-562X

M. Pedro Huerta

HIPÓTESIS Y CONJETURAS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO: RETOS PARA SU ENSEÑANZA Y EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Hypothesis and conjectures in the development of stochastic thinking: challenges for its teaching and teachers training

RESUMEN

En este artículo se reflexiona alrededor de la importancia que puede tener la dialéctica hipótesis-conjeturas no solo para el desarrollo del razonamiento demostrativo, sino que también para el desarrollo del pensamiento estocástico en los estudiantes. Se argumenta para ello razones de tipo curricular, de un enfoque de la enseñanza basado en la resolución de problemas, de una manera de resolver los problemas que considera la simulación como método de resolución con contenido heurístico y, finalmente, en nuevas propuestas sobre las matemáticas que requerirá el ciudadano del siglo XXI y que incluye el análisis de datos en contextos de incertidumbre. En consecuencia, se presenta una propuesta de formación inicial del profesorado que les permita abordar tales retos.

PALABRAS CLAVE:

- *Hipótesis*
- *Conjeturas*
- *Pensamiento estocástico*
- *Resolución de problemas de probabilidad*
- *Simulación*
- *Formación del profesorado*

ABSTRACT

This paper reflects on the importance that the dialectic of hypothesis-conjectures can have, not only for the development of demonstrative thinking in students, but also for the development of stochastic thinking. It argues for curricular reasons, for an approach to teaching based on problem solving, for a way of solving problems that considers simulation as a method of resolution with heuristic content and, finally, for new proposals on mathematics that the citizen of the XXI century will require and that includes the analysis of data in contexts of uncertainty. Consequently, a proposal is presented for the training of pre-service teachers to enable them to deal with such challenges.

KEYWORDS:

- *Hypothesis*
- *Conjectures*
- *Stochastic thinking*
- *Probability problem solving*
- *Simulation*
- *Preparing teachers*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 79-102.
Recepción: Noviembre 21, 2018 / Aceptación: Noviembre 16, 2019. DOI: 10.12802/relime.20.2313

RESUMO

Neste artigo ele reflete sobre a importância que pode ter a formulação de hipóteses e conjecturas, não só para o desenvolvimento do raciocínio demonstrativo, mas também para o desenvolvimento do pensamento estocástico de estudantes. Defende este currículo de razões, uma abordagem de ensino baseada na resolução de problemas, uma forma de resolver os problemas que considera a simulação como um método de resolução de conteúdo heurística e, finalmente, no novo as propostas em que o cidadão do século XXI exigirá e matemática, que inclui a análise de dados em contextos de incerteza. Uma proposta de formação inicial de professores permite-lhes para endereço tais desafios, portanto, é apresentado.

PALAVRAS CHAVE:

- *Hipóteses*
- *Conjecturas*
- *Raciocinio estocástico*
- *Resolução de problemas de probabilidade*
- *Simulação*
- *Formação de professores*

RÉSUMÉ

Dans cet article, il réfléchit sur l'importance que peut avoir la formulation d'hypothèses et conjectures non seulement pour le développement du raisonnement démonstratif, mais aussi pour le développement de la pensée stochastique des étudiants. Cette position est basée sur des raisons de type curriculaire, sur une approche de l'enseignement basée en la résolution de problèmes, sur un moyen de résoudre les problèmes qui considère la simulation comme une méthode de résolution avec un contenu heuristique et, enfin, sur des nouveaux suggestions sur les mathématiques qui nécessitera le citoyen du XXIe siècle et qui comprend l'analyse des données dans des contextes d'incertitude. Par conséquent, une proposition de formation initiale des enseignants est présentée pour leur permettre de relever de tels défis.

MOTS CLÉS:

- *Hypothèses*
- *Conjectures*
- *Pensée stochastique*
- *Résolution des problèmes de probabilité*
- *Simulation*
- *Formation des enseignants*

1. Introducción

Internacionalmente, cada vez más, la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático van adquiriendo una mayor presencia en los currículos de matemáticas. En particular, el pensamiento analítico se relaciona con la formulación e investigación de conjeturas matemáticas y el desarrollo y evaluación de argumentos matemáticos y demostraciones como una forma particular de expresar el razonamiento y la justificación (NCTM, 2018). El currículum español, por ejemplo, tampoco es ajeno a esta pujanza pues dispone que, en la educación primaria y secundaria, los estudiantes han de ser capaces de formular hipótesis y conjeturas y razonar con ellas. En particular, se prescribe para el área de matemáticas, particularmente, en "procesos, métodos y actitudes" y en "probabilidad y estadística" (MEC, 2014a; MEC, 2014b).

Sugerente, interesante, e incluso retador, puede resultar para el profesorado y la investigación interesada tanto en la resolución de problemas como en la educación estocástica[1] el análisis, cuidadoso e intencionado, de lo que se prescribe en esos documentos oficiales en relación con las citadas nociones. En particular, por ejemplo, el criterio con el que se evalúa la competencia de los estudiantes de educación primaria en relación con la "capacidad de formular estimaciones (conjeturas) en situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar (en términos de probabilidades) dicho resultado", mediante el estándar "realizar conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería, …)", junto con este otro: "resuelve(r) problemas que impliquen el dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento, creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización", estándares que se repiten para los estudiantes de educación primaria (MEC, 2014a p. 19393) y secundaria (MEC 20148b pp. 398 y 413).

El profesorado puede preguntarse: ¿cómo puede hacerse esto si los manuales escolares no parece que lo faciliten? Una primera respuesta puede buscarse en los trabajos de Lakatos (1976) y Polya (1966) con los llamados problemas de encontrar-probar, a los que Fiallo y Gutiérrez (2017) llaman de conjeturar-demostrar, pero con la diferencia notable de que los problemas de naturaleza estocástica se pueden considerar de conjeturar-argumentar para convencer de la bondad de una conjetura y no para demostrar su verdad, formalmente hablando, como es el caso de aquellos problemas.

El nivel de exigencia que estas prescripciones curriculares representan para los docentes, su escasa preparación en este sentido (Huerta, 2018), tanto inicial como continua, la falta de recursos en los que apoyarse, incluidos los libros de texto actuales que no ayudan al profesorado a lograr que sus alumnos alcances dichas competencias, la resolución de problemas rutinarios, el modelo de enseñanza mecanicista con el que se suele enfocar la enseñanza de la probabilidad y la estadística, nos anima a reflexionar sobre qué formación inicial y continuada deberían tener los futuros profesores para que se implicaran en otra forma de enseñanza de la probabilidad en la escuela obligatoria. Otra forma en la que,

1 Usaremos el término estocástico para referirnos a una forma de pensar que combina ideas estadísticas y probabilísticas que permita tomar decisiones y asumir riesgos, de una manera razonable, en situaciones de incertidumbre (Schupp, 1989).

basada en la resolución de problemas, se favoreciera el uso y la formulación de hipótesis, la activación del razonamiento plausible (Polya, 1966) para la elaboración de conjeturas razonables y el diseño de procedimientos que permitan argumentar sobre la bondad de la conjetura formulada. Otra forma de enseñar probabilidad ligada, en fin, a lo que es propio de la actividad matemática. En este trabajo, reflexionamos sobre todo ello y describimos una forma de llevar a cabo una propuesta de enseñanza en el sentido indicado en los párrafos anteriores. Dicha propuesta se refiere a la formación del profesorado, pero, de ella, se puede inferir cuál seria en la educación obligatoria.

2. Hipótesis y conjeturas en la literatura

En la literatura sobre Educación Matemática, hasta donde sabemos, hay muy pocos trabajos en los que se preste atención, explícitamente, a la dialéctica hipótesis-conjetura en investigaciones que no sean sobre la demostración en matemáticas. En este sentido, Furinghetti, Olivero y Paola (2010) llevan a cabo un experimento de enseñanza en el que los autores reflexionan sobre las dificultades que encuentran tanto profesores como estudiantes para el acceso a la demostración en la resolución de problemas abiertos sobre conjetura-demostración. En un sentido parecido, Fiallo y Gutiérrez (2017) examinan qué aspectos cognitivos ponen en juego los estudiantes en problemas del mismo tipo: primero, durante la elaboración de una conjetura y, segundo, demostrando que la conjetura es cierta, matemáticamente cierta, lo que exige la elaboración de una demostración formal. De Villiers y Heideman (2014) muestran lo alejada que está la actividad matemática de la actividad escolar con las matemáticas, señalando que, por ejemplo, aquella no siempre elabora conjeturas ciertas, sino que, a menudo, son falsas, por lo que tan importante es que se descarte una conjetura por falsa como que se acepte porque se demuestra que es cierta. Pero, se lamentan de que la enseñanza no favorezca este aspecto del quehacer matemático, mostrando, generalmente, el producto final, matemáticamente pulido, sin mostrar su evolución, ni tampoco favorezca la formulación de conjeturas refutables como forma de cultivar el pensamiento crítico. Muestran, no obstante, la esperanza de que, tanto en la educación obligatoria como en niveles superiores, a los estudiantes se les dé la oportunidad de formular sus propias conjeturas y después probarlas o refutarlas. En la misma línea se sitúa Lampert (1990), para quien la elaboración de una conjetura consciente (en el sentido de Lakatos, 1976) supone asumir un riesgo, requiere admitir que las hipótesis consideradas por la persona que elabora la conjetura están sujetas a revisión, que lo percibido puede ser algo limitado y que las conclusiones pueden haber sido inapropiadas. En esta línea se sitúa este trabajo, en el que la resolución de problema de probabilidad, que hemos llamado de conjeturar-argumentar para su credibilidad o fiabilidad, proporcionan una buena oportunidad para que los estudiantes elaboren sus propias conjeturas con cierto riesgo, pero controlado por la propia resolución del problema.

Todavía mayor es la escasa presencia de la dialéctica hipótesis-conjetura en la literatura sobre educación estocástica, en las distintas formas en las que se expresen una o la otra. La presencia de estos términos suele ir ligada a la actividad matemática en el que se desarrolla. Así, en procesos de modelización aparecen bajo el significado de hipótesis de trabajo, como en Chaput, Girard & Henry (2011). En procesos de simulación bajo el significado de conjetura, como en Shaughnessy (1983), Benson y Jones (1999) o Zimmerman (2002), por ejemplo. Huerta (2018) señala la necesidad de introducir esta dialéctica para los procesos de resolución de problemas de probabilidad, en oposición al escaso papel que en las investigaciones anteriores le otorgan a esta dialéctica y que, siguiendo a De Villiers y Heideman (2014), consideramos que debería tener en la construcción del pensamiento estocástico y matemático. En efecto, en el juego hipótesis-conjetura, y la consiguiente argumentación en favor o detrimento de ésta, creemos que cobra sentido el proceso de modelización o de simulación que tiene por fin justificar la bondad de la conjetura, y cuánta bondad muestra en términos de probabilidades. Poca investigación hay en este sentido y pocos enfoques para la enseñanza basados en este juego, a pesar de que autores como Pratt (2011) y Pfannkuch (2018) sugieran cambios hacia una idea de probabilidad revisada y un currículum para el siglo XXI.

En efecto, Pratt (2011), tomando en consideración la idea de "ansiedad epistemológica", es decir, una metáfora para expresar la ansiedad que le crea a los estudiantes el aprendizaje de un concepto, el de probabilidad, con más de un significado: clásico o teórico, frecuentista o empírico y subjetivo, sostiene que las propuestas curriculares actuales no son capaces de aliviarla sino que la empeoran. Esas propuestas se basan, casi exclusivamente, en la resolución de problemas rutinarios con monedas, dados, ruletas o bolas en sacos opacos. La relación entre los distintos significados de la probabilidad se reduce a experimentar/simular con esos materiales con el objetivo de encontrar el límite de las frecuencias relativas, como si éste existiera. La probabilidad subjetiva no suele tener presencia en esas propuestas. Dicha ansiedad también puede extenderse al profesorado encargado de su enseñanza, preso de dichas propuestas, con obvias consecuencias en la ansiedad de los estudiantes. Pratt (2011) propone considerar la probabilidad como una herramienta para la modelización de fenómenos inciertos, y que en su enseñanza se tengan en cuenta las propuestas actuales en educación estadística como, por ejemplo, el análisis exploratorio de datos y el razonamiento inferencial informal

(Makar y Rubin, 2014), que permite ampliar su acceso al razonamiento estocástico ya desde edades muy tempranas (Martínez y Huerta, 2015), y la simulación como herramienta para el estudio del comportamiento de fenómenos inciertos.

Por otra parte, Pfannkuch (2018), en la línea de Pratt (2011), imagina un enfoque nuevo del currículum de estadística que permitiera una formación adecuada del ciudadano del siglo XXI. A los estudiantes se les debería proporcionar experiencias estadísticas esenciales, aquellas que tienen que ver con: a) el ciclo completo de investigación estadística que va desde el problema original a la conclusión, b) la exploración del modelo de probabilidad en construcción sujeto a las hipótesis formuladas y c) la evaluación de los argumentos sobre la fiabilidad/credibilidad de una conjetura mediante un razonamiento inferencial, formal o informal. Para el acceso a dichas experiencias, la simulación se considera un elemento fundamental en los procesos de modelización de la probabilidad. Pfannkuch (2018) recomienda que la modelización de la probabilidad sea considerada un aspecto importante del nuevo curriculum que imagina y para la investigación en educación estocástica. La propuesta que presentamos en este trabajo va en la línea sugerida por estos autores.

3. Fundamentación teórica de la propuesta

3.1. *Sobre las nociones de hipótesis y conjetura en el razonamiento probabilístico*

En opinión de algunos autores, por ejemplo, Borovcnik y Kapadia (2018), se asegura que tanto la investigación como el profesorado no disponen todavía de un modelo convincente que permita observar y analizar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Es un modelo que está en construcción, dicen, por lo que su consideración es, todavía, un problema abierto de investigación. En Batanero et al. (2016) se describe un conjunto de categorías que constituyen un modelo incipiente con el que caracterizar dicho razonamiento en términos de capacidades. Entre esas categorías hay una que incluye el análisis previo de las condiciones —de una situación aleatoria dada— que permite derivar las hipótesis[2] necesarias para su modelización. Justo es en esta categoría en la que este trabajo pretende hacer aportaciones, resaltando la importancia de la formulación

2 En lengua inglesa se usa la expresión *assumptions*, que hemos traducido aquí por hipótesis y no por conjetura como se sugiere en los traductores habituales. En su definición enciclopédica aparece hipótesis y conjetura como palabras sinónimas. El sentido en el que parece que se considera en el modelo de Batanero et al. (2016) es el mismo que el de hipótesis de trabajo en Chaput et al. (2011).

de hipótesis y conjeturas para un mejor desarrollo del razonamiento probabilístico y estocástico.

Resultados de investigación sugieren que una de las causas que podrían explicar una asignación poco fiable de la probabilidad de ocurrencia de un suceso, o un valor esperado de una variable aleatoria, es la presencia en el razonamiento del llamado sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998; Cardeñoso, Moreno, García - González y Jiménez - Montana, 2017; Begué, Batanero y Gea, 2018), es decir, considerar la hipótesis, seguramente arbitraria en el sentido de Poincaré (1992), o incluso estrafalaria para cualquier otro observador, de que todos los sucesos elementales del espacio muestral son igualmente posibles y basándose en ésta elaborar una conjetura sobre una probabilidad o un valor esperado poco esperable, poco razonable o poco o nada creíble para el observador, aunque sí lo sea para quien elabora dicha conjetura.

En la visión clásica de la probabilidad, bajo la hipótesis de la equiprobabilidad[3], la Regla de Laplace proporciona una metáfora (Spiegelhalter y Gage, 2014) para expresar la conjetura de que todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, usando para ello la razón del número de casos favorables en relación con el número de casos posibles. La hipótesis se formula contando con el principio de indiferencia o de la razón insuficiente para avalarla. Así que, desde el punto de vista del razonamiento probabilístico, los sujetos, aún actuando bajo del sesgo de la equiprobabilidad, actúan dentro de la lógica impuesta por la regla de Laplace y por el razonamiento subyacente, sólo que es discutible o poco razonable el uso que éstos hacen del principio de indiferencia. En consecuencia, desde el punto de vista didáctico, el sesgo de la equiprobabilidad puede ofrecer una buena oportunidad de aprendizaje del proceso y del significado de asignar la probabilidad a un suceso, si se entiende ésta como una forma de medir la credibilidad de la mejor conjetura que se puede elaborar sobre la ocurrencia del suceso, conjetura que se elabora sujeta a determinadas hipótesis previas y a las reglas del razonamiento plausible (Polya, 1966). Si la hipótesis aceptada es la de la equiprobabilidad entonces la Regla de Laplace permite cuantificar la mejor conjetura disponible. Si, por el contrario, la hipótesis formulada es rechazada, entonces la Regla de Laplace no es útil y se deberá recurrir a otros métodos y procedimientos que permitan obtener una medida de la credibilidad o fiabilidad de una conjetura. Esto es, requerirá plantear y resolver un problema, tal y como nos advierte Polya (1966, p. 356). Pero las hipótesis no deberían estar ausentes, ni tampoco estar implícitamente mencionadas, ni ser

3 Hipótesis que recibe otros nombres, como la "hipótesis equiazarosa" en Popper (1977, p. 157) o teórica en Eichler y Vogel (2014), ligada ésta a la noción de probabilidad "a priori" o probabilidad clásica.

impuestas, como habitualmente ocurre en la enseñanza. Las hipótesis deberían aflorar, discutirse, acordarse y, si fuera el caso, contrastarse. Para ello, los problemas se deben concebir como problemas de (hipótesis) conjetura-credibilidad/fiabilidad, diferentes en su desarrollo final de los problemas de encontrar-probar de Laktatos (1976) y Polya (1966) o los de conjeturar-demostración de Fiallo y Gutiérrez (2017), con quienes comparte la dialéctica hipótesis-conjetura, pero se distancia del tratamiento sobre la verdad de la conjetura. De esto hablaremos más adelante.

Pero, ¿qué se entiende y qué deberíamos entender por hipótesis y conjetura en el contexto de esta propuesta? Buscamos respuestas en el siguiente apartado.

3.2. *Hipótesis, conjeturas y el arte conjetural*

Por el sentido del uso cotidiano de las palabras hipótesis y conjetura nos parece que, en muchas ocasiones, se usan como sinónimas. Este uso no es ajeno al profesorado de matemáticas en formación, ya sea de educación primaria o de educación secundaria, lo que les convierte en términos confusos cuando su significado se ha de considerar restringido al contexto de hacer matemáticas. En efecto, en un trabajo de investigación en curso con profesorado de educación obligatoria, 102 alumnas y alumnos en total, de los cuales 70 son de último año de los grados de educación infantil y primaria (EIP) y 32 del máster de secundaria (MES), aproximadamente el 56% de ellos (64,3% de EIP y 37,5% de MES) consideran que la mejor opción, en un test de respuesta múltiple, a su idea sobre la noción de hipótesis es aquella que la liga a la noción de conjetura, frente a un 28%, aproximadamente (21,4% y 43,8%, respectivamente, en ambas muestras), que la liga con la de ser proposiciones matemáticas consideradas verdaderas que anteceden al razonamiento matemático (Martínez, Huerta y González, 2018). Pero, para la noción de conjetura no se produce la reciprocidad. El porcentaje que vincula esta noción con la de hipótesis es, aproximadamente, del 12% (10% y 15,6%, respectivamente), pero del 73,5% (77,1% y 65,6%, respectivamente) que la vincula con el significado de una probabilidad subjetiva. Estos datos parecen confirmar la existencia de más de un significado de estas nociones para los futuros profesores lo que, a su vez, anticipa dificultades en la comprensión del proceso de resolución de los problemas que hemos llamado de (hipótesis) conjetura-fiabilidad/credibilidad, es decir, problemas que requieren considerar hipótesis de partida, construir conjeturas, dependientes de las hipótesis formuladas, y estudiar la fiabilidad o credibilidad de éstas en términos de probabilidades, como veremos más adelante, construyendo argumentos convincentes. Parece pues necesario revisar los significados de estos términos desde diferentes puntos de vista, ya sea enciclopédico, filosófico, epistemológico o educativo, con el fin de interpretar en qué sentido parece que el profesorado en formación piensa, inicialmente, sobre estas nociones y en qué sentido deberían usarse para los problemas que proponemos para la enseñanza.

En su significado enciclopédico, una hipótesis es una "suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia" mientras que conjetura es un "juicio que se forma de algo por indicios u observaciones" (DRAE, www.rae.es), lo que anticipa, por sí mismo, una posible diferencia entre los significados de ambos términos. Hipótesis se presenta como una suposición sobre algo y conjetura como juicio que se forma sobre algo. En particular, nos interesa el significado de la noción hipótesis de trabajo que el DRAE define como aquella "hipótesis que se establece provisionalmente como base de una investigación".

Ferrater (1965), define hipótesis como "un enunciado o serie articulada de enunciados, que antecede a otros constituyendo su fundamento" (p. 846). Esta definición permite intuir una relación entre hipótesis y conjetura en el sentido en el que nos interesa aportar al razonamiento probabilístico: la hipótesis como fundamento de una conjetura, la hipótesis de la equiprobabilidad como fundamento para conjeturar que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Sin dicha hipótesis como fundamento la misma conjetura pierde credibilidad.

En las matemáticas formales las hipótesis se han relacionado con otros términos como fundamento, principio, postulado, supuesto o axioma (Ferrater, 1965, p. 846). Así ocurre, por ejemplo, con la definición formal de probabilidad de von Mises, basada en las hipótesis sobre los colectivos, o en la definición axiomática de Kolmogórov (Saldanha y Liu, 2014), o en cualquier otra de las muchas definiciones axiomáticas existentes cuya consideración es estrictamente necesaria en razonamientos de tipo demostrativo. Pero no es el tipo de razonamiento éste por el que abogamos, sino por el razonamiento plausible y estocástico. Así, consideramos la posición de Kant respecto de las hipótesis cuando afirma que las hipótesis no deben ser mera opinión sino fundarse en la posibilidad del objeto (Ferrater, 1965, p. 847). En este caso las suposiciones son verdaderas —y admisibles— hipótesis. Además, consideramos las hipótesis como una especie de andamiajes conceptuales, es decir, como hipótesis de trabajo en el sentido que le da Ferrater (1965, p. 884). La función de estas hipótesis, dice Ferrater, es ayudar a comprender mejor los fenómenos de que se trata. La hipótesis no es confirmada (o invalidada) por los fenómenos, pues de lo contrario no sería una hipótesis, pero no es totalmente independiente de los fenómenos pues de lo contrario no ayudaría en nada a comprenderlos. La hipótesis de la equiprobabilidad, como hipótesis de trabajo, nos ayuda a entender la Regla de Laplace.

Polya (1966) habla de hipótesis estadística en la resolución de problemas de probabilidad. Estas hipótesis pueden entenderse como un conjunto de hipótesis de trabajo. Así, por ejemplo, si lanzamos un conjunto de dados y exploramos la probabilidad de que haya una mayoría de números mayores que 4, la hipótesis estadística de que los dados se van a considerar justos implica dos hipótesis de trabajo, una que se refiere al comportamiento de cada uno de los dados, a quienes se les puede considerar (por hipótesis) equiprobables y otra, se refiere al comportamiento del conjunto de los dados durante el experimento aleatorio, considerando que sus resultados son (por hipótesis) independientes. Una hipótesis estadística no se juzga sino es el caso, pero, cuando bajo esas hipótesis el comportamiento esperable de un fenómeno aleatorio no ocurre, o bien ocurre con muy poca credibilidad, entonces es licito estudiar dichas hipótesis. Lo esperable es así una conjetura sujeta a nuevas hipótesis que son la reformulación de las iniciales.

Polya (1966), como Bernoulli[4] (1987/1713), asegura que "todos nuestros conocimientos consisten en conjeturas, excepto el de las Matemáticas (formales)" (p. 13). Pero, recalca que "hay conjeturas y conjeturas. Unas que merecen respeto y confianza y otras que no merecen ni confianza ni respeto... y, entre unas y otras, se dan toda clase de conjeturas, presentimientos e intuiciones" (p. 13). Afirma, además, que el conocimiento matemático se asegura mediante el razonamiento demostrativo, pero las conjeturas se apoyan por medio del razonamiento plausible. El razonamiento demostrativo establece la verdad, matemática, de una conjetura. El razonamiento plausible proporciona la credibilidad necesaria para la consideración de una conjetura fiable. Este tipo de razonamiento, el plausible, es el que se mostrará especialmente útil en la resolución de problemas de probabilidad, en los que lo que se busca no es demostrar la verdad de ningún enunciado probabilístico, ya sea numérico o no numérico, en el sentido de Popper (1977, p. 138), sino la fiabilidad, credibilidad o, incluso, la verosimilitud de una conjetura como respuesta a un problema formulado en un contexto de incertidumbre mediante un razonamiento estocástico.

Entendemos por conjeturar como Bernoulli (1713), esto es, conjeturar sobre algo es, también, medir su probabilidad[5], y por resolver un problema de

4 *Ea quae certa sunt et indubia, dicimur scire intelligere: caetera omnia conjicere tantum vel opinari* (Bernoulli, 1713, p. 213). "Decimos que sabemos o comprendemos lo que es cierto e indudable y que conjeturamos u opinamos sobre todo lo demás".

5 *Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem.*

probabilidad en el mismo sentido que el Arte de Conjeturar o Estocástica, es decir, traduciendo con cierta libertad, como el arte de medir como mejor podamos las probabilidades exactas de las cosas[6], con el fin de que podamos siempre elegir o seguir en nuestros juicios y acciones aquello que se aprendiere de manera mejor, preferible, escrupulosa y más reflexionada[7] (traducción toma de Fernández y Rodríguez, 2015)

Desde el punto de vista epistemológico, Bunge (2013) distingue entre ciencias formales (las matemáticas) y ciencias factuales (las ciencias experimentales). De esta forma, también distingue entre el sentido de uso del término hipótesis en una u otra ciencia. Hipótesis, en las ciencias formales, como postulados o axiomas surgidos de la experiencia y como puntos de partida en el proceso deductivo. Solo las conclusiones (teoremas) obtenidas a partir de los axiomas han de mostrarse matemáticamente verdaderas, no los axiomas mismos que pueden elegirse a voluntad y esto se habrá logrado si se respeta la coherencia lógica "esto es, si no se violan las leyes del sistema de lógica que se ha convenido en usar" (Bunge, 2013, p. 13). Pero, resolver un problema de probabilidad no consiste precisamente en llegar a unas conclusiones sobre la probabilidad de un suceso, o sobre el valor esperado de una variable aleatoria, que, bajo ciertas hipótesis, deban mostrarse matemáticamente verdaderas, sino razonablemente creíbles o fiables en el contexto particular en el que se obtienen. Así pues, las hipótesis no pueden elegirse a voluntad, sino que han de ser elegidas de un modo tal que permitan ser verificables por la experiencia, como la hipótesis de la equiprobabilidad, por ejemplo. En consecuencia, el sentido de uso de la hipótesis en la resolución de problemas de conjeturar-argumentar comparte significados con las ciencias formales, como axiomas o postulados, y con las ciencias factuales como conjeturas. La simulación como método de resolución de problemas (Huerta, 2015) permite transformar un problema desde la ciencia formal a la ciencia factual en la que se puede experimentar como un problema simulado. Las hipótesis del problema original, que lo modeliza, se traducen en hipótesis estadísticas requeridas para su simulación. Las conjeturas formuladas en el problema original, finalmente, se convierten en hipótesis verificables por la experiencia al resolver los problemas simulados.

6 *Ars Conjectandi sive Stochastice nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitates rerum.*

7 *Eo fine, ut in judiciis et actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, sitius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis philosophi sapientia et Politici prudentia versatur.*

3.3. *Hipótesis, conjeturas y la resolución de problemas de probabilidad. Base para una propuesta de enseñanza*

Polya (1966, p. 171) distingue entre problemas rutinarios y problemas no rutinarios. Los problemas de probabilidad, en el contexto de los juegos de azar equitativos, en el que la consideración de la hipótesis de la equiprobabilidad es muy razonable y la regla de Laplace permite asignar probabilidades a los sucesos, pueden llegar convertirse en problemas rutinarios en la enseñanza. Siguiendo a Polya, no diremos que los problemas rutinarios de probabilidad no son útiles para la enseñanza, sino todo lo contrario, pero sí afirmamos, como él, que limitar la enseñanza de la probabilidad a este tipo de problemas es rebajar su aprendizaje a unos niveles escasamente útiles y formativos. Un ejemplo de su potencial puede verse en Minyana (2018). Esta autora, siguiendo a Huerta (2018), desarrolla un proceso de enseñanza con estudiantes de 12-13 años basado en la resolución de un problema, de los que hemos llamado de hipótesis-conjetura-argumentación, el Problema de la Cueva (Huerta, 2002), con el fin de desarrollar lo que aquí entendemos como pensamiento estocástico. En el anexo puede verse la versión escolar de este problema. La autora anima a sus alumnos a considerar no sólo las hipótesis formuladas por el problema sino también aquellas que se requieren para su abordaje, las hipótesis estadísticas de la equiprobabilidad de elección de las puertas y de la independencia de las pruebas, si el proceso aleatorio termina después de más de una prueba. Las preguntas se formulan con el fin de que los alumnos razonen sobre ellas elaborando sus conjeturas, que son discutidas y valoradas en su credibilidad o fiabilidad. La simulación será el método que usará para que sus alumnos resuelvan sobre ello y decidan qué conjetura resulta más fiable o creíble tras el análisis exploratorio de los datos producidos por la simulación y las correspondientes inferencias informales realizadas a partir de la información que proporciona.

En efecto, un enfoque para la enseñanza de la probabilidad y la estadística como el que se infiere de lo que proponemos en este trabajo no podría tener éxito sin que haya un profesorado bien preparado para ello. En este sentido, Huerta (2015, 2018) propone un modelo de formación basado en la resolución de problemas con intención didáctica, en el que el profesorado en formación adquiere un doble papel frente a los problemas que se les propone: a priori como resolutores de los problemas y, a posteriori, como futuro profesorado que encuentra en la resolución de los problemas que ha resuelto un contexto idóneo para producir enseñanza en probabilidad y estadística. En este modelo, efectivamente, los problemas se conciben como problemas de hipótesis-conjetura-credibilidad/fiabilidad. En la resolución de estos problemas se combinan aspectos procedimentales como: a) una manera heurística de resolver problemas, b) el uso de la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico, y c) el análisis didáctico posterior del proceso de resolución como medio para cultivar una cierta mirada profesional (Llinares, 2018) de los problemas, con el fin, entre otros, de explorar qué oportunidades de aprendizaje proporcionaría la resolución de dichos problemas, considerados éstos como contextos para la enseñanza en la escuela primaria y secundaria.

El método de resolución propuesto por Huerta (2015, 2018), en sus primeros pasos, requiere que se formulen un conjunto de hipótesis, estadísticas en el sentido de Polya (1966), con el fin de que la situación de incertidumbre original pueda ser abordada, modelizada. Sujeta a estas hipótesis, el método propone que el resolutor elabore alguna conjetura sobre la pregunta del problema cuya fiabilidad o credibilidad se cuestiona a continuación. La cuestión de la fiabilidad o credibilidad de una conjetura se ve inmersa en un proceso de razonamiento plausible con el fin de apoyarla, refutarla o reformularla. Implica, además, un proceso de investigación en el que la simulación o experimentación pueden ser los instrumentos necesarios para la formulación de la mejor conjetura. Se enmarca, además, en un enfoque más general sobre la enseñanza de las matemáticas llamado *inquiry-based learning* (IBL) (Maaβ and Doorman, 2013), entendido como una forma de enseñar y unas prácticas de aula en la que son los propios estudiantes los que preguntan y ponen cuestiones, exploran y evalúan (p. 887).

Se puede inferir entonces que el enfoque para la enseñanza de la probabilidad, en todos los niveles, esté basado en este juego hipótesis-conjetura propio del quehacer matemático, con la diferencia de que, en un contexto de incertidumbre, dada una hipótesis o un conjunto de ellas conducente a una conjetura, de ésta no se predica sobre su verdad, lo que implicaría usar un razonamiento demostrativo (Polya, 1966, p. 13), sino sobre su fiabilidad o credibilidad en términos de probabilidades, implicando el uso del razonamiento plausible. Con esta sugerencia se pretende tratar con otros enfoques alternativos a los actuales sobre la enseñanza de la probabilidad y, en consecuencia, de la necesidad de formación de los profesores en esta dialéctica, formación sobre la que la investigación está de acuerdo en que es bastante deficitaria (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016).

3.4. *El método de resolución de problemas de probabilidad por simulación*

El método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (en adelante MRPPS) tiene sus referentes en la propia experiencia del autor y en trabajos anteriores con los que se relaciona y comparte ideas relevantes. Así, a parte de lo que ya se ha discutido en apartados anteriores en relación con las nociones de hipótesis y conjeturas, consideradas como elementos fundamentales de la actividad matemática necesaria para la resolución de los problemas de probabilidad, comparte, además, con otros autores aspectos procedimentales necesarios durante el proceso de resolución. Así, con Beth (1989) comparte la propuesta de usar la simulación como un método para modelizar problemas realistas, pero que aquí la reinterpretamos como un método de resolución de problemas con contenido heurístico; con Schup (1989) compartimos su idea de circuito estocástico que la interpretamos como el esquema básico del proceso de resolución de problemas en el que la simulación es usada como una herramienta heurística que transforma el problema original en un problema simulado cuya resolución permite obtener una respuesta al primero. Comparte con Wild y Pfannkuch (1999) la idea de razonamiento estadístico implicado en los procesos empíricos de investigación, pues la respuesta al problema simulado requiere de dicho razonamiento, aplicado en el análisis de los datos a partir del diseño e implementación de una simulación cuya finalidad es obtener información sobre el comportamiento de un sistema en un contexto de incertidumbre. Finalmente, comparte con Spiegelhalter y Gage (2014) la idea de referirse a la resolución de problemas de probabilidad por simulación como un manifiesto para la enseñanza de la probabilidad y la estadística en todos los niveles educativos y en la formación de profesores, con un enfoque basado en el IBL (Maaβ and Doorman, 2013) y con el anhelo de un enfoque distinto de la enseñanza de la probabilidad y estadística al actual (Pfannkuch, 2018 y Pratt, 2011).

En efecto, parafraseando a Bernoulli, hemos calificado el Método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (MRPPS) como el *arte* de hacer las cosas necesarias para elaborar la mejor conjetura posible sobre la realización o no de un fenómeno incierto o sobre el comportamiento de una variable aleatoria. El MRPPS está descrito por medio de 8 pasos, cada uno de ellos con una finalidad claramente establecida y con un tipo de razonamiento requerido. Así, el proceso de resolución comienza con el necesario análisis del enunciado del problema (paso 1). El método identifica a éste como el problema original ya que el resolutor se encontrará, a lo largo del proceso de resolución, con la necesidad de resolver algún problema intermedio, a quien el método le califica de problema simulado, fruto de la simulación. Este análisis inicial permite pensar sobre dos aspectos importantes: la necesidad o no de formular hipótesis iniciales que permitan abordar la resolución del problema y la elaboración de conjetura razonables sobre lo que es preguntado en el problema (paso 2). El riesgo de que se elaboren conjeturas arbitrarias es bastante alto al comienzo del proceso de resolución pues, como dice Poincaré, (1992), la ignorancia sobre las cosas y sus causas fuerzan a ello, más aún en contextos de incertidumbre. Durante los pasos 1 y 2 el protagonista es el razonamiento plausible y su objeto la modelización del problema. Minyana (2018) prueba que este razonamiento se activa en niños/as de 12-13 años, quienes elaboran de manera intuitiva conjeturas razonables sobre la ocurrencia de sucesos o sobre valores esperados, tanto en procesos aleatorios discretos, lanzamiento de dos dados, como en procesos estocásticos de Markov absorbentes (Gordon, 1997) (Problemas 2, 3 o 4 en el anexo).

En los primeros pasos del método (paso 3), descrito aquí, por el momento, sin intención didáctica, la conjetura, ligada a la hipótesis o al conjunto de hipótesis sobre la que se sustenta, se somete a juicio sobre su credibilidad, fiabilidad, etc. El resolutor tiene, entonces, dos caminos para construir argumentos que den cuenta de la credibilidad o fiabilidad de la conjetura formulada. Por un lado, identificar un modelo teórico, o construir uno si no existe, o no lo encuentra, para las hipótesis consideradas, que le permita obtener una respuesta teórica al problema y valorar así la bondad de su conjetura inicial al compararla con la respuesta teórica, considerada como la mejor de las conjeturas para el conjunto de hipótesis formuladas. Por otro, experimentar/simular el problema (paso 4) con el fin de que un nuevo problema (el problema simulado), situado en un contexto distinto al del problema original, cuya resolución (paso 5) le permita elaborar argumentos razonables con los que discutir la credibilidad o fiabilidad de la conjetura surgidos del análisis de los datos y de llevar a cabo inferencias sobre ellos y, si es el caso (paso 7) , elaborar una nueva conjetura con un mayor grado de credibilidad o fiabilidad que la inicial, lo que convierte al método en un método recursivo (paso 8). La intención didáctica del método se presenta al futuro profesorado en el paso 6. En él se plantea si las argumentaciones construidas a partir de inferencias realizadas en dos muestras de datos obtenidas de manera independiente, es decir, fruto de simular el problema con dos generadores de azar distintos, son dependientes de éste dando lugar a conclusiones distintas o no.

4. Concreción en una propuesta para la formación inicial del profesorado

La propuesta que presentamos aquí se articula alrededor de la resolución de problemas como los que se muestran a modo de ejemplo en el anexo. El orden en el que se van a describir es intencional para este trabajo, al mostrar que cada nuevo problema exige del resolutor un mayor nivel de competencia en el método de resolución del problema, lo cual, desde el punto de vista de su formación como profesor, permite enriquecer la mirada profesional sobre el problema al identificar posibles trayectorias de aprendizaje y la posibilidad así de fomentar el desarrollo del razonamiento estocástico, así como el papel de gestor del proceso de resolución del problema en el aula.

4.1. *Objetivos didácticos de la propuesta*

Los problemas que constituyen esta propuesta de formación de profesores comparten los siguientes objetivos.

1. Objetivos generales. Que el profesorado en formación adquiera competencias tanto en la resolución de problemas de probabilidad como actividad matemática y en la consideración de la resolución de problemas como contexto de enseñanza. En particular:
    a. Introducir al profesorado en el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación.
    b. Introducir al profesorado la resolución de problemas como contexto de enseñanza para la probabilidad y la estadística y el método de resolución como metodología de enseñanza.
2. Objetivos específicos.
    a. Relacionados con el primer objetivo general. Que el profesorado en formación adquiera un uso competente de las hipótesis y conjeturas en el razonamiento estocástico, tanto en sus significados relacionados con las ciencias formales como con el de las ciencias factuales. En particular, que el profesorado en formación adquiera competencias en:
        i. La dialéctica hipótesis-conjeturas en la actividad matemática.
        ii. La formulación de las hipótesis necesarias que permiten abordar el problema desde un punto de vista matemático.
        iii. La elaboración, mediante el uso del razonamiento plausible, de tantas conjeturas como sean necesarias en respuesta a las preguntas formuladas en el problema. Dependencia de las conjeturas de las hipótesis consideradas.
        iv. Los métodos de verificación de conjeturas. Reconocimiento de que medir la credibilidad / fiabilidad de una conjetura en un contexto de incertidumbre es, también, una actividad propia de las matemáticas.
        v. La simulación como un método con el que poder estudiar la credibilidad o fiabilidad de las conjeturas que se elaboran en un contexto de incertidumbre.

b. Relacionados con el segundo objetivo general. Que el profesorado en formación vaya construyendo una mirada profesional cada vez más satisfactoria sobre el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación como contexto de enseñanza y del método de resolución con contenido heurístico como una metodología de enseñanza. En particular,

    i. El reconocimiento del potencial del análisis inicial de la situación problemática para que el alumnado reconozca la necesidad de formular hipótesis iniciales con el fin de que el problema sea tratable matemáticamente.

    ii. El reconocimiento de que es posible desarrollar competencias en el alumnado de educación primaria y secundaria en relación con la formulación de hipótesis y conjeturas, como se prescribe en sus respectivas directrices curriculares.

    iii. El reconocimiento de que los estudiantes de niveles inferiores pueden ser capaces de construir argumentos sobre la fiabilidad de las conjeturas formuladas como actividad propia de quehacer matemático.

    iv. El reconocimiento de que la simulación como un método de resolución de problemas realistas permite abordar problemas cuya complejidad teórica los haría inabordables en los niveles educativos en los que tienen competencias profesionales.

    v. El reconocimiento de la riqueza de significados que los conceptos de probabilidad, variable aleatoria y esperanza matemática de una variable aleatoria adquieren en aplicación del MRPPS a la resolución de problemas de probabilidad.

4.2. *La propuesta de problemas. Un ejemplo*

En la tabla siguiente (TABLA I) se describen características de problemas que pueden formar parte de una propuesta como la nuestra. Obviamente, el número de problemas no es lo que la caracteriza, pues este puede variar en función de los objetivos que se persigan, la disponibilidad, etc. sino el método usado para su resolución.

TABLA I
Características de los problemas propuestos en la formación de profesores

Variables: HT = Hipótesis teóricas; C = Conjeturas plausibles; MT = Modelo teórico; MR = Medio de representación; ME = Modelo empírico; P = Significados de la probabilidad; E = significado de la esperanza matemática.

Valores: E / I / P = equiprobabilidad (E) / Independencia de las pruebas (I) / Formuladas en el problema (P); PCI = Probabilidad compuesta de pruebas independientes; CMA = Cadena de Markov absorbente; Ex = Experimentación; S = Simulación; T / P / S = Significado teórico (T) / Significado Frecuencial (F) / Significado Subjetivo (S); VM = Valor medio o promedio de un conjunto de datos.

Problema	*HT*	*C*	*MT*	*MR*	*ME*	*P*	*E*
Piedra - Papel - Tijera	E / I	Existe / No existe estrategia.	PCI	Árbol	Ex	TFS	
Parchís	E / I	*n* intentos	CMA	Grafo	S		VM
Colecciones (con limitaciones)	E / I	Sí / No	PCI	Árbol	S	TFS	
Colecciones (sin limitaciones)	E / I	*n* intentos	CMA	Grafo	S	TFS	VM
Caza de patos	E / I	n supervivientes / difícil / fácil sobrevivir	Bi (n, p)	Árbol	S	TFS	VM
El problema de la cueva (con limitaciones)	E / I / P	Difícil / fácil salir. Salen *n* personas. Muchos / pocos intentos	PCI	Árbol	S	TFS	
El problema de la cueva (sin limitaciones)	E / I / P	Siempre se sale. Salen muchos / *n* / todos. Mucho / poco tiempo	CMA	Grafo	S		VM

Todos los problemas propuestos son abordables bajo las hipótesis teóricas iniciales de la equiprobabilidad y la independencia de las pruebas, aunque no es una condición *sine qua non*. Así, por ejemplo, el problema de Piedra-Papel -Tijera comienza abordándose bajo estas hipótesis que son abandonadas en dudar de que el comportamiento de los humanos al elegir al azar entre diferentes posibilidades se pueda describir mediante esas hipótesis. En consecuencia, el problema planteado para estudiar la fiabilidad de la conjetura formulada se ha de abordar de un modo empírico sin hipótesis teóricas previas.

Todos los problemas, excepto el problema de Piedra-Papel-Tijera, requieren de la simulación para estudiar la fiabilidad de conjeturas sobre la probabilidad de ocurrencia de un suceso y/o el valor esperado de una variable aleatoria. Esto permite considerar a lo largo del proceso de resolución los distintos significados de la probabilidad. Se parte, por ejemplo, de una conjetura que se formula en términos de una probabilidad subjetiva o un número esperado, se evalúa la fiabilidad de éstos, en la medida que esto es posible, mediante una probabilidad o esperanza matemática teórica y se finaliza argumentando sobre la bondad de la conjetura mediante una probabilidad empírica o un valor esperado.

Los modelos teóricos desde los que se pueden abordar estos problemas van desde un espacio de probabilidad finito compuesto de pruebas independientes (PCI), a una Binomial (Bi), a una cadena de Markov absorbente (CMA). La simulación, como método de resolución, los hace abordables independientemente de dichos modelos teóricos. El problema de la cueva, en particular, permite transitar desde un modelo PCI, con la inclusión en el enunciado del problema de una hipótesis (supuesto P) particular que hace finito el espacio de posibilidades, a un modelo CMA con la consideración de una nueva hipótesis (supuesto P) que convierte el espacio de posibilidades en infinito. Esto mismo puede tratarse en el problema de las colecciones.

Los árboles, como sistemas de representación habituales en los problemas PCI, también se ven afectados cuando el problema transita hacia un modelo CMA, convirtiéndose en grafos que representan paseos aleatorios. Podemos verlo en el problema de la cueva (Huerta, 2002).

Todo lo anterior tiene que ver con la formación del profesorado en aspectos conceptuales y procedimentales que proporcionan la resolución de los problemas propuestos, así como el desarrollo del pensamiento estocástico que pueden enriquecer aún más su mirada profesional. Pero, al mismo tiempo, también se derivan aspectos metodológicos que deberían tener en cuenta ante una situación real de enseñanza. Estos, fundamentalmente, tienen que ver con la gestión del proceso de resolución del problema. El propio método, como método que es, constituye una guía metodológica para el profesorado. De su aplicación surgen cuestiones de tipo metodológico sobre las que el profesorado deberá tomar ciertas decisiones *in situ*. Así, deberá decidir qué generadores de azar usará con sus alumnos para simular el problema: simulación física o virtual, o ambas. El número de simulaciones que deberían realizarse en clase para alcanzar un grado de fiabilidad aceptable de la conjetura inicialmente formulada. Derivado de esto, la necesidad de la tecnología para la obtención, tratamiento y análisis de la información producida por la simulación. La manera en la que va gestionar la variabilidad de los datos aportados por las diferentes simulaciones proporcionadas por los alumnos o grupos de alumnos. La vuelta atrás en el problema y la revisión de las hipótesis y conjeturas inicialmente consideradas. Cuando, en fin, va a dar por terminado el problema con la mejor conjetura que se pueda alcanzar. Son aspectos que sólo la experiencia y puesta en práctica permitirán enriquecer la mirada profesional del profesorado.

5. A modo de reflexión final

Actualmente, la enseñanza de las matemáticas está cuestionada tanto en sus contenidos como en sus enfoques. El cambio de siglo y con él la irrupción imparable de la tecnología en las vidas de los ciudadanos pone en cuestión el conservadurismo de una enseñanza de las matemáticas ancladas en el siglo anterior. Recientemente, se ha celebrado una conferencia en Ginebra, (a la que se puede acceder en www.fondationhelvetica.ch/genevaconference/) en la que el propósito es dar respuesta a la pregunta: ¿Qué deberían aprender los estudiantes en el siglo XXI?, mediante conferencias que propugnan cambios en el currículum escolar de matemáticas, señalando qué partes o temas deberían introducirse o ser enfatizadas, y por qué, y algo mucho más crucial qué aspectos deberían dejarse de enfatizar o incluso eliminar. En esta discusión se aboga por que la probabilidad y la estadística tengan un protagonismo mayor que el que tienen actualmente en las propuestas curriculares, con un enfoque distinto que, junto con una manera heurística de resolver problemas realistas, favorezcan el desarrollo del razonamiento estocástico, (Devlin, 2018, en http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/DEVLIN-talk-2018.pdf).

En este trabajo llamamos a las puertas de la formación del profesorado del siglo XXI que ha de enseñar probabilidad y estadística. Proponemos un enfoque nuevo para una nueva enseñanza, en cualquier nivel educativo, que esté basada en la dialéctica hipótesis-conjetura mediante la resolución de problemas realistas que hemos acuñado como de hipótesis-conjetura-fiabilidad / credibilidad, en los que en la construcción de argumentos para apoyar o rechazar una conjetura quepa tanto el enfoque teórico, frecuentista o subjetivo de la probabilidad.

Con este trabajo, también, nos movemos modestamente hacia el curriculum de futuro, como el que imagina Pfannkuch (2018), con una propuesta que combina elementos de la actividad matemática en la resolución de problemas aplicados a los problemas de probabilidad y que dan sentido a unos y otros. Que implica a un buen número de procesos de razonamiento: como el razonamiento matemático, al fundamentarlo en las hipótesis necesarias que hacen que un problema realista formulado, en esta ocasión, en una situación de incertidumbre, sea posible tratarlo matemáticamente; que implica al razonamiento plausible necesario para formular conjeturas razonables y que implica, finalmente, al razonamiento estocástico que permite construir argumentos sobre la fiabilidad o credibilidad de las conjeturas planteadas. ¿O es que el razonamiento estocástico es una combinación de todos ellos? En el desarrollo de propuestas como la nuestra y en la necesaria investigación sobre el comportamiento de los distintos actores, profesores y alumnos, en ella puede estar la respuesta.

Referencias

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee H., y Sánchez, E. (Eds.) (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*, ICME-13 Topical Surveys, DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Begué, N., Batanero, C., y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral en estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias 36*(2), 63-79.

Bernoulli, J. (1987/1713). *Ars conjectandi - 4ème partie*. Rouen: IREM. (Original work published in 1713).

Beth, B. (1989). Using simulation to model real-world problems. In M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics,* 7, 95-100. Paris: UNESCO.

Benson, C. T., & Jones, G. A. (1999). Assessing Students' Thinking in Modeling Probability Contexts. *The mathematics Educator 4*(2), 1-21.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Tween Concepts. In C. Batanero & E. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics,* ICME-13 Monographs. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17

Bunge, M. (2013). *La ciencia. Su método y su filosofía*. Pamplona: Laetoli.

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E., y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemática 11*, 145 – 167.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI / IASE Study*, (pp. 85-95). New York: Springer.

De Villiers, M., & Heideman, N. (2014). Conjecturing, Refuting and Proving within the Context of Dynamic Geometry. *Learning and Teaching Mathematics*, *17*, 20-26.

Devlin, K. (2018). The Mathematics People Really Need. Presentación disponible en http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/DEVLIN-talk-2018.pdf y vídeo en https://youtu.be/qBOnWZyq468, ambas visitada el 22 de junio de 2018.

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In E. J. Chernoff, B. Sriraman (eds.) (2014), *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspective* (pp. 75-100). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Fernández, B., y Rodríguez, B. (2015). Del *Ars Conjectandi* al Valor de riesgo. *Miscelánea matemática, 60*, 25-45

Ferrater Mora, J. (1965). *Diccionario de Filosofía*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 145-167.

Furinghetti, F., Olivero F., & Paola, D. (2010). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 32*(3), 319-335. DOI: https://doi.org/10.1080/00207390120360

Gordon, H. (1997). *Discrete Probability*. New York: Springer

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 75-86.

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad *con intención didáctica* en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Huerta, M. P. (2018). Preparing Teachers for Teaching Probability Through Problem Solving. In C. Batanero and E. J. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics*, ICME-13 Monographs (pp. 293-311). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge Academic Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón: SEIEM

Maaβ, K., & Doorman. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based leaning. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 887-899.

Makar, K. & Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education*. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Martínez, M. L., Huerta, P. y González, E. (2018). Dificultades de los maestros y profesores en formación para identificar hipótesis y conjeturas en una tarea de probabilidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p.638). Gijón: SEIEM.

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2015). Diseño e implementación de una situación de incertidumbre en una clase de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(1), 24-36.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MEC, 2014a). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero por que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado de 1 de marzo de 2014. Madrid.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MEC, 2014b). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado de 1 de enero de 2015. Madrid.

Minyana, M. (2018). *Hipòtesi i conjectures en el pensament estocàstic d'estudiants de 1er de Educació Secundària Obligatòria (12-13 anys).* (Hypothesis and conjectures in 12-13 aged-students' stochastic thinking). Trabajo de Fin de Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.

Pfannkuch, M. (2018). Reimaging Curriculum Approaches. In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (eds.) (2018), International Handbook of Research in Statistics Education (pp. 387-413). Springer International Handbooks of Education. https:// doi.org/10.1007/978-3-3319-66195-7_12

NCTM (2018). *Principles and Standards for School Mathematics*. Disponible en https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf (visitado el 12 de julio de 2018)

Poincaré, H. (1992). *La Science et l'Hypothèse*. Rueil-Malmason: La Bohème.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Popper, K. (1977). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.

Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. Proceedings of the 58th World Statistical Congress (pp. 890-899). Dublin.

Saldanha, L., & Liu, Y. (2014). Challenges in Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective. In E. J. Chernoff, B. Sriraman (eds.) (2014), *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspective* (pp. 367-398). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Schup, H. (1989). Appropriate teaching and learning of stochastics in the middle grades (5-10). In M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics.* (vol. 7), (pp. 101-121). Paris: UNESCO.

Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2014). What Can Education Learn from Real-World Communication of Risk and Uncertainty? *The Mathematics Enthusiast 12*(1-3), 4 -10.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J., & Cañizares M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*(1), 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? In R. W. Sholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review 67* (3), 223-265.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulation during instruction*. Doctoral Dissertation. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.Zimmerman.Dissertation.pdf

Autores

M. Pedro Huerta. Universitat de València, España. manuel.p.huerta@uv.es

Anexo

Enunciados de ejemplos de problemas.

1. piedra-papel-tijera

En el juego de piedra, papel o tijera, ¿existe alguna estrategia ganadora?

2. el 5 en el juego del parchís

En el juego del parchís, ¿cuántos turnos es razonable esperar hasta que, al lanzar el dado, aparezca el 5 y podamos sacar ficha?

3. las colecciones

Una empresa de alimentación lanza una promoción de uno de sus productos regalando una figura al azar de las *n* que constituyen la colección, que introduce en el interior del envoltorio. El precio de ese producto es de 1 euro.

a) ¿Crees que podrás completar la colección de n=3 piezas si sólo dispones de 9 €? Se sugiere hacer un estudio en función del tamaño de la colección y la disponibilidad económica.
b) Si el dinero disponible no es un obstáculo, por término medio (aproximadamente, más o menos, razonablemente), ¿cuántos productos tendrías que comprar para completar una colección de *n* figuritas? Se sugiere hacer un estudio dependiendo de *n*.

4. la caza de patos

Diez cazadores se encuentran apostados alrededor de una laguna cuando se posan en ella 10 patos. Todos los cazadores son de élite. En un momento dado, los 10 cazadores dispararan a la vez.

a) Antes de que los cazadores disparen, ¿qué probabilidad crees que tenía un pato cualquiera de no ser alcanzado?
b) Después de disparar, por término medio, ¿cuántos patos crees que no serán alcanzados? (Se sugiere formular las preguntas en términos predictivos).

5. el problema de la cueva

En una cueva se han introducido 27 personas. La cueva tiene tres puertas. Por una de ellas se llega al exterior en una hora. Por otra, después de caminar durante dos días se vuelve al interior desde donde se partió. Por la tercera, después de caminar durante tres días se vuelve también al interior de la cueva. Ninguna de las personas es capaz de recordar la puerta que ha elegido cada vez que intenta salir de la cueva, pues hay tanta obscuridad que impide cualquier reconocimiento de las puertas. Así que cada vez que lo intentan salir lo dejan todo en manos del azar. Consideremos, por separado, estos dos supuestos:

a) Cada persona tiene comida para 5 días y una hora.
b) La comida no es problema, es ilimitada.

Para cada una de los supuestos anteriores:

1 ¿Crees que las personas que están en el interior lo tienen fácil para salir de la cueva?
2 ¿Cuántas personas esperas que (por término medio) podrían salir de la cueva?
3 ¿Cuánto tiempo esperas que se ha de emplear (por término medio) en salir de la cueva?

Raquel Isabel Barrera-Curin, Laurie Bergeron, Audrey Perreault

ANALYSE DES INTERACTIONS DANS UNE CLASSE OÙ LES ÉLÈVES PRÉSENTENT DES DIFFICULTÉS LANGAGIÈRES : L'INFLUENCE DES PRATIQUES D'UNE ENSEIGNANTE SUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Analysis of interactions in a class where students present language difficulties: the influence of a teaching practice on the mathematical activity of students

RESUMEN

En este artículo, nos interesamos en las prácticas de enseñanza, así como en la actividad matemática de los alumnos en el contexto de la educación especial en Quebec. Con este fin, estudiamos una clase donde el lenguaje se presenta como un problema para el maestro, dadas las dificultades lingüísticas de los alumnos. Nuestro análisis busca, por un lado, determinar las restricciones institucionales y sociales que influyen en las prácticas docentes en matemáticas y, por otro, dar cuenta de los medios lingüísticos de mediación utilizados por una maestra al intentar realizar una actividad matemática con sus alumnos. Bajo la mirada del doble enfoque didáctico y ergonómico, así como de la epistemología de Maturana, presentamos una metodología en tres niveles que permite abordar la complejidad de la práctica docente en el contexto particular de una clase. A través del análisis de las formas de trabajo y las interacciones lingüísticas, exponemos el impacto de las restricciones institucionales en la práctica de una maestra con respecto a las posibilidades de llevar a cabo una actividad matemática.

PALABRAS CLAVE:

- *Interacciones lingüísticas*
- *Actividad matemática*
- *Práctica docente*
- *Difficultades de lenguaje*

ABSTRACT

For the purposes of this article, we focus on teaching practices as well as the students' mathematical activity in the context of special education in Quebec. To this end, we study a class where language is an issue for the teacher, given the language difficulties of the students. Our analysis seek, on the one hand, to determine the institutional and social constraints that influence teaching practices in mathematics and, on the other hand, to report on the means of mediation used by the teacher at the core of his/her practice for the purpose of conducting a mathematical activity with his/her students. Under a didactic and ergonomic

KEYWORDS:

- *Language interactions*
- *Mathematical activity*
- *Teaching practice*
- *Language difficulties*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 103-133.
Recepción: Febrero 5, 2019 / Aceptación: Marzo 17, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2314

approach as well as from the Maturanian epistemology, we present a three-level methodology to approach the complexity of teaching practice in a class within this particular context. Through the analysis of work organisation types as well as language interactions, we expose the impact of institutional constraints on the practice of this teacher concerning the possibilities of conducting a mathematical activity.

RESUMO

Nesse artigo nós nos interessamos as práticas de ensino assim como a atividade matemática dos alunos em um contexto de educação especializada no Quebec. Para tal, nós analisamos uma classe onde a linguagem é uma questão importante para a professora considerando as dificuldades de linguagem de seus alunos. Nossas análises procuram, de uma parte, determinar as imposições institucionais e sociais que influenciam as práticas de ensino de matemática e, de outra parte, relatar os mecanismos linguísticos de mediação usados pela professora no centro da sua prática com o objetivo de conduzir uma atividade matemática com seus alunos. Sob o ângulo da dupla abordagem didática e ergonômica, assim como a epistemologia maturana, nós apresentamos uma metodologia em três níveis que permitem de abordar a complexidade da prática de ensino no contexto particular dessa classe. Através uma análise das formas de trabalho assim que das interações linguísticas expormos o impacto das imposições institucionais sobre a prática de ensino dessa professora em relação as possibilidades de conduzir uma atividade matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Interações linguísticas*
- *Atividade matemática*
- *Dificuldades de linguagem*
- *Práticas de ensino de matemátic*

RÉSUMÉ

Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons aux pratiques enseignantes ainsi qu'à l'activité mathématique des élèves dans le contexte de l'éducation spécialisée au Québec. À cet effet, nous étudions une classe où le langage est un enjeu pour l'enseignante, vu les difficultés langagières des élèves. Nos analyses cherchent, d'une part, à déterminer les contraintes institutionnelles et sociales qui influencent les pratiques enseignantes en mathématiques et, d'autre part, à rendre compte des moyens langagiers de médiation utilisés par l'enseignante au cœur de sa pratique, dans le but de mener une activité mathématique avec ses élèves. Sous le regard de la double approche didactique et ergonomique ainsi que de l'épistémologie maturanienne, nous présentons une méthodologie à trois niveaux permettant d'approcher la complexité de la pratique enseignante dans le contexte particulier de cette classe. Par l'entremise de l'analyse des formes de travail ainsi que des interactions langagières, nous exposons l'impact des contraintes institutionnelles sur la pratique de cette enseignante concernant les possibilités de mener une activité mathématique.

MOTS CLÉS:

- *Interactions langagières*
- *Activité mathématique*
- *Pratique enseignante*
- *Difficultés de langage*

1. Problématique

Dans le cadre de cet article, nous centrons nos analyses sur les interactions langagières dans une classe regroupant des élèves présentant des troubles auditifs, ainsi que certains diagnostics différenciés tels qu'une déficience intellectuelle ou un trouble du spectre de l'autisme.

Au Québec, de nombreux élèves scolarisés présentent des difficultés langagières, tant au niveau expressif qu'au niveau de la compréhension. Or, si le langage constitue l'outil principal de l'enseignant.e dans la réalisation de son travail (instructions, aides, consignes, monstrations appuyées de verbalisations, etc.), dans le contexte d'une classe spéciale regroupant des élèves avec diverses problématiques langagières (Odier-Guedj, 2010 ; Odier-Guedj & Gombert, 2014), trouver des moyens pour mener à bien son projet d'enseignement devient un enjeu majeur. Parmi la grande variété de formes que peuvent prendre les difficultés des élèves (Odier-Guedj, 2010), certaines se manifestent plus spécifiquement dans un contexte d'apprentissage des mathématiques. Par exemple, l'usage de termes du quotidien pouvant amener à des déplacements de sens de l'objet mathématique évoqué, les contenus descriptifs, l'explication et l'analyse de procédures, l'articulation entre différentes notions mathématiques ou encore les mises en relation entre mathématiques et vie quotidienne. Dès lors, les enseignants se trouvent dans l'obligation - prescription d'un travail qui doit être adapté aux besoins et difficultés des élèves (MELS, 1999) de modifier et d'adapter leurs façons d'agir. Cette prescription de leur travail se fait toutefois sans proposition de moyens opérationnels pour les atteindre. Les enseignants se trouvent ainsi contraints de déterminer et de mettre en place eux-mêmes ces moyens.

Les approches ergonomiques et didactiques sous-tendant ce projet suscitent certaines questions : quelles formes prennent ces adaptations ? Les enseignant.e.s, utilisent-ils/elles d'autres moyens que le langage parlé pour favoriser les interactions langagières avec leurs élèves ? Et si oui, quels types d'interactions se produisent en classe ? Et finalement, à quelles conditions dans ce contexte spécifique de l'éducation spécialisée, les pratiques enseignantes contribuent-elles à la production d'une activité mathématique[1] chez les élèves ?

Dans cet article, nous présentons d'abord les fondements épistémologiques et théoriques afin de préciser notre conception de l'activité mathématique ainsi que pour nous situer théoriquement vis-à-vis des chercheurs étudiant les liens entre langage et activité mathématique, pour ensuite exposer notre cadre d'analyse des pratiques enseignantes. Il s'agit pour nous de présenter un cadre d'analyse novateur

1 Nous traiterons au sein de la prochaine section de la définition du concept d'activité mathématique.

pour l'étude des pratiques enseignantes. Le contenu de cet article nous permet d'illustrer son usage par l'analyse d'une séance. À la lumière de ce cadre, nous proposons une méthodologie à plusieurs niveaux nous permettant d'appréhender la pratique enseignante selon l'ici et maintenant de la classe, en plus de considérer les différentes contraintes qui pèsent sur celle-ci. Nos analyses nous amènent à une meilleure compréhension de la pratique observée, favorisant ainsi des réflexions menant l'enseignante à envisager des transformations au cœur de ses pratiques (cf. Discussion). Finalement, nous présentons une analyse des interactions langagières autour d'objets mathématiques dans le contexte d'un cours de cuisine au sein duquel une enseignante aborde des procédures élémentaires de dénombrement et de comparaison.

2. Contexte théorique, fondements épistémologiques

2.1. *Qu'est-ce que l'activité mathématique ?*

L'expression *activité mathématique* rend compte d'un processus d'appropriation et de réflexion pour répondre à un problème donné (Maheux & Proulx, 2014 ; Proulx, 2015 ; Radford, 2010 ; Lave, 1988 ; Hoyles, 2001). Elle prend cependant des significations variées suivant les fondements épistémologiques des auteurs ou des professionnels qui en font l'usage.

Dans le cadre de notre recherche, l'activité mathématique est définie à la lumière de la théorie biologique de la connaissance (Maturana & Varela, 1998). Elle est action et elle est langage. Elle est émergence et mise en œuvre de stratégies. Elle se produit au cœur d'un processus de communication (Maturana & Varela, 1998) résultant « des coordinations des coordinations de l'agir » (Maturana & Verden-Zöller, 2008) de l'enseignant.e et de l'élève. En conséquence, elle ne peut être réduite à un processus de transmission d'information, puisque la communication « depends on not what is transmitted, but on what happens to the person who receives it » (Maturana & Varela, 1998, p. 196). Dans ce contexte, l'environnement – la classe, le milieu d'apprentissage, les situations mathématiques et les tâches prescrites – est considéré comme un déclencheur d'actions (Figure 1). Ces actions, de l'élève et de l'enseignant.e, offrent une porte d'entrée pour observer leurs connaissances (René de Cotret, 1999). Au cœur des interactions, l'appropriation d'objets mathématiques « n'entraîne pas nécessairement les mêmes conséquences pour toutes les personnes, car c'est un processus historique, situé et individuel » (Notre traduction. Bauersfeld, 1995). Comme Bauersfeld (1995) le soulève: « only across social interaction and permanent negotiations of meaning can "consensual domains" emerge » (p. 275). Il s'agit donc de co-inspiration et de coexistence en harmonie avec l'environnement et tout ce qu'il rend possible. L'élève et l'enseignant.e agissent ainsi dans un espace éthique où leur légitimité propre est reconnue par l'autre (Maturana & Verden-Zöller, 2008). L'élève et l'enseignant.e agissent ainsi dans un espace éthique où leur légitimité propre est reconnue par l'autre (Maturana & Verden-Zöller, 2008).

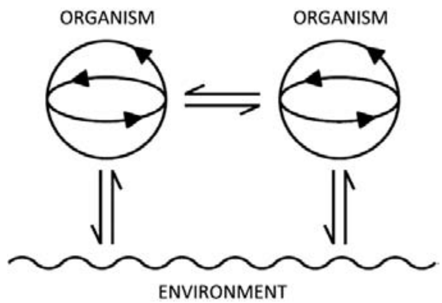


Figure 1. Les coordinations des coordinations des êtres vivants au cœur de l'épistémologie Maturanienne (Maturana & Varela, 1998, p.74)

Mais que se passe-t-il lorsque les interactions doivent se produire dans un contexte où, entre autres, une des plus grandes difficultés des élèves est le langage parlé ? Selon Maturana et Verden-Zöller (2008), l'interaction émerge dans le langage comme une façon de coexister dans les coordinations des coordinations de l'agir :

> language is not a domain of abstractions or symbols, it is a concrete domain of coordinations of coordinations of concrete doings [...] We humans are not only languaging animals, but we exist in languaging, and we disappear as humans if language disappears. That is, it happens that we are in language not that we use language, that our being in language is our manner of existence [...], and that our psychic existence includes the relational dimensions of our languaging being (Maturana & Verden-Zöller, 1996, p. 4)

En d'autres mots, l'être humain et tout ce qui l'entoure « sont » dans le langage :

> Languaging takes place in the various domains of our doings in the continuous realization of all our doings. [...] We do not use language and conversations; rather, anything we distinguish, including ourselves (as when we say "we"), occurs as a flow of conversations in a relational domain with others like ourselves. [...] A human being is a dynamic manner of being in language, not a body, not an entity that has an existence that can be imagined independent of language and that can then use language as an instrument for communication (Maturana &Verden-Zöller, 2008, p.112)

En conséquence, le langage, dans toutes ses formes (verbal, non verbal ou paraverbal), devient l'élément fondamental à explorer dans le cadre de notre recherche.

Plus précisément, les conceptualisations vis-à-vis du langage au sein de l'épistémologie maturanienne, nous amènent à nous questionner sur l'impact des contraintes qui pèsent sur les pratiques enseignantes lorsqu'il est question de déclencher une activité mathématique avec des élèves présentant des troubles langagiers.

2.2. *Le langage dans toutes ses formes au cœur de l'activité mathématique*

Plusieurs recherches en didactique des mathématiques (e.g. Barrera-Curin & Chesnais 2015 ; Barrier & Mathé, 2014 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014 ; Bulf, Mithalal & Mathé, 2015 ; Chesnais, 2018 ; Coulange, 2015 ; Durand-Guerrier & Chellougui, 2015 ; Giroux, 2004 ; Gobert, 2014 ; Mathé, 2012 ; Mathé & Mithalal, 2014 ; René de Cotret, 1999) et en éducation mathématique (e.g. Barwell et al, 2016 ; Boero & Consigno, 2007 ; Erath & Prediger, 2018 ; Morgan, 2013 ; Moschkovich, 2010 ; Planas et al. 2018 ; Radford & Barwell, 2016 ; Sfard, 2012 ; Steinbring, 2005) se sont intéressées, de façon théorique ou expérimentale, au lien entre les interactions langagières, le langage et les mathématiques. Des recherches ont été menées dans le contexte de la classe ordinaire et en contexte de l'adaptation scolaire auprès d'élèves manifestant des difficultés d'apprentissage avec ou sans trouble du langage. Dans ces études, le langage est étudié principalement sous sa forme verbale.

Dans le cadre de nos recherches (Barrera-Curin, 2013 ; Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2015 ; 2016 ; Barrera-Curin & Houle, 2018 ; Barrera-Curin, Bergeron & Perreault, 2019), le langage est une activité dialogique et située qui met en jeu la langue et ses codes écrits ou verbaux et qui se manifeste sous forme verbale, non-verbale ou para-verbale (Barrera-Curin, Bulf &Venant, 2016). Dans d'autres contextes, plusieurs recherches en éducation mathématique soutiennent le fait que le langage, sous différentes formes, est constitutif de l'activité mathématique des élèves (Davis & Nowat, 2010 ; Lakoff & Nuñez, 2000 ; Presmeg, 2002 ; Roth & Lawless, 2002). Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons aux différentes formes de langage (verbales et non-verbales) produites au cœur des interactions lorsqu'il est question de déclencher une activité mathématique avec des élèves présentant des troubles langagiers.

2.3. *Les formes de langage et la spécificité des pratiques enseignantes*

Dans une situation d'apprentissage donnée, le langage est situé (Gumperz, 1989), c'est-à-dire tributaire d'un contexte spécifique et d'échanges déterminés par les rapports entre les acteurs et leurs implications multiples dans cette situation (Bernié, 2002 ; Jaubert & Rebière, 2012). Pour étudier l'articulation entre langage et activité mathématique, dans un contexte scolaire où les difficultés langagières des élèves s'ajoutent aux contraintes déjà existantes influençant les pratiques enseignantes, il est nécessaire d'observer les pratiques de façon située.

Des études articulant des approches didactiques, psychologiques et ergonomiques (Robert & Rogalski, 2002 ; Hache, 1999 ; Robert, 2008 ; Rogalski, 2008 ; Roditi, 2011 ; 2013), proposent un modèle où les apprentissages potentiels des élèves seraient tributaires des tâches proposées, mais également de l'activité effective de l'enseignant.e en interaction avec ses élèves. Les pratiques enseignantes sont étudiées comme étant une gestion d'un environnement multiple, dynamique et ouvert puisque l'enseignant.e intervient sur les connaissances et sur ses élèves, alors que ces derniers évoluent, notamment en fonction de leur participation et des interactions dans la classe (Rogalski, 2003). Dans ce contexte, le regard ergonomique associé à une approche didactique (Robert & Rogalski, 2002 ; Robert, 2008 Roditi, 2011 ; 2013; Rogalski, 2008) permet d'analyser les contraintes de la situation (contraintes temporelles, connaissances antérieures des élèves, interprétation de la tâche, modalités de travail, etc.) influençant les activités de l'enseignant.e et de l'élève dans leurs interactions. C'est sur ces interactions, sur les moyens à disposition de l'enseignant.e lui permettant de les déclencher ainsi que sur leur potentiel en termes d'apprentissage mathématiques que nous portons une attention particulière dans le cadre de cette recherche.

2.4. *Un modèle d'analyse pour approcher les pratiques enseignantes*

La *figure 2* illustre la mise en commun des éléments de la double approche et de nos fondements épistémologiques. La double approche propose un modèle d'analyse qui permet d'observer le lien entre l'activité de l'enseignant.e et celle de l'élève. Quoique cette approche ne partage pas les mêmes fondements épistémologiques qui soutiennent notre définition d'activité mathématique, leur articulation à des fins d'analyse nous semble pertinente. D'une part, elle nous offre des outils pour décortiquer l'activité de l'enseignant.e exerçant son métier, ses interactions avec l'activité des élèves ainsi que l'influence des actions de chacun des acteurs sur celles des autres. D'autre part, elle postule qu'il existe une interaction entre l'élève et le contenu mathématique qui est indépendante des actions de l'enseignant.e. (Rogalski, 2003).

Dans notre schéma, l'ellipse extérieure représente les contraintes institutionnelles et sociales qui influencent, voire, contraignent l'enseignant.e à certaines logiques d'action. Les composantes institutionnelle et sociale caractérisent la prise en compte des programmes, des politiques, de la composition des classes (quantité et profil des élèves), des caractéristiques du contexte, des horaires de classe (Robert & Rogalski, 2002).

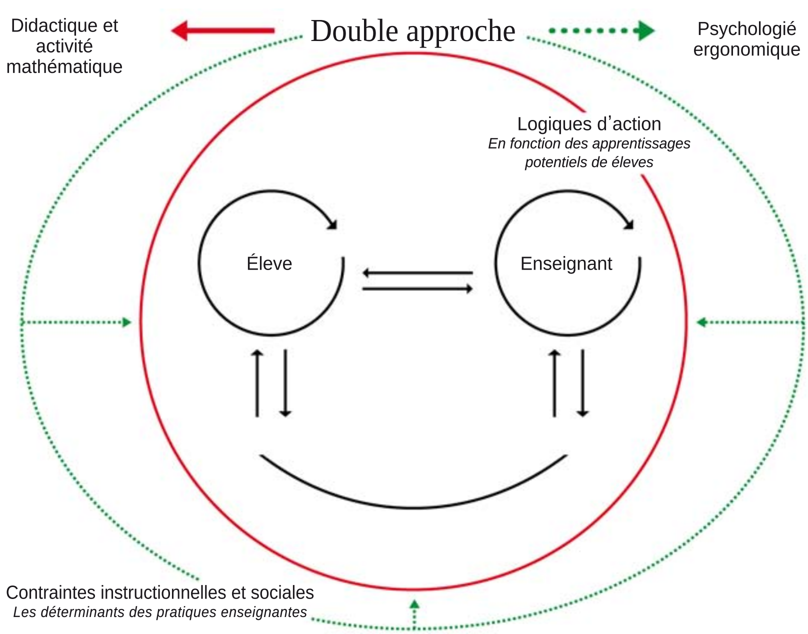


Figure 2. Modélisation de l'activité enseignante (Barrera-Curin, Bergeron & Perreault, 2018)

Ces composantes favorisent et contraignent les pratiques enseignantes en elles-mêmes et, de ce fait, participent au flux des coordinations des coordinations pouvant déclencher l'activité mathématique réalisée par les élèves. Les logiques d'action (cercle) résultent de la prise en considération par l'enseignant.e des contraintes sociales et institutionnelles (flèches) ainsi que de sa conception de sa profession, de ses élèves, de ses expériences professionnelles, de son rapport aux mathématiques (composante personnelle). Les composantes médiatives et cognitives (Robert & Rogalski, 2002) sont centrales dans l'organisation didactique des tâches mathématiques proposées par l'enseignant.e. Elles concernent les contenus mathématiques en jeu, le choix des tâches et leurs déroulements possibles, les aides proposées par l'enseignant.e, la gestion de classe, les formes de langage privilégiées par l'enseignant.e, les formes prévues par l'enseignant.e à travers lesquelles s'organiserait le travail des élèves.

Ainsi, les interactions de l'enseignant.e avec ses élèves ne sont pas linéaires, mais dynamiques. Au sein de ces interactions, chacun fait jouer des façons d'agir qui lui sont propres et qui reflètent des expériences passées, les représentations du rôle qu'il doit jouer dans la situation ainsi que sa manière de s'approprier les contenus de la tâche. En ce sens, la composante personnelle est au cœur d'un processus. Elle permet de faire émerger dans le présent (Varela, Thompson & Rosch 1993) l'histoire de chacun, leur expérience, y compris les mathématiques. L'interaction, au centre du modèle, correspond à un processus d'adaptation résultant des coordinations des coordinations de l'agir entre l'enseignant, l'élève et l'environnement (Maturana & Verden-Zöller, 2008).

Dans le cadre de ce projet, les outils théoriques et méthodologiques issus de la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002) nous permettent d'explorer les régularités et les variabilités des pratiques en situation, considérant les enseignant.e.s dans leur singularité ainsi que dans leur appartenance à une institution imposant à leur métier des caractéristiques particulières, des façons de faire, des ressources et des contraintes.

3. Méthodologie exploratoire pour l'analyse des pratiques enseignantes

Notre méthodologie exploratoire est inspirée des recherches s'appuyant sur le cadre de la Double Approche. Elle nous permet d'observer et d'analyser les activités des enseignant.es participant à notre projet de recherche. Dans le cadre de cet article, nous analysons les interactions d'une des enseignantes avec ses élèves, les activités qui en découlent, ainsi que les contextes social et institutionnel (et leurs contraintes) qui déterminent son métier (Robert, 2008). Deux objectifs guident notre méthodologie : 1) Approcher des éléments des composantes et des contraintes qui pèsent sur les pratiques d'une enseignante travaillant dans une classe où les élèves présentent des troubles de langage; 2) Repérer les moyens langagiers privilégiés au cœur de ses pratiques afin de déclencher l'activité mathématique de ses élèves.

3.1. *Méthode de collecte de données*

Dans le cadre général de notre projet, deux ou trois séances de classe de mathématiques sont filmées pour chaque enseignant.e dans le but d'analyser l'activité mathématique des élèves - les tâches effectives - (Leplat, 1980) résultant des coordinations des coordinations de l'agir dans la classe. Avant chacune de ses séances, un entretien est réalisé avec l'enseignant.e afin de connaître les tâches – intra mathématiques ou extra mathématiques – qu'elle souhaite proposer à ses élèves afin de déclencher une activité mathématique. Lors de ces rencontres il est aussi question de discuter de la façon dont l'enseignant.e souhaite organiser la classe afin de favoriser ses interactions avec ses élèves ainsi que des stratégies et conduites des élèves qu'elle anticipe relativement à la tâche proposée. Un autre entretien avec l'enseignant.e a lieu après la séance filmée et permet de mener une analyse *a posteriori* de premier niveau afin d'observer et d'analyser ce qui s'est passé dans la séance. Il s'agit notamment d'un processus de réflexion qui place l'enseignant.e face à sa propre activité et lui donne la possibilité d'expliciter sa pratique, les choix qui la guident et donc de mieux comprendre l'influence de certaines contraintes.

En tout, six enseignantes ont été rencontrées lors de deux ou trois séances de mathématiques. Nous présenterons ici les résultats d'une partie de l'analyse de la pratique d'une des enseignantes participant au projet (Élyse).

3.2. *Méthode d'analyse*

Afin, d'une part, d'approcher des éléments des composantes spécifiques de la pratique de cette enseignante et, d'autre part, d'analyser les moyens langagiers qu'elle préconise dans l'action, notre analyse se déroule en trois temps. D'abord, l'analyse du projet de l'enseignante cherche à rendre compte « des choix et organisation *a priori* des contenus, ainsi que des formes de travail prévues » (Chesnais, 2009, p. 93)[2]. Ensuite, l'analyse des observables nous permet de qualifier les types d'interactions observées dans la séance réalisée. Enfin, l'analyse des moments-clés de la séance à partir des observables identifiés et de notre modèle de l'activité enseignante nous permettent d'analyser les moyens langagiers privilégiés par l'enseignante.

3.2.1. *Analyse du projet de l'enseignante*

Cette analyse porte sur les choix de l'enseignante concernant la forme que prendra la séance à observer ainsi que sur les contenus mathématiques et sur la façon dont elle souhaite les faire émerger ou les réinvestir dans un contexte non mathématique tout au long de la séance. Au cœur de cette analyse, nous reprenons les propositions de l'enseignante pour rendre compte de ses réflexions concernant les activités

[2] Nous précisons que notre analyse n'est qu'une adaptation de l'analyse *a priori* proposée par la double approche, étant donné que le projet de l'enseignante diffère des scénarios traditionnels conçus pour l'enseignement des mathématiques.

possibles des élèves en lien avec les caractéristiques des tâches ainsi que les choix de l'enseignante concernant la forme que prend son enseignement. Cette analyse nous permet ainsi de confronter la leçon effective à la planification qui en était faite, mais également d'avoir accès aux différents choix de l'enseignante (concernant les tâches, l'organisation du travail, etc.) ainsi qu'aux raisons qui les motivent.

3.2.2. *Analyse des observables au sein de l'atelier de cuisine*

Nous réalisons un découpage par épisodes comprenant à la fois le scénario de la leçon anticipé par l'enseignante (Kermen & Barroso, 2013), ainsi que les épisodes qui émergent de façon imprévue ou qui sont des allants de soi de la pratique enseignante (distribution du matériel, rappel, etc.). Il s'agit d'actions qui ne sont pas mentionnées dans le cadre des entretiens préalables.

Ce second niveau d'analyse concerne ce qui, dans le cadre de la double approche (Robert & Vivier, 2013), est qualifié d'observables. Ainsi, les formes de travail et les types d'interactions entre l'enseignante et ses élèves sont identifiés comme des observables dans ce deuxième temps d'analyse.

3.2.3. *Les formes de travail*

Nous dégageons les différentes formes de travail qui prennent place au cours d'un épisode. Nous empruntons cette dénomination à Kermen et Barroso (2013). Nous avons d'ailleurs bonifié la classification des auteurs pour rendre compte de la variété des formes de travail repérées lors de nos observations : collectif dialogué, faux collectif dialogué (une organisation où l'enseignante ne s'adresse qu'à un élève à la fois tout en gardant l'ensemble du groupe captif), monstration, travail en dyade (ens-élève) et travail en dyade (élève-élève).

3.2.4. *Les types d'interactions se manifestant dans le langage à l'intérieur des différentes formes de travail*

Les formes de travail évoquées ci-dessus comportent diverses interactions langagières que nous regroupons en cinq catégories d'observables non mutuellement exclusives, inspirées de différentes recherches concernant les pratiques enseignantes (Brousseau, 1986 ; Pariès, Robert & Rogalski, 2009 ; Petitfour, 2015) :

Les aides apportées peuvent être procédurales, constructives ou compensatoires. Les aides procédurales sont ponctuelles et agissent directement sur la tâche prescrite (plan initial) dans le but de la diviser en d'autres tâches plus simples ou de mettre l'accent sur la bonne méthode de résolution (Pariès, Robert & Rogalski, 2009). Les aides constructives se produisent sous forme de questionnement alimentant la réflexion de l'élève dans un but de construction des connaissances (Pariès, Robert & Rogalski, 2009). Finalement, les aides compensatoires visent à compenser une difficulté ou un handicap de l'élève. Si les aides procédurales visent la segmentation de la tâche pour en faciliter la prise en charge par l'élève, les aides compensatoires sont, quant à elles, dirigées vers l'élève (son handicap). Elles visent à contourner les tâches extra-mathématiques qui pourraient ralentir la progression de l'activité de l'élève, vu sa condition (Petitfour, 2015). Dans le cas d'élèves présentant des difficultés langagières, les aides compensatoires peuvent prendre la forme de reformulations (des consignes, des questions, etc.) ou encore de modélisations, l'utilisation d'un logiciel et la prise en charge de certaines tâches par l'enseignante (prendre une mesure avec la règle, par exemple).

La tentative d'enrôlement dans la tâche globale constitue un moment au cours duquel l'enseignante tente de relancer l'activité des élèves. Cette tentative porte sur le projet dans sa globalité (interventions comportementales, par exemple).

La tentative d'enrôlement dans l'activité mathématique est directement centrée sur l'objectif et les contenus mathématiques en question (reformuler la consigne, poser une question en lien avec le contenu travaillé).

Le glissement métacognitif (Brousseau, 1986). La connaissance mathématique visée est évacuée et remplacée par des descriptions métalangagières (par exemple, expliquer l'usage, la nature du matériel de manipulation).

Finalement, *les interactions autour d'objets mathématiques* interviennent de façon transversale aux interactions langagières mentionnées ci-dessus. Sont ainsi repérés les moments au cours desquels l'enseignante mentionne (explicitement ou non) les objets mathématiques prévus (ou non anticipés).

Cette analyse détaillée des catégories concernant les formes de travail et les types d'interactions nous permet de repérer des « moments-clé » (cf. infra). C'est à partir de ces moments que nous étudions, dans un troisième niveau d'analyse, l'activité mathématique des élèves en lien avec les contraintes et les logiques d'action qui influencent la pratique de l'enseignante.

3.3. *Analyse des moments-clés*

Les moments-clés correspondent à des laps de temps au sein desquels l'objet mathématique est au cœur de l'interaction. Ainsi, nous identifions les moments-clés selon les séquences où, par exemple : une question est posée en lien avec une tâche mathématique ; l'enseignante ajoute des sous-tâches mathématiques visant l'enseignement ou le réinvestissement de certains objets mathématiques ; l'activité des élèves rend compte d'un travail mathématique *a minima* ou *a maxima* (Robert, 2008) selon leur appropriation des possibilités offertes par la tâche ; ou encore, un glissement de l'enjeu de la tâche se produit. Une fois identifiés, les moments-clés sont analysés à la lumière du modèle présenté dans la *figure 2.* Une partie des éléments des composantes de la pratique enseignante sont reconstitués au sein des analyses à partir des informations collectées grâce aux entretiens effectués après la séance, mettant en lumière différentes contraintes ou ressources. Ces analyses *a posteriori* permettent, d'une part, de décrire des logiques d'action qui permettent un nouveau regard sur l'activité de l'enseignante et, d'autre part, de repérer des enjeux mettant en relation les différents types d'interactions dans le langage.

4. Résultats : le cas d'Élyse

4.1. *La classe*

Élyse travaille dans une école à vocation particulière située à Montréal. Cette école accueille des élèves de 12 à 21 ans qui présentent, entre autres, une déficience intellectuelle (moyenne à sévère), un trouble du spectre de l'autisme ou une déficience auditive. La classe d'Élyse regroupe 5 élèves ayant une surdité partielle ou profonde. Le moyen de communication en classe est donc principalement le langage des signes (LSQ). Toutefois, elle accompagne sa communication signée par la parole, puisqu'un des élèves présente un *reste auditif.* Ils suivent le programme PACTE *Programmes d'études adaptés avec compétences transférables essentielles* (MELS, 1997) et DÉFIS *Démarche éducative favorisant l'intégration sociale* (MELS, 1996). Ainsi, les compétences visées se trouvent notamment au niveau de l'intégration sociale des élèves (vie domestique, croissance personnelle, éducation à la santé, etc.). Les contenus disciplinaires abordés par ces programmes sont élémentaires tout au plus (par exemple : compter jusqu'à 99, trouver une page dans un livre, etc.).

Élyse a suivi une formation en enseignement en adaptation scolaire et sociale (volet intervention au secondaire). Il s'agit d'une formation généraliste. Elle n'est donc pas spécialiste en mathématiques. Lors de sa participation à notre projet de recherche, elle supervise des stages internes et réalise des ateliers de cuisine et de jeux. À travers ces ateliers, dont elle a la liberté de choisir le contenu, elle souhaite investiguer ou approfondir les connaissances mathématiques de ses élèves. L'objectif de ces classes est principalement de préparer les élèves à devenir des citoyens adaptés et autonomes, dans une certaine mesure (pouvoir prendre le bus seul, par exemple). Les différents cours suivis par les élèves sont ainsi, pour la majeure partie, orientés vers l'atteinte d'objectifs « pratiques » ancrés dans le quotidien à travers lesquels des contenus disciplinaires sont intégrés.

4.2. *Analyse du projet de l'enseignante : reconstitution de la séance*

L'objectif de la séance annoncé aux élèves est la préparation de brioches pour le café du lendemain. Cette tâche non mathématique sera l'occasion pour l'enseignante d'investiguer et de réinvestir des connaissances mathématiques chez ses élèves. Elle souhaite déterminer si ses élèves maîtrisent la notion de fraction ½, et souhaite réinvestir des procédures élémentaires de dénombrement. Ses choix s'inspirent de la planification de l'évaluation des compétences proposée par les programmes DÉFIS (MELS, 1996) et PACTE (MELS, 1997) qui déterminent les contenus d'enseignement en adaptation scolaire (ce qui alimente les composantes institutionnelle et sociale de sa pratique enseignante).

Elle utilisera comme matériel une fiche présentant les outils et les ingrédients à utiliser pour la préparation des brioches avec le *pas-à-pas* (les instructions) de la préparation. Cette fiche sera présentée au TBI tout au long de la séance (Annexe). Pour l'enseignante, le support imagé (forme non-verbale du langage) est fondamental, car même si les élèves suivent une procédure presque identique pour chaque recette, ils ont, selon elle, besoin d'avoir un rappel permanent des consignes. Il s'agit, dans les termes de l'enseignante, «de toujours montrer». Par exemple, s'ils doivent découper une pâte à tarte en deux parties égales, il faut afficher une image de la pâte avec un trait rouge indiquant l'emplacement de la coupe à faire, «juste au milieu[3]».

Élyse prévoit présenter la tâche « préparation de brioches pour le café du lendemain » à ses élèves en trois temps:

Épisode 1 - Introduction : afficher au tableau l'image d'introduction à la tâche (annexe) et interroger les élèves sur ce qu'ils ont fait par le passé et ce qu'ils feront aujourd'hui afin de mobiliser des savoir-faire déjà établis (remplir une demie tasse graduée, couper en deux parties égales, etc.).

Épisode 2 - Présentation des ingrédients, des outils et du pas-à-pas de la préparation. Concernant le dénombrement, il s'agit d'observer les possibilités des élèves de mettre en relation le cardinal d'une collection déterminée d'objets et le nombre d'éléments qu'elle contient. L'enseignante, considérant que le niveau mathématique de ses élèves est très élémentaire, anticipe une mise en fonctionnement de connaissances anciennes élémentaires : un comptage (parlé) appuyé sur le non-verbal gestuel (comptage avec les doigts) ou imagé (fiches projetées au tableau) ainsi que des mises en correspondance terme à terme par manipulation du matériel mis à disposition (agir), cela avec ou sans erreur de coordination (Gelman et Gallistel, 1978 ; Gelman et Meck, 1983).

3 Puisque l'image affichée au tableau est une représentation en perspective, la notion de milieu est problématique. En plus, pour un objet 3D, il ne s'agit pas d'un « milieu » mais d'un « plan médian ».

Épisode 3 - Préparation des brioches : l'enseignante souhaite travailler la notion de *demie*[4] lorsque les élèves coupent la pâte (un demi d'un morceau de pâte), ou utilisent la tasse graduée[5]. Elle appréhende que ses élèves n'ont pas les moyens de comprendre la notion *abstraite* de fraction, même pas d'un demi. Selon elle, il s'agit à chaque fois d'une mise en fonctionnement de connaissances nouvelles dans des tâches simples et précises (Robert & Vivier 2013) : « Souvent je vais leur dire [de couper] au milieu et je vais leur montrer. Si j'insiste sur deux parties égales, je les ai perdus ». Elle anticipe que ses élèves vont se fier soit aux divers supports visuels faisant référence à un objet séparé en deux parties égales par un trait rouge (annexe, partie 1 étape 2), soit à ses propres gestes pour reproduire le découpage de la pâte en deux. Ces précisions données par l'enseignante nous permettent de penser il n'y aurait pas, *a priori*, un réinvestissement de la notion d'un demi tel qu'elle le souhaite, car son projet semble ne faire référence qu'à la notion appliquée ou courante de milieu. Plus précisément, en découpant la pâte il n'y aurait qu'une référence implicite au plan médian partageant un objet 3D en deux parties égales. Reste à voir si et comment la notion de demi en tant qu'opérateur de partage pourrait émerger en cours de route lors des interactions entre l'enseignante et ses élèves.

4.3. *Reconstitution du déroulement de l'épisode 3 de la séance 1 : description de l'épisode et analyse des observables de la pratique de l'enseignante*

De façon générale, la préparation de brioches se déroule selon le canevas anticipé malgré le fait que l'enseignante ajoute des sous-tâches mathématiques de façon spontanée. Il s'agit d'ajouts cohérents avec son intention (déclarée en entretien *a priori*) de maximiser la rencontre d'objets mathématiques par ses élèves. Les tâches identifiées concernent des objets mathématiques faisant référence au dénombrement (d'ustensiles, de morceaux de pâte) et à la comparaison de collections (des brioches ou des morceaux de pâtes). La comparaison visant à reconnaître l'équivalence d'une collection ou de deux quantités résultant de la partition d'une grandeur continue (la pâte à brioche), s'avère une tâche récurrente, qui remplace ce qui avait été souhaité *a priori* par l'enseignante, soit le réinvestissement de la notion d'un demi. Nous précisons que cette notion (partager en deux parties équipotentes) ne pouvait pas être travaillée par le biais de la tâche de découpage proposée (objectif évoqué dans le projet de l'enseignante), puisque la tâche ne portait que sur des procédures de découpage ou de comparaison.

4 L'enseignante parle de « une demie » pour faire référence à « un demi ».

5 Les tâches concernant l'utilisation de la tasse graduée ne font partie de cet article.

TABLEAU I

Tableau descriptif des formes de travail privilégiées lors de l'épisode dans la séance

Épisode 3 : Préparation des brioches
Prédominance d'un faux collectif dialogué avec un travail en dyade tour à tour (ens-élève). *Aides procédurales à visée compensatoire par rapport aux difficultés de l'élève.* Le matériel est maintenant disposé sur la table et l'enseignante projette au tableau le pas-à-pas (Annexe). Il s'agit de découper la pâte à brioche. Elle montre l'image affichée au tableau et dit : « on coupe en combien ? » Elle prend la pâte et demande à un élève à la fois : « on coupe où ? » Elle ajoute : « il faut que ce soit égal ».
Sous-tâche 1 : Découpage en deux parties égales : pareil ? Pas pareil ?
Faux collectif dialogué. *Comparaison de quantités.* L'enseignante donne la pâte à une élève avec le couteau et lui demande d'effectuer le découpage en deux parties égales. Elle reprend les morceaux découpés par l'élève et dit : « là c'est égal (elle pointe les morceaux) 1, 2 ». Élyse fait circuler la pâte afin qu'un par un, les élèves la découpent pendant que les autres restent passifs. Lorsque la pâte est coupée en deux, l'enseignante annonce qu'il faudra encore une fois la couper en 2 en ajoutant : « je vais te l'expliquer parce que c'est difficile ». Elle va alors modéliser le découpage des deux parties en deux (*aide compensatoire : Modification de la tâche initiale. Modélisation directe. Prise en charge de la tâche*). Ensuite elle montre les morceaux de brioches et demande : « est-ce pareil ? » Elle fait compter chacun leur tour le nombre de brioches découpées.
Sous-tâche 2 : Comptage de brioches en deux temps à des fins de comparaison des quantités entre les images affichées au TBI et les brioches préparées sur la table.
Faux collectif dialogué. *Comparaison de collections.* L'enseignante projette la prochaine étape au tableau et fait compter le nombre de brioches affichées (4). Elle fait aussi compter le nombre de morceaux de pâte sur la plaque (7) et demande à chacun de les comparer. Élyse reformule plusieurs fois sa consigne. Elle demande à une élève : « Où il y en a le plus ? » en signant le pouce vers le haut à un élève qui donne tout de suite la bonne réponse. Ensuite elle s'adresse à une autre élève : « ici c'est moins ou plus que là ? Il y en a combien ? (elle pointe chacune des collections) Là, plus ou moins que là ? Lequel est le plus grand (pause) 4 ou 7 ? » L'élève pointe les 4 brioches affichées au TBI (elles sont bien plus grandes que celles préparées et disposées sur la table). L'enseignante signe les nombres avec ses mains, et demande en pointant le nombre 4 écrit sur une feuille : « ça, plus petit ou plus grand ? ». L'élève montre le « 4 » et l'enseignante lui dit : « c'est le contraire ».
Travail en dyade tour à tour (ens-élève). Par la suite, l'enseignante prend la plaque et dispose les morceaux de pâte en deux rangées. Elle explique qu'ils devront refaire les étapes précédentes à l'aide d'un nouveau paquet de pâte à brioches. Elle pose encore une fois la question : « en combien on coupe », ce à quoi un élève dit : « en 4 ». Elle revient en haut du document des consignes et montre qu'il faut d'abord couper en 2.

Elle dit : « Combien ? » Un élève répond : « La moitié » (*aide procédurale à visée compensatoire: support visuel. Modélisation de la tâche initiale. Prise en charge de l'activité de l'élève*)..

L'enseignante insiste sur le découpage en deux. Elle reprend la plaque et dit : « et après ? » et un élève répond « en deux encore ». Les élèves font une coupe juste au milieu de chaque morceau de pâte et ne se réfèrent à aucun moment au pas-à-pas affiché au tableau.

Sous-tâche 3 : Comptage de brioches à des fins de comparaison de quantités en deux temps

Faux collectif dialogué et travail en dyade tour à tour (ens-élève).
Comparaison de collections avec support numérique.

L'enseignante prend une feuille et un crayon et écrit la suite des nombres (1 à 9). Elle compte le nombre de morceaux qui se trouvent alors sur la plaque (11), elle en enlève 2 (*aide procédurale à visée compensatoire : retrait de brioches pour obtenir un nombre inférieur à 10 et faciliter la comparaison*) puis remet l'image des 4 brioches au tableau. Elle demande à une élève de compter les brioches au tableau et aussi les « brioches » (morceaux de pâte) sur la plaque. L'élève lui dit 4 et 9. L'enseignante écrit les nombres sur la feuille, se tourne vers un élève et demande (*aide compensatoire : ajout d'un support visuel (représentation numérique du nombre de brioches) pour faciliter la comparaison et éviter que l'élève ait à recompter*) : « lequel il y en a moins [pause] le plus petit c'est lequel ? ». L'élève pointe la mauvaise réponse (le 9). Il s'agit de la même élève qui avait choisi le 4 comme étant le plus grand nombre signé par l'enseignante lors de la sous-tâche 2. Elle s'adresse à un autre élève et lui dit : « ici, il y en a 9 et là il y en a 4 » et elle demande : « lequel il y en a le moins ? Le plus grand c'est lequel, ici ou ici ? » L'élève pointe vers le tableau (4). Elle continue « là y en a combien ? » L'élève répond « 4 ». L'enseignante ajoute, « et ici il y en a 9 », lequel il y en a beaucoup ? » L'élève montre le « 9 » en pointant sur la feuille.

Sous-tâche 4 : Partition d'une quantité discrète en deux parties égales avec un nombre d'objets impair.

Faux collectif dialogué et travail en dyade (ens-élève).
Comparaison de collections et partage équitable impossible.

L'enseignante explique aux élèves qu'il y a un trop grand nombre de « brioches » sur la plaque (15). Elle demande à un élève de répartir également les brioches sur deux plaques : « es-tu capable ? Essaie les deux égales, les deux pareilles ». L'élève les répartit et elle compte en même temps qu'il les dépose sur la nouvelle plaque, l'élève compte également. Elle l'arrête lorsqu'il y en a 6 sur la nouvelle plaque et lui propose de les compter. Élyse voyant que la tâche demandée ne sera pas possible dit : « Ici y'en a combien ? 6, et sur l'autre il y en a 9, c'est-tu pareil ? ». L'élève répond « oui ». L'enseignante repose la question et l'élève répond « oui » encore. Elle réarrange les morceaux sur la plaque en distribuant de la même façon six morceaux dans chacun des plateaux, les trois de surplus d'une des plaques sont placées dans un coin afin de rendre visible la différence entre les deux plaques (*aide procédurale à visée compensatoire : mise en exergue visuelle des quantités*). L'enseignante recommence à compter avec l'élève et elle redemande si c'est pareil. L'élève répète ce qu'elle dit.

De son plan d'origine, quatre sous-tâches portant sur un objectif mathématique spécifique sont ajoutées.

L'analyse des observables de la séance nous renseigne sur les formes de travail prégnantes dans l'organisation de classe de l'enseignante. À ce sujet, il paraît pertinent de mentionner que la séance se déroule principalement selon une forme de faux collectif dialogué. Les interactions langagières semblent ainsi se limiter à un jeu où l'échange d'information se fait dans un contexte favorisant la prise de parole d'un des interlocuteurs, dans ce cas-ci, l'enseignante. Elle propose à un seul élève à la fois de participer à la tâche. Elle les questionne aussi un à un pour leur faire comparer ou compter la quantité de pâte à brioches coupées. Les étapes sont répétées avec chacun des élèves pendant que les autres restent passifs. Nous constatons que certains élèves (2) sont d'ailleurs plus sollicités alors qu'un des élèves l'est moins que les quatre autres.

Des glissements discursifs (cf. Section 4.3) se produisent tout au long de la séance, que ce soit lors de la reformulation de questions (nous y reviendrons par la suite), que ce soit sur la façon dont l'enseignante fait référence à certains objets mathématiques. Ainsi, le sens des mots employés par l'enseignante n'est pas stable tout au long de la séance.

Du côté des aides apportées par l'enseignante, elles sont compensatoires ou procédurales à visée compensatoire. L'enseignante organise ses interactions en fonction, d'une part, du diagnostic des élèves associé à un trouble du spectre de l'autisme ou à une déficience intellectuelle et, d'autre part, de la difficulté ou de l'incapacité de ses élèves à interagir verbalement. Ce sont ces anticipations qui, comme elle le mentionne lors de l'entretien préalable ainsi que dans *l'entretien a posteriori*, l'entrainent à toujours préparer un pas-à-pas et un support visuel des étapes de l'activité afin de s'assurer que les élèves puissent suivre.

4.3. *Moments-clés de la séance*

4.3.1. *L'activité de l'enseignante et l'activité mathématique des élèves*

Nous nous centrons particulièrement sur l'analyse de l'épisode 3. Nous observons que les interactions semblent principalement centrées sur des objets mathématiques et qu'il y a une cohabitation de deux formes de travail ainsi que la présence de diverses formes d'aide.

a. *Les formes de travail et leur poids sur l'activité des élèves*

L'organisation prédominante de la séance ne permet pas aux élèves de travailler de concert. En effet, ils se mettent à la tâche l'un après l'autre après une invitation explicite de l'enseignante. Ce type d'organisation du travail favorise la passivité des élèves non sollicités. Les opportunités d'interagir avec le milieu sont donc réduites et inégales selon les élèves. En termes de Bauersfeld (1995), elle apparaît, tout au long de la séance, comme étant une *experte informée* au sein d'un processus qui ne semble pas favoriser la communication consensuelle, et par conséquent, empêche l'activité mathématique des élèves.

b. *L'improvisation de tâches mathématiques*

Voulant maximiser le potentiel d'activité mathématique de sa séance, l'enseignante profite de chaque instant pour introduire des sous-tâches mathématiques. Toutefois, ce caractère improvisé engendre quelques obstacles et changements de sens puisque ces tâches n'ont pas été analysées *a priori*. En conséquence, elle ne sait pas quels outils didactiques lui permettraient de mieux gérer ce qu'elle tente de mettre en place. Par exemple, dans le cadre de la sous-tâche 4, l'enseignante propose à un élève de répartir également un nombre impair de brioches (15). S'apercevant que la tâche proposée est impossible, elle la modifie en cours de route en réorganisant l'ensemble de brioches ; elle place six brioches dans chacune des plaques et laisse trois brioches dans le coin d'une des plaques. Ces improvisations font en sorte que les sous-tâches ajoutées s'ajustent difficilement à l'objectif visé : la tâche initiale de former deux collections équipotentes est réduite à une tâche de comparaison de collections. Dans ce contexte, les consignes doivent souvent être reformulées par l'enseignante, qui en vient à modifier le sens de sa question dans le but d'obtenir la réponse souhaitée, provoquant ainsi, en cours de route, un conflit entre la tâche et le but à atteindre (voir sous-tâche, 4). L'activité de l'élève est donc prise en charge par l'enseignante qui en modélise le déroulement avant que celui-ci n'ait eu le temps d'agir.

c. *Les glissements dans le discours*

Bien que le principal moyen de communication soit le langage signé, des glissements discursifs interviennent fréquemment lors des interactions. Par exemple, lors de l'improvisation de la sous-tâche 2 - où la visée est de comparer des quantités -, la formulation des consignes complexifie les interactions. En reformulant sa consigne à six reprises, Élyse change trois fois la tâche proposée en l'espace de quelques secondes. Les changements de consignes modifient la réponse attendue, créant une difficulté pour la réalisation de la tâche par l'élève. Entre savoir dans quelle collection il y en a le plus, combien il y a d'éléments et demander si une collection est plus petite ou plus grande, elle modifie une tâche de comparaison de quantités discrètes vers une tâche de comparaison de la taille des éléments. Lorsqu'elle demande en dernier si « c'est plus petit ou plus grand », il est difficile d'affirmer que l'élève ne peut comparer deux collections. Sa réponse pourrait s'avérer correcte, car les brioches affichées au TBI sont effectivement bien plus grandes que les morceaux de pâte découpés sur la table. Les fréquentes modifications des tâches dans son discours brouillent l'enseignement (y compris le réinvestissement) des objets mathématiques qu'elle souhaite offrir à ses élèves.

d. *L'articulation de ressources*

Dans le cadre de la sous-tâche 3, outre la reformulation des consignes qui fait dévier le sens de la tâche, certains déplacements de sens se produisent entre les différents types de ressources qui sont mobilisées par l'enseignante. Cette sous-tâche est proposée par l'enseignante à la suite d'une réponse considérée erronée à la tâche précédente. Elle introduit ainsi une tâche de comparaison de quantités discrètes dans laquelle elle fait jouer trois types de représentations : visuelles (les brioches au TBI), concrètes (les morceaux de pâte sur la plaque) et numériques (la suite numérique).

Dès lors, l'enseignante fait coexister différentes représentations dans le but d'aider l'élève à se représenter les quantités : écriture de la suite numérique de 1 à 10; écriture des nombres (4 et 9) sur la droite; faire compter les brioches; demander à la fois «où il y en a moins» et «où est le plus petit». Ces différentes représentations, ajoutées aux consignes changeantes permettent une pluralité de réponses qui dépendent fortement de la façon dont l'élève interagit avec le milieu qui lui a été proposé : quelle tâche s'est-il/elle approprié ? «La bonne réponse» pourrait s'exprimer soit en considérant la grandeur des éléments (les représentations visuelles au TBI et le matériel concret sur la table) soit en termes de cardinalité (en s'appuyant sur ses connaissances sur la suite numérique). Ce conflit non anticipé dans l'introduction de la tâche amène l'élève à essayer de *deviner* le type de comparaison souhaitée par l'enseignante.

e. *Les aides*

La reformulation des consignes ainsi que les modélisations successives nous renseignent sur la volonté de l'enseignante de favoriser la réussite des élèves. En effet, appréhendant la difficulté des élèves à réaliser une tâche de comparaison, l'enseignante reformule ses questions avant même que l'élève ait répondu. Toutefois, ces dispositifs d'aides s'avèrent parfois superflus. Une illustration particulièrement marquante de cette affirmation est un élève (celui qui n'est presque jamais sollicité et qui est considéré comme un des plus faibles du groupe) qui, pendant qu'elle interagit avec un autre, prend la plaque et le couteau et commence à couper correctement la pâte, sans regarder au tableau. En fait, aucun élève ne semble se référer au tableau, l'enseignante est la seule qui en fait mention. Or, les actions des élèves, loin d'être hésitantes, sont assurées lorsqu'ils découpent la pâte «au milieu, en deux parties égales». Les élèves semblent avoir internalisé une procédure de découpage, mais le poids du diagnostic freine l'enseignante qui ne considère pas aller au-delà du découpage en deux.

In fine, Élyse anticipe que le langage parlé n'est pas suffisant pour s'assurer de la compréhension de ses élèves. Elle a donc prévu d'autres formes de médiation entre les élèves et la tâche à réaliser qui se traduisent principalement sous forme d'aides anticipées (des explications appuyées sur des ressources visuelles) ou improvisées (des reformulations, des questionnements). Cependant, leur contribution effective à l'activité mathématique des élèves reste incertaine.

4.3.2. *Des contraintes et des logiques d'action qui influencent l'activité mathématique*

Nous identifions des contraintes institutionnelles et sociales, des modes opératoires et une diversité d'interactions langagières au sein de la classe d'Élyse. En effet, des déterminants institutionnels et sociaux spécifiques à l'enseignement pour des élèves présentant des difficultés guident la pratique d'Élyse. Par exemple, l'impératif de « s'adapter à leurs besoins », l'individualisation de l'enseignement et le besoin d'une utilité concrète des notions abordées influencent les aides et les formes de travail préconisées par Élyse. Ces déterminants rendent compte, non pas de référents didactiques en lien avec les objets mathématiques en jeu, mais de représentations partagées (Giroux, 2013 ; Fontaine, 2008 ; Roiné, 2009 ; 2014) portant sur les caractéristiques diagnostiques des élèves.

L'intention d'adapter l'enseignement aux capacités anticipées des élèves (en lien avec leur diagnostic) fait en sorte que l'activité de chacun se réalise de manière indépendante, malgré le produit final à réaliser en équipe, soit la préparation de brioches pour le café du lendemain. En effet, lors de la séance observée, les élèves interagissent avec l'enseignante à tour de rôle, mais pas entre eux (faux collectif dialogué. cf. Section 4.3.a). D'une part, cette organisation cherche à assurer la participation et la réussite de chacun (individualisation de l'enseignement) et, d'autre part, il s'agit d'un moyen employé par l'enseignante pour mieux observer les connaissances mises en œuvre par les élèves dans chacune des tâches. Les élèves coordonnent leurs actions dans un espace où les interactions langagières sont fortement guidées par les choix de l'enseignante cherchant à donner le maximum d'informations et à restreindre autant que possible les difficultés pouvant se présenter à ses élèves.

Pour l'enseignante, le support langagier non-verbal est fondamental au cours de son enseignement. Elle fait, à de nombreuses reprises, référence au langage non-verbal imagé affiché au tableau[6] et au fait qu'elle répète plusieurs fois les consignes et les étapes à réaliser par le langage signé et par des gestes modélisant le langage parlé. Notamment, lors de l'entretien préalable à la séance observée,

6 Il est pertinent de mentionner l'imprécision visuelle et mathématique de certaines images affichées au tableau (Annexe). Néanmoins, étant donné que les élèves n'y ont pas référé au cours de la séance, nous n'avons pas analysé les effets de ces éléments sur les actions des élèves.

l'enseignante appréhende les répétitions dans sa pratique ainsi que les modalités de mise au travail de ses élèves :

> En fait, je vais faire ce que je fais tout le temps. Je vais le faire avec eux, mais ils vont avoir l'image sur le TNI (tableau noir interactif) de […] je mets une flèche d'où il faut le couper et à partir de ça, ils sont capables de le couper en deux, correctement.

Nous avons pu observer que les élèves ne se servent pas toujours des images affichées au tableau. Ce n'est le cas ni pour toutes les tâches mathématiques ni pour les tâches extra-mathématiques ou quotidiennes qui se réalisent au cours de la séance. Par exemple, un élève a pu sans aucune aide complémentaire sous forme de langage verbal (parlée) ou non verbal (visuelle) se lever pour aller laver ses mains, jeter un déchet à la poubelle ou allumer un ordinateur. Compte tenu de ce qui précède, il semble nécessaire d'interroger la pertinence de certains supports langagiers non verbaux vis-à-vis de leur contribution effective à l'activité mathématique des élèves présentant une déficience auditive (cf. Discussion). Quant aux logiques d'action de l'enseignante concernant l'activité mathématique des élèves, elle adapte son activité en adéquation à sa représentation des possibilités pour ses élèves (présentant une déficience intellectuelle ou un trouble de spectre de l'autisme) de s'approprier ou d'effectuer différentes tâches. La planification de la séance par l'enseignante confirme ce constat. Par exemple, elle nous explique dans l'entretien préalable à la séance filmée, que la mention du concept des *quarts* était hors de question étant donné la difficulté d'appropriation que cette notion pourrait entraîner chez ses élèves. D'ailleurs, elle aménage le milieu pour que les élèves ne se voient pas confrontés à des moments de déstabilisation. Ainsi, lorsqu'un élève propose un partage en quatre, l'enseignante retourne immédiatement à la procédure préétablie de «couper en deux, puis en deux» ou lorsqu'elle repère un moment pour introduire une sous-tâche de comparaison, elle modifie le milieu en enlevant des brioches du plateau afin que les élèves n'aient pas à comparer des quantités supérieures à 10 (cf. Sous-tâche 3).

5. Discussion

La double approche ainsi que nos fondements épistémologiques maturaniens, nous permettent d'approcher les pratiques enseignantes à plusieurs niveaux. Cela nous permet de mieux comprendre les actions de l'enseignante ainsi que d'analyser la manière dont ses logiques d'action (en référence à ses choix personnels) et les contraintes institutionnelles et sociales s'articulent entre elles.

L'identification de différents observables comme les formes de travail, les aides et les glissements dans le discours, permet de repérer chez l'enseignante, tout au long de la séance, des modes opératoires récurrents, de rapporter les actions aux analyses préalables de ses choix, mais également, de repérer les moments où les interactions concernant les objets mathématiques pourraient être particulièrement riches. Le dispositif méthodologique construit à la lumière de nos postulats théoriques permet l'étude de l'activité de l'enseignante en trois temps (*a priori*, *in situ* et *a posteriori*) et ainsi, rend compte de la complexité des interactions qui ont lieu au sein d'une classe.

À ce sujet, l'analyse de la pratique de cette enseignante nous permet d'entamer l'étude de l'influence des représentations des caractéristiques (diagnostiques) d'élèves sur ses façons d'agir lors de la mise en œuvre d'une séance consacrée au réinvestissement de notions mathématiques élémentaires. Certaines des adaptations faites afin de surmonter les obstacles langagiers constituent des dispositifs d'aides qui sont réfléchis en fonction du déficit de l'élève plutôt que selon le potentiel de la tâche à favoriser l'activité mathématique. En d'autres mots, ce sont les diagnostics des élèves qui orientent les actions de l'enseignante et non un milieu d'apprentissage conçu pour déclencher des actions mathématiques de la part des élèves vis-à-vis d'un objet de savoir en tenant compte de certaines limites langagières.

Du côté de l'analyse de l'activité mathématique des élèves, les analyses du discours et des interactions entourant les objets mathématiques, éclairées par l'analyse contextuelle, sociale et culturelle liée à leur condition d'élève identifié handicapé, nous permettent de constater que le manque de moyens didactiques pour concevoir et ensuite pour mieux gérer le déroulement des tâches, amène l'enseignante à principalement essayer de compenser les déficits des élèves pour ainsi tenter d'aboutir à une réussite immédiate. Les élèves ont ainsi adapté leur activité à un milieu qui leur demande principalement de suivre des consignes ou de répéter des actions.

À la lumière de nos résultats, nous constatons que les contraintes sociales et institutionnelles entourant la pratique observée en éducation spécialisée favorisent une entrée dans la tâche mathématique par le déficit de l'élève plutôt que par son potentiel d'apprentissage. Ceci semble avoir un impact à la fois sur les interactions en séance et sur le choix du contenu qui vise le développement de compétences dites *minimales* (souvent restreintes au domaine numérique tel que nous l'avons observé). La richesse potentielle des tâches proposées pour déclencher une activité mathématique se voit alors réduite, malgré la volonté de l'enseignante de la favoriser. Cela a été exprimé non seulement par Élyse mais aussi par l'ensemble des enseignantes avec qui nous travaillons. À ce propos, la classe d'Élyse n'est donc pas un cas isolé dans le contexte de l'éducation spécialisée au Québec (Barrera-Curin, R. I., 2016-2019).

Nous proposons donc ici un premier pas, fondamental, dans l'étude des pratiques enseignantes dans le contexte de l'éducation spécialisée au Québec, nous permettant de mieux en comprendre leur complexité et leur potentiel. Notre recherche fournit également aux enseignantes participant à ce projet, une meilleure perception de leurs propres pratiques, déclenchant spontanément lors des rencontres, des éléments de réflexion étayés par des questions sur leur pratique, les conduisant à repenser certaines façons de faire. Nous avons déjà pu observer des indices d'adaptations didactiques lors des deuxième et troisième séances observées.

En tant que chercheures et formatrices souhaitant mieux outiller les enseignant.e.s dans ce milieu éducatif, nos constats nous renvoient à l'important travail qu'il reste à faire. Nos analyses nous amènent à nous interroger sur l'environnement d'apprentissage mis à la disposition des élèves présentant un trouble du langage. Par conséquent, nous devons reconsidérer la formation des enseignant.e.s qui favorise actuellement l'enseignement individualisé en fonction du diagnostic (déficit identifié chez les élèves) et l'impact de ce modèle d'enseignement sur l'inclusion de ces élèves (Barrera-Curin, Bergeron & Perreault, sous-presse). À la lumière de nos fondements épistémologiques nous souhaitons (re) parler d'activité mathématique avec les enseignant.e.s, et travailler avec eux, dans l'élaboration et l'expérimentation de tâches intra ou extra mathématiques ayant du potentiel didactique, au cœur d'un environnement qui favorise les interactions langagières (verbales ou non verbales) avec des élèves présentant des troubles de langage avec ou sans déficience auditive. Il s'agit ainsi de réfléchir avec les enseignant.e.s, par exemple, à envisager l'enseignement des mathématiques dans le contexte de l'éducation spécialisée en termes de potentiel de la tâche et non en termes d'incapacités des élèves.

Concernant les outils didactiques que nous souhaitons partager avec les enseignant.e.s, nous nous intéressons notamment aux conditions particulières à considérer *a priori* à propos de la mise en relation entre différentes formes de langage de sorte que l'activité mathématique soit enrichie. Par exemple, quelle devrait être la nature des supports visuels ou imagés utilisés par l'enseignante pour qu'ils puissent être significativement associés au geste (par exemple, celui réalisé en langue de signes) ou au langage parlé ? Le fait que, lors de la séance analysée, les élèves ne se soient pas servis du support imagé proposé par l'enseignante ne nous permet pas d'émettre des hypothèses fondées sur nos observations à propos de la mise en relation des formes non-verbale, para-verbale ou verbal du langage. Néanmoins, explorer la mise en relation de métaphores (dans le verbal, le non verbal ou le para-verbal) intrinsèquement associées aux objets mathématiques (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016), s'avère une perspective intéressante à explorer dans la suite de notre projet.

Bibliographie

Barrera-Curin, R. I., Bergeron, L. & Perreault, A. (2019). *Strategies that promote the mathematical activity of students with language disorders: an analysis of language interactions***.** Proceedings of the 11e Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 11. Utrecht University : Utrecht. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf

Barrera-Curin, R. I. (2013). *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Paris : IREM de l'Université Paris Diderot – Paris 7. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00765658v2/document

Barrera-Curin, R. I. (2016-2019). Formes de langage en mathématiques et élèves présentant des troubles de communication (trouble du spectre de l'autisme-TSA, trouble du langage, déficience intellectuelle) : impact des pratiques enseignantes sur la réussite scolaire. Projet de recherche en cours financé par les *Fonds de Recherche du Québec - Société et Culture (FRQSC)*. Document inédit.

Barrera-Curin, R. I. Bulf, C. & Venant, F. (2016). Didactique, Sémantique et Métaphore : Analyses des langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 39 – 78. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_21/adsc21-2016_002.pdf

Barrera-Curin, R. I. Bulf, C. & Venant, F. (2015). Agir-parler-penser de la symétrie à l'école primaire, *Actes du Colloque du GDM 2015, Regards sur le travail de l'enseignant de mathématiques*, 42 – 56. http://profmath.uqam.ca/~fabiennevenant/Publications/GDM2015.pdf

Barrera-Curin, R. I. & Houle, V. (2018). Analyse didactique et mathématique de relations multiplicatives inhérentes à la fraction enrichie d'un regard sur les manières d'agir-parler-penser au cœur de l'activité mathématique, *Actes du Colloque du GDM 2017, Données, variabilités et tendances vers le futur,* 57 - 70. http://mariochiasson.com/wp-content/uploads/2018/04/2017-gdm-actes-vf.pdf

Barrera-Curin, R. I. & Chesnais, A. (2015). L'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève : la question de la participation de l'enseignant à l'apprentissage de l'élève en contexte d'orthopédagogie. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 779-790. http://numerisation.univ-irem.fr/ACF/ACF15153/ACF15153.pdf

Barrier, T. & Mathé, A. C. (2014). Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. Présentation. *Spirale-Revue de recherches en Éducation,* (54), 3-7. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1033

Barwell, R., Clarkson, P. & Villavicencio, M. (Eds.) (2016). *Mathematics education and language diversity.* The 21st ICMI Study. New York: Springer.

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in the mathematics classroom: Their Function and Their Effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: interactions in classroom cultures (pp. 271–291). Hillsdale, N.J.: Erlbaum Associates.

Bernié, J. P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue Française de Pédagogie 141*, 77 – 88. https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_2002_num_141_1_2917

Boero, P., & Consigno, V. (2007). Analyzing the constructive function of natural language in classroom discussions. *Proceedings 5th CERME,* 1150-1159.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Doctoral dissertation, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I).

Bulf, C., Mathé, A. C. & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation,* (54), 29 – 48. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1035

Bulf, C., Mithalal, J. & Mathé, A. C. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 35 (1), 7 – 36. https://revue-rdm.com/2015/langage-et-construction-de/

Chesnais, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*, Paris : IREM de Paris 7. https://core.ac.uk/download/pdf/47110677.pdf

Chesnais, A. (2018). Diversity of teachers' language in mathematics classrooms about line symmetry and potential impact on students' learning, In N. Planas & Schütte, M. (Eds.), *Proceedings of the Fourth ERME Topic Conference 'Classroom-based research on mathematics and language'*, 41-48. Dresden, Germany: Technical University of Dresden / ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01856475/document

Coulange, L. (2015). Les pratiques langagières au coeur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation, 54*, 9-27. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1034

Davis, B. & Nowat, E. (2010). Interpreting Embodied Mathematics Using Network Theory: Implications for Mathematics Education, *Complicity: An International Journal of Complexity and Education, 7, 1*, 1-31. https://journals.library.ualberta.ca/complicity/index.php/complicity/issue/view/566

Durand-Guerrier V., Chellougui F. (2015) Aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques - Compte rendu du Groupe de Travail n° 8. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – *Actes du colloque EMF2015* – GT8, 711-717. http://numerisation.univ-irem.fr/ACF/ACF15146/ACF15146.pdf

Erath, K. & Prediger, S. (2018). What characterizes quality of mathematics classroom interaction for supporting language learners? Disentangling a complex phenomenon, In N. Planas & Schütte, M. (Eds.), *Proceedings of the Fourth ERME Topic Conference 'Classroom-based research on mathematics and language'*, 49-56. Dresden, Germany: Technical University of Dresden / ERME. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/18-ETC_Erath-Prediger_Mesut_Discourse_Quality-Webversion.pdf

Fontaine, V. (2008). *Les représentations sociales des orthopédagogues du Québec en rapport avec l'intervention en mathématiques auprès d'élèves à risque.* (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke. https://savoirs.usherbrooke.ca/bitstream/handle/11143/618/MR42958.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, *13 (*3), 343-359.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. Dans G. Lemoyne (éd.) Langage et Mathématique, *Revue des sciences de l'éducation*, 30 (2), 303-328. https://core.ac.uk/download/pdf/59251777.pdf

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement / apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques, *Education et Didactique, 7*(1), 59-86. https://journals.openedition.org/educationdidactique/1573#xd_co_f=MzcyNjUyNmEtYTU1MS00YjFkLTg5YTAtNGVlNzlkMjQ2ZTg0~

Gobert, S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation, 54*, 65-84. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1037

Gumperz, J. (1989). *Engager la conversation : introduction à la sociolinguistique interactionnelle*, Paris : Les éditions de minuit. https://www.persee.fr/doc/polix_0295-2319_1990_num_3_10_2171

Hache, C. (1999). *L'enseignant de mathématiques au quotidien : Études de pratique en classe de seconde.* Thèse de doctorat. Université Paris – Diderot, Paris 7. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01253635/document

Hoyles, C. (2001). Steering between skills and creativity: a role for the computer. *For the learning of mathematics, 21*(1), 33-39.

Jaubert, M. & Rebière, M. (2012). Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative. Dans : *forum lecture. ch, Plate-forme internet sur la littéracie.* http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Kermen, I., & Barroso, M. T. (2013). Activité ordinaire d'une enseignante de chimie en classe de terminale. *RDST. Recherches en didactique des sciences et des technologies*, (8), 91-114. https://journals.openedition.org/rdst/785

Lakoff, G. & Nunez, F. (2000). *Where mathematics comes from?* NY: Basic Books.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge : University Press.

Leplat, J. (1980). *La psychologie ergonomique*. Paris : Presses universitaires de France.

Maheux, J. F. & Proulx, J. (2014). Vers le faire mathématique : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19*, 17–52.https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_19/adsc19-2014_002.pdf

Mathé, A.C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(2), 195-228. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00943555/document

Mathé, A.C & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. Spirale– *Revue de Recherches en Éducation*, (54), 29-48. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1035

Maturana, H. R., & Verden-Zöller, G. (2008). *The origin of humanness in the biology of love.* Charlottesville : Andrews UK Limited.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1998). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston : New Science Library/Shambhala Publications.

Ministère de l'Éducation, Loisir et Sport du Québec. (1996). Programme d'études adaptées avec compétences transférables essentielles. Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Ministère de l'Éducation, Loisir et Sport du Québec. (1997). Programme Démarche éducative favorisant l'intégration sociale. Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Ministère de l'Éducation, Loisir et Sport du Québec. (1999). Une école adaptée à tous les élèves. Politique de l'Adaptation Scolaire. Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/adaptation_serv_compl/politi00F_2.pdf

Morgan, M. (2013). Language and Mathematics: a field without boundaries. In *proceedings of the eight Congress of the Eurpean Society for Research in Mathematics Education, (CERME 2013)*, Antalya, Turkey, 50-67.

Moschkovich, J. N. (Ed.). (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. IAP. Charlotte, NC : Information Age Publishing.

Odier-Guedj, D. (2010). Actes éducatifs et de soins, entre éthique et gouvernance, mis en ligne le 01 octobre 2010 URL : http://revel.unice.fr/symposia/actedusoin/index.html?id=658

Odier-Guedj, D. & Gombert, A. (2014). « Interactions en classe avec des élèves présentant un trouble du spectre de l'autisme, une déficience intellectuelle ou un trouble du langage oral. Des activités signifiantes à la littérature jeunesse », in Beaupré P. Déficiences intellectuelles et autisme. Pratiques d'inclusion scolaire. Presses de l'Université du Québec : 121-165.

Pariès, M., Robert, A., & Rogalski, J. (2009). Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses éleves sur le chemin des connaissances: un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques [How does the mathematics teacher guide his students towards knowledge inside the classroom: a methodological point of view in mathematics didactics]. *Travail et apprentissages*, *3*, 95-123.

Petitfour, E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage: étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème (Doctoral dissertation, Université Paris Diderot-Paris 7). https://core.ac.uk/download/pdf/52876072.pdf

Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*, 196-210. London, UK: Routledge

Proulx, J. (2015). Mathematics education research as study. *For the learning of mathematics, 35*(3), 25-27. https://flm-journal.org/Articles/C6917444EF5797DABC75A8C6E73B.pdf#page=3

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics bridging of everyday and school mathematical practices, In G. Ledger, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer, 293-312.

Radford, L. (2010). The anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics, 10*, 103-120. https://pdfs.semanticscholar.org/a632/00373af335ef0bccf697bb19ed646eb01355.pdf

Radford, L., & Barwell, R. (2016). *Language in mathematics education research.* Second Handbook of PME, 275-313. Rotterdam: Sense.

René de Cotret, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude de relations didactiques, Dans Lemoyne et Conne (Eds). *Le cognitif en didactique des mathématiques,* 103-120, Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2* (4), 505 – 528.

Robert, A. (2008). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. Dans F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, 137 – 152, Toulouse : Octarès.

Robert, A., & Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques: des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs–quelle transposition? Éducation et didactique, 7(7-2), 115-144. https://journals.openedition.org/educationdidactique/1749

Roditi, E. (2011). Implicites dans l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. Dans Cora Cohen-Azria & Nathalie Sayac. *Questionner l'implicite*, 147 – 156, Presses universitaires du Septentrion, Éducation et Didactiques. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00609699/PDF/2009_Implicites-analyse-des-pratiques-enseignantes-en-DDM_Roditi.pdf

Roditi, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques, 15*, 39 – 60. https://www.cairn.info/revue-recherches-en-didactiques-2013-1-page-39.htm

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en didactique des mathématiques, 23* (3), 343 – 388.

Rogalski, J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. Dans F. Vandebrouck (éd.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, 23 – 30, Toulouse : Octarès.

Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : Une contribution à la question des inégalités* (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux 2. http://www.theses.fr/13960992X

Roiné, C. (2014). Les paradoxes de l'aide aux « élèves en difficulté » dans l'enseignement des mathématiques. Dans C. Mary et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (p.45-62). Presses de l'Université du Québec.

Roth, W. M., & Lawless, D. (2002). Science, culture, and the emergence of language. *Science Éducation*, *86 (*3), 368-385. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/sce.10008

Sfard, A. (2012). Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, (51- 52), 1-9.

Steinbring, H. (2005): T*he Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

Varela, F., Thompson, E., Rosch, E. (1993). *L'inscription corporelle de l'esprit,* Paris : Édition Seuil.

Autores

Raquel Isabel Barrera-Curin. Université du Québec à Montréal, Canada. barrera.raquel@uqam.ca

Laurie Bergeron. Université du Québec à Montréal, Canada. bergeron.laurie.2@uqam.ca

Audrey Perreault. Université du Québec à Montréal, Canada. aud.perreault@gmail.com

Annexe

BRIOCHES

INGRÉDIENTS

PÂTE PILLSBURY

SUCRE À GLACER

EAU

CANNELLE

OUTILS

FOUR

FOUET

COUTEAU

TASSE À MESURER

PLANCHE

PAPIER CIRÉ

BOL

CUILLÈRE

PLAQUE DE CUISSON

PARTIE 1

1- JE LAVE MES MAINS

2- JE COUPE LA PÂTE À BRIOCHES EN DEUX

3- JE COUPE ENCORE EN DEUX

4- J'AI 4 BRIOCHES

5- JE METS LES BRIOCHES SUR LA PLAQUE À BISCUITS

6- JE RECOMMENCE LES ÉTAPES 2-3-4-5 AVEC LES AUTRES BRIOCHES

7- J'ALLUME LE FOUR À 350 DEGRÉS

8- JE METS LES BRIOCHES AU FOUR, 15 MINUTES

PARTIE 2

1- JE PRÉPARE LE GLAÇAGE

2- DANS UN BOL, JE VERSE ½ TASSE DE SUCRE À GLACER

3- J'AJOUTE 2 CUILLÈRES D'EAU CHAUDE

4- J'AJOUTE UN PEU DE CANNELLE

5- JE MÉLANGE AVEC LE FOUET

6- JE VERSE LE GLAÇAGE SUR LES BRIOCHES

7- BON APPÉTIT !

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma “ciega” por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo versales en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 23 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 23, Número 1

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Marzo de 2020
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes