EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 27-2

9 771665 243002 02702

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 27, Núm. 2, julio 2024

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 27, Núm. 2, 2024

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Editorial: GISELA MONTIEL-ESPINOSA

Equipo Editorial:
DIANA WENDOLYNE RÍOS JARQUÍN
MELVIN CRUZ AMAYA
CRISTIAN PAREDES CANCINO
SELVIN NODIER GALO ALVARENGA

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Comité Científico

Luis Carlos Arboleda, *Universidad del Valle*, COLOMBIA • Abraham Arcavi, *Weizmann Institute*, ISRAEL • Michèle Artigue, *Université Cité Paris*, FRANCE • Fernando Cajas, *Universidad de San Carlos*, GUATEMALA • Terezinha Carraher, *University of Oxford*, UNITED KINGDOM • Francisco Cordero, *Cinvestav*, MÉXICO • Bruno D´Amore, *Università di Bologna*, ITALIE • João Pedro da Ponte, *Universidade de Lisboa*, PORTUGAL • Rosa María Farfán, *Cinvestav*, MÉXICO • Enrique Galindo, *Indiana University*, USA • Delia Lerner, *Universidad Nacional de Buenos Aires*, ARGENTINA • Luis Montejano, *Universidad Nacional Autónoma de México*, MÉXICO • Luis Radford, *Université Laurientenne*, CANADA • Luis Rico, *Universidad de Granada*, ESPAÑA.

Comité de Redacción

Juan Antonio Alanís, *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey*, MÉXICO • David Block, *Cinvestav*, MÉXICO • Marcelo Borba, *Universidade Estadual Paulista en Rio Claro*, BRASIL • Gabriela Buendía, *Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa*, MÉXICO • Alberto Camacho, *Instituto Tecnológico de Chihuahua II*, MEXICO • Ida Ah Chee, *Faculty of Education The University of Hong Kong*, CHINA • Cecilia Crespo, *Instituto del Profesorado J. V. González*, ARGENTINA • Evangelina Díaz, *Universidad Nacional de Heredia*, COSTA RICA • Leonora Díaz, *Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación*, CHILE • Crisólogo Dolores, *Universidad Autónoma de Guerrero*, MÉXICO • Javier Lezama, *Universidad Autónoma de Guerrero*, MÉXICO • Maria Laura Magalhães, *Universidade Federal de Minas Gerais*, BRASIL • Gustavo Martínez, *Universidad Autónoma de Guerrero*, MÉXICO • Cristina Ochoviet, *Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores*, URUGUAY • Martín Socas, *Universidad de La Laguna*, ESPAÑA • Paola Valero, *Aalborg University*, DENMARK.

Coordinación técnica: Janet Ramírez Sandoval

Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2024 Impresa en México

Volumen 27 – Número 2 – 2024

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

DIRECTORA EDITORIAL:
G. MONTIEL-ESPINOSA, *CDMX*, *México*

EQUIPO EDITORIAL:
D. W. RÍOS JARQUÍN, *CDMX*, *México*
M. CRUZ AMAYA, *CDMX*, *México*
C. PAREDES CANCINO, *CDMX*, *México*
S. N. GALO ALVARENGA, *CDMX*, *México*

COMITÉ CIENTÍFICO

L. C. ARBOLEDA, *Bogotá, Colombia*
A. ARCAVI, *Rehovot, Israel*
M. ARTIGUE, *París, Francia*
F. CAJAS, *San Carlos, Guatemala*
T. CARRAHER, *Oxford, Inglaterra*
F. CORDERO, *CDMX, México*
B. D´AMORE, *Bologna, Italia*
J. P. DA PONTE, *Lisboa, Portugal*
R. M. FARFÁN, *CDMX, México*
E. GALINDO, *Indiana, EUA*
D. LERNER, *Buenos Aires, Argentina*
L. MONTEJANO, *Querétaro, México*
L. RADFORD, *Sudbury, Canadá*
L. RICO, *Granada, España*

COMITÉ DE REDACCIÓN:

J. A. ALANÍS, *Monterrey, México*
D. BLOCK, *CDMX, México*
M. BORBA, *Río Claro, Brasil*
G. BUENDÍA, *CDMX, México*
A. CAMACHO, *Chihuahua, México*
I. A. CHEE, *Hong Kong, China*
C. CRESPO, *Buenos Aires, Argentina*
E. DÍAZ, *Heredia, Costa Rica*
L. DIAZ, *Santiago de Chile, Chile*
C. DOLORES, *Chilpancingo, México*
J. LEZAMA, *CDMX, México*
M. L. MAGALHÃES, *Belo Horizonte, Brasil*
G. MARTÍNEZ, *CDMX, México*
C. OCHOVIET, *Montevideo, Uruguay*
M. SOCAS, *La Laguna, España*
P. VALERO, *Aalborg, Denmark*

2024

Volumen 27 Número 2 Julio de 2024

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Todos los artículos de la Relime están bajo la Licencia Creative Commons Reconocimiento - No Comercial (CC BY-NC 4.0) https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

EDITORIAL

TRANSPARENCIA Y RESPONSABILIDAD EN EL USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA INVESTIGACIÓN. ACTUALIZACIÓN CONTINUA DE LA POLÍTICA EDITORIAL DE LA RELIME

Transparency and accountability in the use of artificial intelligence in research. Continuous Updating of the Relime Editorial Policy

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

La investigación científica, en cualquier área y disciplina, siempre se ha auxiliado de las herramientas tecnológicas disponibles, sea en su desarrollo o en su comunicación sin un requerimiento explícito de su uso. Pareciera entonces que el uso de Inteligencia Artificial (IA) y en particular de la Inteligencia Artificial Generativa (IAGen) no requeriría discusión, sino sólo de proveer guías y lineamientos en torno a cuándo y cómo utilizarla.

Sin embargo, con la sofisticación que está alcanzando la IAGen, es necesario debatir y reflexionar continuamente para entender la naturaleza de la *colaboración* que se está gestando entre seres humanos e IAGen; en nuestro caso, con el objetivo de lograr que ésta permita mejorar y ampliar las capacidades de la investigación, por ejemplo, permitiendo abordar problemáticas que antes estaban fuera de alcance.

Tang et al. (2024) señalan que, de lograr que la relación entre las personas y la IAGen sea realmente una *colaboración*, las y los investigadores pueden pasar de ser las y los creadores principales de contenidos a convertirse en curadores y

CC BY NC
Montiel-Espinosa, G. (2024). Transparencia y responsabilidad en el uso de inteligencia artificial en la investigación. Actualización continua de la política editorial de la Relime. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 145-150. https://doi.org/10.12802/relime.24.2720

editores de los *borradores* que proporciona la IAGen. La palabra clave aquí es: *borradores*, pues el uso de estas herramientas, como de cualquier otra, no exime a quien realiza la investigación de responsabilizarse de todo el proceso y sus productos, así como de la ética respecto a ellos. Como bien señalan estos autores, el tono asertivo y convincente de la respuesta que proporciona la IAGen puede llevar a un exceso de confianza por parte de quien la usa. Sin embargo, estas herramientas "no están diseñadas para evaluar la exactitud o autenticidad de los contenidos, y son propensas a producir contenidos falsos cuando se entrenan con grandes cantidades de datos no supervisados" (Cheng et al., 2025; p. 3). Por ello, es necesario revisar y editar críticamente las respuestas que nos proporcionan; éste es el rol que, como expertas o expertos en el campo, deben mantener quienes llevan a cabo la investigación e integran el uso de IAGen. Así, las y los investigadores siguen siendo responsables de todas las decisiones en el desarrollo de una investigación y su comunicación.

Como bien señalaron Kaebnick et al. (2023), la IAGen estará en constante cambio y la comunidad académica comenzó recién a familiarizarse y trabajar con ella, por lo que no es prudente establecer normas rígidas y rápidas sobre cómo debe usarse y reportar su uso. En la Relime, hace unos años comenzamos el proyecto de actualizar la política editorial en general para adaptarnos al constante cambio que supone la comunicación científica en el contexto digital. Por ejemplo, en la editorial del número 25(3) (Montiel-Espinosa, 2022), hablamos detalladamente de la autoría con una amplia reflexión en torno a la responsabilidad que ésta conlleva; y si bien desde entonces establecimos una política de autoría en relación con la IA, la experiencia editorial en estos años nos lleva a hacer una discusión más profunda que sirva de base para una *actualización continua* de la política editorial; que se alimentará de la respuesta de la comunidad y de lo que la propia investigación vaya mostrando sobre el uso de estas herramientas.

En lo que concierne a su uso en la comunicación de la investigación, la IAGen no puede cumplir por sí misma *todos* los criterios que se han adoptado para que alguien (o algo, en este caso) sea autor(a) de un artículo, que en el caso de la Relime son, al menos:

1) haber realizado contribuciones sustantivas en la concepción o diseño, adquisición de datos, o análisis e interpretación de datos;
2) haber participado en el borrador del artículo o en la revisión crítica con aportaciones intelectuales importantes;
3) haber dado la aprobación final de la versión a publicarse.

Considerando que la IAGen no puede asumir responsabilidad por lo que se ha escrito en un manuscrito, ésta no puede tener un rol de autoría, de ahí la política editorial inicial de la Relime al respecto:

> “Las y los autores que utilicen herramientas de Inteligencia Artificial en la redacción de un manuscrito deben transparentar la forma en cómo se utilizó y qué herramienta se utilizó. Las y los autores son plenamente responsables del contenido de su manuscrito, incluyendo las partes producidas por estas herramientas, por lo que también son responsables de cualquier infracción ética de su contenido.
>
> De ninguna manera estas herramientas pueden aparecer como coautores del manuscrito.” (Relime, s.f.)

Sin embargo, si fue utilizada en alguna etapa de su redacción es necesario que se explicite en cuál (indicando la versión) y cómo se usó. Para ello, hemos añadido a la Plantilla para envío de manuscritos una sección *opcional* de “Declaración de uso de Inteligencia Artificial”, con algunos ejemplos.

Es fundamental reconocer que la IAGen se alimenta de una gran cantidad de información disponible en bases de datos y otros sitios en la web, y son las y los investigadores, como expertas y expertos en el campo, quienes deben reconocer y evitar los sesgos (relacionados con raza, género y estatus económico, social o cultural), verificar que se otorga crédito a las fuentes originales e identificar y corregir los errores –por ejemplo, las llamadas *alucinaciones*– que en la redacción científica suelen contener la alteración de referencias bibliográficas o la elaboración de algunas inexistentes. Considere que el *software* con el que en las revistas revisamos los manuscritos para detectar coincidencias, además de reportar coincidencias exactas, identifica similitud en ideas y resultados, lo que puede derivar en señalar alguna de las faltas éticas más graves en la comunicación científica: el plagio (o autoplagio) y la publicación redundante.

En lo que respecta al uso de IAGen en el desarrollo mismo de la investigación, éste debe explicitarse en cada etapa en la que fue utilizada, explicitando el para qué (como el porqué) –que debe incluir una justificación con la que se reconozca su aportación en la *mejora* y *ampliación* de las capacidades de la investigación– y el cómo, que significa contar con la secuencia completa de comandos (*prompts*) utilizados para la tarea específica de la etapa en cuestión.

 CC BY-NC

En este aspecto, principalmente en la justificación de su uso, se recomienda ampliamente revisar y mantenerse actualizado en torno a las discusiones, reflexiones y recomendaciones en la investigación educativa y, preferentemente, en la investigación en *matemática educativa*, porque de ello dependerán, en gran medida, las decisiones editoriales sobre la aceptación de los reportes de la investigación realizada con estas herramientas. Por ejemplo, Cheng y colaboradores (2025), en el campo de la salud, proponen tres niveles de uso ético de la IAGen para la escritura científica –éticamente aceptable, éticamente contingente y *éticamente sospechoso*–, y en el último nivel incluyen usos de la herramienta que se relacionan más (o también) con el desarrollo de la investigación y no solo con escribir sus resultados y aportaciones; por ejemplo, el desarrollo de nuevos conceptos, la interpretación de datos, la revisión de literatura y el determinar el cumplimiento ético (que puede ser de la investigación o del manuscrito que la comunica).

En cambio, en el campo de la educación, Jiang et al. (2025) reportan fiabilidad en el uso de herramientas de IA para el análisis de datos cualitativos –en particular, el análisis temático de las transcripciones de entrevistas en una investigación enfocada en la equidad utilizando GPT-3–. Sin embargo, uno de los componentes más relevantes de este aporte –la fiabilidad de su uso– recae en entender las decisiones –tecnológicas, y de elección de estrategias y técnicas para elaborar un *prompt*– que se tomaron para lograr obtener de GPT-3 una codificación comparable con la codificación hecha por las y los investigadores. Transparentar el proceso ayuda a entender cómo se llega al resultado, y la importancia de que quien use la IA, para llevar a cabo una tarea específica en la investigación, domine dicha tarea para identificar tanto la fiabilidad de usar estas herramientas como sus limitaciones.

En complemento a la transparencia, por cuestiones de ética, confidencialidad y privacidad, el uso de la IAGen, por ejemplo, para el análisis de datos, demanda que en los protocolos de autorización firmados por las y los participantes de la investigación (o, en su caso, padres, madres o tutores, cuando la población participante se conforma por menores de edad) se haya informado de esta decisión metodológica, pues mucha información personal involucrada (por ejemplo, voces, rostros y nombres en los datos en audio y video) en la investigación podría estar alimentando a dicha IAGen (principalmente en sus versiones gratuitas), si no es posible configurarla para lo contrario.

Por lo anterior, y porque actualmente la Relime no puede proporcionar a sus equipos, editorial y de revisores, una herramienta de IA que pueda configurarse para no alimentarse de la información contenida en los manuscritos que recibe, su uso en los procesos editoriales y de revisión *no está permitido.* Sin embargo, como esta condición puede cambiar, la actualización de las políticas editoriales será un proceso tan dinámico como el desarrollo y el acceso que se tenga a este tipo de herramientas. Por ello y por la relevancia que tiene en el quehacer de todas y todos, les pedimos la consulta y revisión *detallada* y *constante* de estas políticas antes de realizar un envío; nuestro objetivo es mantener la integridad de la investigación que se comunica en la Relime, asegurando un uso ético, responsable y transparente de la IAGen.

Referencias

Cheng, A., Calhoun, A., & Reedy, G. (2025). Artificial intelligence-assisted academic writing: recommendations for ethical use. *Advances in Simulation*, *10*(1). https://doi.org/10.1186/s41077-025-00350-6

Jiang, Y., Ko-Wong, L., & Valdovinos Gutierrez, I. (2025). The Feasibility and Comparability of Using Artificial Intelligence for Qualitative Data Analysis in Equity-Focused Research. *Educational Researcher*, *54*(3), 153-163. https://doi.org/10.3102/0013189X251314821

Montiel-Espinosa, G. (2022). Roles de participación y comunicación en la investigación en Matemática Educativa. ¿Cuáles serán los acuerdos de la comunidad Latinoamericana? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(3), 253–262. https://doi.org/10.12802/relime.22.2530

Kaebnick, G. E., Magnus, D. C., Kao, A., Hosseini, M., Resnik, D., Dubljević, V., Rentmeester, C., Gordijn, B., & Cherry, M. J. (2023). Editors’ Statement on the Responsible Use of Generative AI Technologies in Scholarly Journal Publishing. *Ethics & Human Research*, *45*(5), 39–43. https://doi.org/10.1002/eahr.500182

Relime (s.f.). *Política antiplagio.* Recuperado el 1 de julio, 2025, de https://relime.org/index.php/relime/politica-antiplagio

Tang, K.-S., Cooper, G., & Nielsen, W. (2024). Philosophical, Legal, Ethical, and Practical Considerations in the Emerging Use of Generative AI in Academic Journals: Guidelines for Research in Science Education (RISE). *Research in Science Education*, *54*(5), 797–807. https://doi.org/10.1007/s11165-024-10192-3

 BY-NC

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

María del Rocío Hernández Hernández, Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez

EL ABORDAJE DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN LOS LIBROS DE TEXTO Y EN LAS AULAS DE PRIMER GRADO DE PRIMARIA

The approach to the decimal number system in textbooks and in first grade primary school classrooms

RESUMEN

Se llevó a cabo una investigación didáctica con enfoque etnográfico, para analizar cómo se aborda el contenido del sistema de numeración decimal, por dos profesoras de primer grado de primaria. Ellas emplearon lecciones sobre este tema del Libro de Texto Gratuito Matemáticas Primer Grado (LTG-M1°). El estudio se fundamentó en la noción de Transposición didáctica y algunos constructos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Las gestiones de las profesoras se conceptualizaron como transposiciones didácticas respecto al libro de texto; y dieron cuenta de algunas dificultades que se debían, principalmente, a las pretensiones de resolución de los niños que estaban planteadas en las actividades de los libros. Es por ello por lo que se decidió analizar las sugerencias didácticas del LTG-M1°. Se concluye la importancia de mantener planteamientos congruentes en la elaboración de las propuestas curriculares. También se encontró que las reglas del sistema de numeración decimal siguen representando un reto para la elaboración de actividades y para el aprendizaje por parte de los niños de primer grado de primaria.

PALABRAS CLAVE:

- *Transposición didáctica*
- *Educación primaria*
- *Sistema de numeración decimal*
- *Profesoras*
- *Libro de texto*

ABSTRACT

A didactic research study with an ethnographic approach was conducted to analyze how the content of the decimal numeration system is addressed by two first-grade primary school teachers. They used lessons on this topic from the Free Textbook Mathematics First Grade (LTG-M1°). The study was based on the notion of Didactic Transposition and some constructs from the Didactic Situations Theory. The teachers' management was conceptualized as didactic transpositions concerning the textbook and revealed some difficulties mainly related to the problem-solving expectations for children as presented

KEY WORDS:

- *Didactic transposition*
- *Primary education*
- *Decimal numeration system*
- *Teachers*
- *Textbook*

cc BY NC

Hernández Hernández, M. del R. y Fuenlabrada Velázquez, I. R. (2024). El abordaje del sistema de numeración decimal en los libros de texto y en las aulas de primer grado de primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 151-174. https://doi.org/10.12802/relime.24.2721. Recepción: Junio 19, 2024 / Aceptación: Marzo 12, 2025.

in the textbook activities. For this reason, an analysis of the didactic suggestions in the LTG-M1° was carried out. The study concludes that maintaining coherent approaches in the development of curricular proposals is essential. It was also found that the rules of the decimal numeration system continue to pose a challenge for designing activities and for first-grade children's learning.

RESUMO

Foi realizada uma pesquisa didática com abordagem etnográfica para analisar como o conteúdo do sistema de numeração decimal é tratado por duas professoras do primeiro ano do ensino fundamental. Elas utilizaram lições sobre esse tema do Livro Didático Gratuito Matemática Primeiro Ano (LTG-M1°). O estudo foi fundamentado na noção de Transposição Didática e em alguns conceitos da Teoria das Situações Didáticas. As ações das professoras foram conceituadas como transposições didáticas em relação ao livro didático e revelaram algumas dificuldades, principalmente relacionadas às expectativas de resolução de problemas propostas nas atividades do livro. Por isso, decidiu-se analisar as sugestões didáticas do LTG-M1°. Conclui-se que é fundamental manter coerência na elaboração das propostas curriculares. Também se verificou que as regras do sistema de numeração decimal continuam representando um desafio tanto para a elaboração de atividades quanto para a aprendizagem das crianças do primeiro ano do ensino fundamental.

PALAVRAS CHAVE:

- *Transposição didática*
- *Ensino fundamental*
- *Sistema de numeração decimal*
- *Professoras*
- *Livro didático*

RÉSUMÉ

Une recherche didactique avec une approche ethnographique a été menée pour analyser comment le contenu du système de numération décimale est abordé par deux enseignantes de première année de l'école primaire. Elles ont utilisé des leçons sur ce sujet tirées du Livre de Texte Gratuit Mathématiques Première Année (LTG-M1°). L'étude s'est appuyée sur la notion de Transposition Didactique et sur certains concepts de la Théorie des Situations Didactiques. Les interventions des enseignantes ont été conceptualisées comme des transpositions didactiques par rapport au manuel scolaire et ont mis en évidence certaines difficultés, principalement dues aux attentes en matière de résolution de problèmes formulées dans les activités du manuel. C'est pourquoi une analyse des suggestions didactiques du LTG-M1° a été réalisée. L'étude conclut qu'il est essentiel de maintenir une cohérence dans l'élaboration des propositions curriculaires. Il a également été constaté que les règles du système de numération décimale continuent de représenter un défi pour la conception des activités et pour l'apprentissage des enfants de première année de l'école primaire.

MOTS CLÉS:

- *Transposition didactique*
- *École primaire*
- *Système de numération décimale*
- *Enseignantes*
- *Manuel scolaire*

BY-NC

1. Introducción

El sistema de numeración decimal (SND) como objeto de enseñanza y aprendizaje tiene reglas de base y posición que resultan difíciles de comprender para los niños en sus primeros años de educación básica, esto debido a que se trata de un conocimiento complejo (Lerner, 1996). Diversos autores han estudiado algunas de estas dificultades; por ejemplo, el papel del idioma cuando se tienen palabras consideradas de mayor o menor transparencia para nombrar cantidades grandes (Lê y Noël, 2020), o bien, la pertinencia de materiales manipulables para el aprendizaje de las reglas de base y posición (Magina et al., 2020). Con la intención de abonar a estas discusiones, en este artículo se analiza cómo abordan dos profesoras de primer grado de primaria el contenido del SND en primer año de primaria, teniendo como base los libros de texto oficiales de educación básica en México, disponibles para el año en que se realizó el estudio (Secretaría de Educación Pública, 2017).

Desde 1959 el Libro de Texto Gratuito (LTG) es un derecho constitucional mexicano: el Estado establece proveer a todos los niños del país de los libros necesarios para concluir la educación primaria. Esto propicia que los docentes, especialmente los del sector público, organicen su enseñanza siguiendo lección a lección los LTG y, por tanto, es un recurso importante para organizar sus clases. Los LTG de matemáticas han tenido sus particularidades, Block y Álvarez (1999) señalan que desde 1993 se incorporó un nuevo enfoque para la enseñanza de las matemáticas desde una postura socio-constructivista del aprendizaje. Esta postura considera a los problemas como el medio a través del cual los alumnos aprenden, por la posibilidad que tienen de resolverlos utilizando procedimientos propios, construyendo estrategias y haciendo uso de sus conocimientos previos (García, 2014). Esto configuró un gran cambio respecto a las reformas anteriores, pues ya no se trataba de la aplicación de un conocimiento “adquirido”.

Posteriormente, aparece la fallida propuesta curricular de matemáticas en 2011 (Rojano y Solares, 2017) de la Reforma Integral del Educación Básica (RIEB) que publicó libros con errores didácticos, matemáticos y una baja calidad editorial. Debido a estos problemas evidentes, los libros fueron sustituidos a última hora por la colección *Desafíos Matemáticos;* un material de apoyo complementario para el aprendizaje que no estaba correlacionado con los Programas de Estudio, lo que ocasionó problemas y dificultades a profesores y estudiantes (Gómez, 2015). Si bien se recuperó el discurso de resolución de problemas para adquirir conocimientos matemáticos de la propuesta de 1993, la RIEB fue cuestionada en el Campo de Pensamiento Matemático por el exceso de contenidos que tenía.

 CC BY-NC

En 2017 la reforma *Aprendizajes Clave para la Educación Integral* (Secretaría de Educación Pública, 2017) tenía fundamentos curriculares sustentados en los aprendizajes que Coll (2013) llamó *imprescindibles*, los cuales, según este autor, son necesarios construir para poder transitar de un grado a otro. En diversos fragmentos del marco curricular se cita a Coll para explicar en qué consisten estos aprendizajes clave, por ejemplo, que se tratan de “un conjunto de conocimientos, prácticas, habilidades, actitudes y valores fundamentales que contribuyen sustancialmente al crecimiento integral del estudiante (p. 107, Secretaría de Educación Pública, 2017). El enfoque del campo de Formación Académica Pensamiento Matemático de esta Reforma, siguiendo la línea de las reformas anteriores, define a la resolución de problemas como la parte nuclear para organizar la enseñanza y el aprendizaje, y con la que se fomenta el gusto y las actitudes positivas hacia su estudio (Secretaría de Educación Pública, 2017). Asimismo, el contenido está organizado en tres ejes: 1) Número, álgebra y variación, 2) Forma, espacio y medida y 3) Análisis de datos. En el primer eje se encuentra el tema de número, adición y sustracción en donde se circunscribe este estudio.

En este contexto donde se identifica la estrecha relación entre las propuestas curriculares, los libros de texto y las experiencias de enseñanza, se planteó una investigación cuyo objetivo fue conocer cómo implementaban las profesoras en las aulas de primer grado los contenidos planteados en los LTG relacionados con el SND, identificando las posibilidades de acción que tenían al considerar los planteamientos subyacentes del libro.

2. Referentes teóricos

Los principales referentes para el análisis fueron la noción de transposición didáctica (Chevallard, 1998) y algunos constructos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2007). La noción de transposición didáctica fue útil para organizar el análisis desde dos niveles profundamente imbricados: por un lado, para las transformaciones que las docentes realizaron a las sugerencias didácticas de los libros a la luz de las relaciones entre los actores del sistema didáctico —docente, alumnos y saber matemático—; y por otro, para analizar el saber matemático cuando se convierte en un objeto para la enseñanza, específicamente con algunas decisiones didácticas que realizaron los autores del LTGM1°.

De acuerdo con Chevallard (1998), los proyectos sociales de enseñanza designan saberes como contenidos, estos sufren una serie de transformaciones adaptativas que los harán propicios para ser objetos de enseñanza. Al proceso de selección, reconstrucción y adaptación de los saberes matemáticos para ser enseñados en contextos escolares se le llama transposición didáctica. Este proceso tiene tres momentos significativos: el primero inicia cuando se instaura un saber matemático en el seno de la ciencia; un matemático presenta un teorema o desarrollo teórico ante la comunidad científica desprovisto de cualquier elemento subjetivo, el saber científico se estructura, comunica y cobra sentido en la disciplina científica, apartado de los procesos de producción en que surgió. El segundo momento se lleva a cabo por un grupo de agentes e instituciones responsables de delimitar los parámetros educativos de una comunidad, a este grupo se le denomina *noosfera* y designa los saberes matemáticos que van a ser enseñados en las instituciones escolares y las perspectivas didácticas que pueden emplearse para comunicar dichos conocimientos. En este nivel de transposición se diseñan los programas y referentes curriculares —filosóficos, didácticos, metodológicos, cognitivos, entre otros— que orientarán los procesos de enseñanza de las matemáticas y guiará la elaboración de libros de texto. En un tercer momento, el docente organiza su propuesta de trabajo de forma que se articule con los requerimientos institucionales —currículum, libros de texto, proyectos institucionales— y su postura personal acerca del conocimiento que va a enseñar, modelando su discurso y prácticas en el aula.

Chevallard (1998) explica que el docente conduce la cronogénesis del saber, es decir, la condición que le permite llevar a cabo la renovación didáctica, el tiempo utilizado durante la clase para abordar un saber. Asimismo, enseñante y enseñado difieren en sus lugares con respecto al saber en construcción: topogénesis, en este caso refiere a la posición del profesor con respecto al saber. El objeto de enseñanza se usa como objeto transaccional entre la versión oficialmente enseñada y la versión cuyo conocimiento se exige del enseñado. Los saberes también sufren transformaciones a través de las prácticas sociales en las diversas instituciones por las que transitan; por lo tanto, la escuela dialoga con otras instituciones que están ubicadas fuera de ella. El maestro no es el único que realiza transposiciones y no debería culpársele por ello, más bien, la transposición permite analizar las condiciones en las que circula el saber en diversas prácticas sociales, restringidas por condiciones institucionales (Sadovsky, 2019).

Otro referente empleado para esta investigación fue la teoría de situaciones didácticas (TSD) que estudia el conjunto de elementos que intervienen en la construcción del conocimiento matemático en el aula desde un enfoque constructivista del aprendizaje (Brousseau, 2007). El empleo de constructos de la TSD se debió principalmente, a que desde dos reformas anteriores a la reportada en esta investigación, se tomó como base el constructivismo en los referentes teóricos de las sugerencias didácticas (Block, 2018) mencionando, entre otras ideas, a la resolución de problemas como el medio por el cual se adquieren los conocimientos matemáticos.

 BY-NC

De acuerdo con Sadovsky (2005), la clase es un espacio de producción en el cual las interacciones sociales —alumno-alumno y alumno-docente— son condición necesaria para la emergencia y la elaboración de cuestiones matemáticas. Respecto a estas interacciones, Fregona y Orús (2011) argumentan que en la TSD se concibe al docente como el responsable de organizar los *medios* adecuados para que los estudiantes se relacionen con los saberes culturales. El *medio* se compone de: el objeto matemático a enseñar, la distribución del tiempo en función de lo que es posible producir en torno al objeto de estudio, los materiales, la consigna, los problemas, los textos, la organización de la clase.

Para describir y explicar las interacciones entre docente y alumno, a propósito de la interacción entre alumno y medio, en la TSD se emplea la noción de *contrato didáctico*. Esta noción da cuenta de las elaboraciones con respecto a un conocimiento matemático en particular, que se producen cuando cada uno de los interlocutores de la relación didáctica interpreta las intenciones y las expectativas explícitas e implícitas del otro en el proceso de comunicación (Sadovsky, 2005). El trabajo del docente consiste en proponer al alumno una situación de aprendizaje dándole la responsabilidad de hacerse cargo del problema que se le propone, para que produzca sus conocimientos, los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio. Finalmente, otra labor del docente es establecer la *institucionalización*, es decir, ordenar un espacio en el que se dé cuenta de lo que los alumnos hicieron, se describa lo sucedido y lo que está vinculado con el conocimiento en cuestión, es decir, brindar un estatuto de saber a los eventos de la clase en cuanto a resultados de enseñanza (Brousseau, 2007).

3. Metodología

Trabajamos con dos profesoras de escuelas públicas de la Ciudad de México, quienes gestionaron sus clases con los LTG de matemáticas de 1° grado. Circunstancialmente, ambas estaban convencidas de la metodología constructivista y de favorecer que los niños resolvieran por sí mismos las actividades planteadas en los libros de texto. Para la observación de clases asumimos como perspectiva metodológica el “doble enfoque” (Artigue, 2004) que nos permitió el análisis y la comprensión de las prácticas de las docentes, no solo desde su perspectiva en términos de aprendizaje de los alumnos, sino también, desde las normas y coerciones profesionales a las que están adscritas. Al respecto de las prácticas docentes y la construcción del conocimiento matemático en las aulas utilizamos algunas nociones de la TSD para dar orden al análisis de las clases, por ejemplo: el medio, la consigna, el contrato didáctico. De la noción de transposición didáctica se retomó el momento de transposición realizado por la noosfera, con el cual se analizaron algunos planteamientos del marco curricular y sugerencias didácticas

BY-NC

del libro de texto. Respecto al momento de transposición realizado por las docentes, se retomaron principalmente las nociones de topogénesis y cronogénesis para dar cuenta de algunas decisiones de las profesoras para llevar la clase.

De esta manera, las clases se analizaron con base en los contenidos trabajados y la distribución prevista de actividades entre las docentes y los alumnos; las formas de trabajo de los alumnos durante las sesiones, así como la interacción de los alumnos con las docentes. Se asumió el papel de las docentes como profesionales que trabajan en ambientes complejos y cambiantes a los que deben adaptarse continuamente (Hernández, 2020).

Asimismo, utilizamos un enfoque etnográfico y didáctico (Block et al., 2019). Desde los estudios de Rockwell y Mercado (1988) lo asumimos como etnográfico al reconocer que los profesores construyen sus prácticas con base en sus experiencias, en diálogo con su formación, con sus pares y con el alcance de los recursos culturales con que cuentan. Didáctico porque un insumo importante del análisis es la gestión de la enseñanza y los referentes metodológicos que la sustentan. La pregunta de investigación fue la siguiente: ¿Qué transposiciones didácticas realizan dos profesoras de primer grado a las lecciones sobre el sistema de numeración decimal de los libros de texto gratuito? A partir de la pregunta y los enfoques empleamos dos recursos para conformar el referente empírico: observación en el aula y entrevistas.

Para comprender lo que las profesoras interpretan y toman en cuenta de las sugerencias didácticas de la propuesta curricular nos dimos a la tarea de observar y documentar seis clases de matemáticas de primer grado. En este grado se repartieron los materiales de apoyo de la reforma educativa de 2017, donde se tenía como contenido al SND. Las profesoras de primero de primaria participaron de forma voluntaria y nos permitieron videograbar, cada una, tres clases de forma consecutiva en las que gestionaron lecciones del Libro de Texto Gratuito Matemáticas Primer Grado (LTG-M1º). Esta experiencia sucedió en el mes de febrero de 2019; la primera profesora gestionó dos de las lecciones del Trayecto 3 del libro titulado *Hasta el 50* y agregó una clase diseñada por ella. La otra profesora gestionó tres lecciones del Trayecto 6 titulado *Otra vez 50.* Para el levantamiento de los datos solicitamos permiso a las autoridades escolares, maestras y padres de familia para ingresar a las escuelas y videograbar las clases.

Realizamos dos tipos de entrevistas a las docentes las cuales se registraron en grabaciones de audio. Las primeras antes de la implementación del LTG-M1º para indagar algunos datos profesionales que nos permitieran contextualizar su práctica docente, mientras que las segundas se realizaron al final de las clases, para comprender las actuaciones poco claras observadas en sus gestiones. Durante el transcurso de la investigación, se apeló a la generación de un vínculo de confianza con las profesoras. Se pretendía, de esta manera, una comprensión amplia de las intenciones e ideas que guían su práctica y la relación que tenían con la propuesta curricular y los materiales oficiales.

 CC BY-NC

4. Resultados

Como mencionamos en la metodología, ambas profesoras siguieron las actividades tal como estaban planteadas en el *Libro para el Maestro* y en el LTG-M1°; es decir, las transposiciones observadas en la implementación de las lecciones discreparon muy poco sobre lo planteado en las sugerencias didácticas. Por ello, el análisis de los libros de texto resultó una parte fundamental de esta investigación, pues permitió comprender la razón de ser de las transposiciones realizadas por las docentes.

4.1. *Los libros de texto*

El LTG-M1° se organiza por medio de trayectos que se conforman por varias lecciones con problemas y actividades que buscan desarrollar los aprendizajes esperados de un eje temático (Secretaría de Educación Pública, 2018a). En este libro se retoman los temas trabajados en un trayecto para profundizarse y ampliarse en otro. Una de las profesoras que fue observada implementó el trayecto titulado *Hasta 50* y la otra profesora trabajó el trayecto posterior que profundiza y amplía el mismo rango de números titulado *Otra vez 50.*

El LTG-M1° se acompaña del *Libro para el Maestro*, el cual contiene las recomendaciones didácticas, tanto generales como específicas para cada lección. Entre las recomendaciones generales se le pide al maestro iniciar la clase proporcionando instrucciones para que los niños resuelvan las actividades del libro, se le aconseja dar un tiempo para que estos resuelvan con sus propios conocimientos y, en la parte final de la clase, se sugiere que los alumnos expliquen sus formas de resolución (Secretaría de Educación Pública, 2018a). Podríamos inferir que estas recomendaciones responden a una postura didáctica constructivista, pues se deja ver la importancia de plantear situaciones que permitan a los niños interactuar con un medio y poner en juego sus propios conocimientos para que ellos expliquen posteriormente sus formas de resolución.

Respecto al eje “Número, álgebra y variación”, en el Libro para el Maestro se plantea que en un fragmento de las sugerencias didácticas se busca “una comprensión profunda de los números, que involucre relaciones y multiplicidad de representaciones, más que en una preocupación por ampliar el rango numérico” (Secretaría de Educación Pública, 2018a, p. 44). Como puede apreciarse, el interés está en el desarrollo del sentido numérico para el aprendizaje del número y la operatoria; cabe mencionar que se intenta complementar la definición de esta noción en otros fragmentos con la idea de parte-todo, la descomposición de un número en sumandos, la resolución de operaciones en una variedad de contextos y el cálculo mental (Secretaría de Educación Pública, 2018a). Para el aprendizaje del SND se sugieren materiales didácticos específicos, entre ellos los *Tableros de 10* (ver figura 1), que consisten en una cuadrícula de dos por cinco y objetos pequeños para ocupar casillas que representan cantidades. Por ejemplo, para el número 24 se llenan dos tableros y cuatro casilleros de un tercero. Estos tableros son empleados para el desarrollo del sentido numérico y, según sus creadores, favorecen el agrupamiento de dos, de cinco y de 10 y permiten a los niños agrupar colecciones con base en el SND (Thompson y Van de Walle, 1984).

Los tableros de 10 sirven para fomentar los agrupamientos en 5 y 10. Sirven para trabajar con la descomposición de 10 en sumandos y con complementos a 10. Los estudiantes los pueden utilizar para comparar y ordenar colecciones al colocar semillas o piedritas en la cuadrícula.

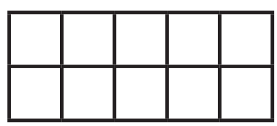


Figura 1. Sugerencias didácticas. Libro para el maestro. (Secretaría de Educación Pública, 2018a).

En el análisis de las clases de las docentes Diana[1] y Mariana, que a continuación se presenta, podemos dar cuenta de tensiones que surgen respecto a las pretensiones descritas en las sugerencias didácticas del libro para el maestro (Secretaría de Educación Pública, 2018a).

4.2. *Las transposiciones de la profesora Diana*

Diana es Licenciada en Educación Primaria y tiene una Maestría en Educación; en el momento de la toma de datos contaba con 17 años de experiencia docente; dos de ellos con primer grado.

La primera actividad planteada por Diana a sus estudiantes fue solicitarles el conteo de objetos de una caja, tal como lo plantea el LTG-M1° (ver figura 2). Desde el libro, se sugiere propiciar que los niños, al contar estos objetos, cambien el conteo de uno en uno por un conteo a través de agrupamientos distintos —de

[1] Los nombres de las profesoras fueron modificados para proteger su identidad.

 CC BY-NC

dos en dos, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco, etc.— y con esto se den cuenta que la manera “más fácil para contar” es hacerlo de diez en diez. Desde esta pretensión, Diana solicitó a los niños, una y otra vez, que *contaran rápido*, buscaba con ello desestimar el conteo de uno en uno, que ya sabían hacer, y lo sustituyeran por uno más económico que les ocupara menos tiempo. En el siguiente fragmento se puede ver el intento de Diana por cumplir esta pretensión de los autores del libro:

Diana: A ver chicos, fíjense bien, ¿habrá una forma más fácil de contarlos? Porque ahorita... A ver, posición de atención.

Aos: ¡Sí señor cómo no! [los niños contestan a coro, como si estuviesen en la milicia]

Diana: Ya ellos ya contaron las suyas [se refiere a un equipo], pero para poder comprobar lo que ellos hicieron, voy a tener que estar sacando uno a uno, uno por uno [los objetos]. ¿Qué les parece si hacemos torres? Las torres que hacemos como las palanquitas del Atari[2] que vimos el otro día, que poníamos tres, tres, tres y una hasta arriba [10 en total]. Vamos a ver cuántas torres podemos formar. En sus marcas, listos, fuera.

Una vez establecida esta consigna, los niños realizaron sus torres, sin embargo, no reconocieron el agrupamiento de 10 como una estrategia de conteo, ya que, en lugar de contar de 10 en 10, lo hicieron de uno en uno; es decir, contaban los cubos que formaba cada una de las torres, dando continuidad a la serie oral —diez, once, doce, …—. Hacer las torres de 10 fue una de las estrategias que Diana, con una alta posición topogenética, empleó para que la clase pudiera continuar; es decir, estableció el agrupamiento de 10 como la resolución a la actividad que se estaba planteando sin dejar que los niños vieran su utilidad. No obstante, los niños seguían poniendo en juego sus conocimientos sobre el conteo uno a uno. Es posible que, desde un enfoque constructivista, la actividad en sí misma no propiciara la necesidad de un conteo por agrupamientos; ni permitía que los niños tuvieran un encuentro con su ignorancia (Sensevy, 2011); es decir que, frente a una situación de conteo, consideraran poco económico el conteo de uno en uno y, por lo tanto, tratarían de encontrar la forma de sustituirlo por un conteo por agrupamientos. No obstante, que el libro para el maestro (Secretaría de Educación Pública, 2018a) señala la importancia del desarrollo del sentido numérico, y se propicia que los niños desarrollen la habilidad de realizar cálculos de diferentes formas, entre otros el conteo por agrupamientos, por ejemplo, de

[2] Atari es una productora de videojuegos estadounidense, su control consta de un prisma rectangular como base y una palanca en forma de cilindro por encima de éste.

(cc) BY-NC

3 en 3 o, de 7 en 7. Esta pretensión del libro sobrepasó las posibilidades de los niños que recién empiezan la escuela primaria; resultó una habilidad todavía no desarrollada y sumamente compleja para ellos, por lo que no hubo oportunidades de que apareciera como recurso de conteo.

Figura 2. LTG-M1° Lección 1. Trayecto 3. Bloque 2 (Secretaría de Educación Pública, 2018b)

Los niños no encontraron sentido a la demanda de Diana para que *contaran rápido*, fundamentalmente porque no tenían necesidad de hacerlo, ya que dominaban el conteo uno a uno y este era suficiente para responder la pregunta sobre cuántos objetos tenía su caja de sorpresas. Al percatarse de esto, Diana les solicitó explícitamente que hicieran agrupamientos de diez.

En la segunda sesión de observación de clase, Diana, implementó una actividad diseñada por ella con el objetivo de abordar las dificultades que tuvieron los niños en la clase anterior. Para ello, planteó una serie de ejercicios que referían al sentido de conservación de cantidad. Diana consideraba que, al no tener los niños desarrollada esta noción, presentaban dificultades para poder resolver las tareas.

 CC BY-NC

Planteó la conservación como aquella en la que "a pesar de que cambien las cantidades de objetos de los agrupamientos, es decir, que estos se alineen de 10 elementos, de 3 elementos, o de otra manera; hay una cantidad inicial que no va a cambiar al final" (Profa. Diana, comunicación personal, 20.02.2019).

En el *Libro para el Maestro* hay una noción que se parece al sentido de conservación y es la *invarianza d*e *la cardinalidad*, ésta aparece como una cuestión a atender para realizar conteos y consisten en "reconocer que el número de elementos de un conjunto se mantiene sin importar el orden en el que se presentan los mismos; es decir si los objetos se separan, o se cambian de lugar, la cardinalidad se mantiene" (Secretaría de Educación Pública, 2018a, p. 44). Una particularidad de esta definición de *invarianza* es cuando se habla del orden en el que se *presentan* los elementos de un conjunto, pues pudo existir una confusión entre decir que los elementos se pueden presentar de una u otra manera, como en los experimentos de conservación que se realizan a los infantes, a diferencia del orden en el que se *cuentan* los elementos de un conjunto. En el Programa para la Educación Preescolar, la *invarianza* aparece definida como un principio de conteo: "el orden en que se cuenten los elementos no influye para determinar cuántos objetos tiene la colección" (Secretaría de Educación Pública, 2004, p. 71). Esta definición enfatiza el orden en el conteo y no la presentación de los elementos del conjunto, es decir, se trata de nociones distintas, mientras que la invarianza es un principio de conteo, el sentido de conservación es un concepto trabajado desde la Teoría Psicogenética de Jean Piaget (Lerner, 1996). Este se desarrolla entre los 7 y 8 años, nos permite ver la transición entre el periodo preoperacional y operacional; es determinante al marcar el pensamiento lógico y permite a los niños fundamentar las operaciones concretas (Ferrarini y Rancich, 1989). La conservación consiste en el entendimiento de que la redistribución de los elementos de una colección no va a afectar su cardinalidad, pues no se están agregando o quitando elementos a la colección. Aunque los conceptos parecen tener algún punto de contacto, el sentido de conservación de la cantidad como objeto de enseñanza ha sido punto de debate por su falta de pertinencia en el currículo; la conservación es parte del desarrollo psicológico de los niños, por tanto, no es necesario enseñarla (Lerner, 1996). Diana conserva en sus creencias un debate epistemológico mantenido por varias generaciones; esto coincide con los planteamientos de Rockwell y Mercado (2003), quienes plantean que en las prácticas de cada maestro están sedimentadas innovaciones de diferentes épocas.

Diana, en la segunda clase, conocía la dificultad que habían presentado los niños para hacer su conteo por agrupamientos y así encontrar la cantidad de elementos de la caja. La clase sobre conservación que diseñó no estaba planteada en el libro de texto, no obstante, podemos inferir que Diana realizó una transposición intentando acelerar la cronogénesis del saber, ya que para ella, una vez que los niños vieran cómo la cantidad de elementos no depende de su acomodo, podrían avanzar hacia el conteo por agrupamientos. La consigna consistió en pedir a los niños que realizaran agrupamientos con base en la solicitud de un compañero, quien enunciaba en plenaria el número de elementos que debía tener cada agrupamiento. En la clase, la profesora dibujó una tabla (ver figura 3) de doble entrada en el pizarrón, en esta solicitó a los niños que dibujaran en la primera columna llamada *figura* las torres que les habían resultado con el número de elementos enunciado en plenaria —los agrupamientos enunciados fueron de 4, 8 y 10 elementos—. La segunda columna, llamada *conjuntos*, contenía el registro de la cantidad de agrupamientos, en la clase se llamaron *torres*. En la columna titulada *sueltas*, solicitó a los niños registrar las piezas sobrantes al armar los agrupamientos; en la última columna de la tabla, los niños debían registrar el total de elementos con los que contaban para el armado de las torres.

A pesar del esfuerzo de Diana para ayudar a los niños con el llenado de la tabla, la mayoría se equivocaron pues los resultados que registraban los ponían en columnas de la tabla indistintas. Aún con las dificultades, Diana intentó que todos los equipos hicieran el registro adecuado, sobre todo en la última columna, que era la que no tenía que cambiar.

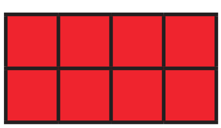
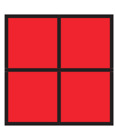
Figura	*Conjuntos*	*Sueltas*	*Total*
	X	35	35
	8	3	35
	4	3	35

Figura 3. Ejemplo de una tabla que realizaron los niños en sus hojas con ayuda de Diana. (Hernández, 2020)

El problema principal suscitado en esta clase fue que los niños tampoco hicieron uso de la conservación de la cantidad para justificar que el total no estaba siendo modificado. En vez de eso, para responder a la pregunta sobre la cantidad de elementos de la colección, contaron nuevamente de uno en uno los elementos de cada agrupamiento pasando por ellos de manera continua. Una dificultad importante en las clases de Diana fue que repartió a los equipos diferentes

 BY-NC

cantidades de objetos, esto le complicó significativamente la verificación. No ahondamos con la profesora sobre las razones de esta decisión; probablemente pensó que la clase sería muy sencilla si todos los equipos tenían la misma cantidad de elementos; no obstante, hubo grandes dificultades. Esto porque cuando Diana registraba 35 objetos de un equipo, había otro equipo que decía tener 38; además había un solo registro en el pizarrón cuando en el aula había cinco equipos. Entonces para la profesora fue difícil explicar lo que pasaba con resultados distintos, lo que también resultó confuso para los niños y el conteo por agrupamientos seguía ausente.

4.3. *Las transposiciones de la profesora Mariana*

Mariana es Licenciada en Educación Primaria y contaba con 10 años en servicio docente al momento de la toma de datos, cinco de ellos habían sido con primer grado de primaria.

Para entender la gestión de Mariana, en las clases documentadas se observa la realización de actividades previas a las solicitadas en el libro de texto, diseñadas por ella misma con las que intentaba facilitar el *medio*, esto con el objetivo de que al resolver las lecciones del LTG-M1° los niños tuvieran menos dificultades. La profesora pensaba que las actividades solicitadas en el libro eran muy pocas para el desarrollo de los conocimientos esperados, por lo que decidió añadir otras al inicio de cada sesión. En la primera clase, Mariana realizó una actividad (ver figura 4) en la que solicitó a los niños la estimación del resultado de una suma a la que ella denominó “cálculo” y compararlo con lo que ella llamó “real”, que es un cálculo hecho con lápiz y papel. Para realizar la actividad, repartió por parejas un total de 50 fichas de dos diferentes colores —25 y 25— y cuatro dados. La consigna fue tirar por turnos los cuatro dados y hacer una estimación de la suma de los puntos obtenidos en los dos turnos, con los ocho dados y después escribir la cantidad *real*.

Los niños trataron de hacer lo solicitado: copiar la tabla, las palabras y agregar su nombre y el de su pareja.

Nombre	*Cálculo*	*Real*
Valentina		
Randy		

Figura 4. Ejemplo de una tabla que tenían los niños en sus libretas y con la que Mariana trabajó en el pizarrón. (Hernández, 2020)

Sin embargo, los niños no comprendieron que en la fila en donde estaba su nombre tenían que registrar su estimación de la suma de las cantidades, obtenida por la pareja; en cambio, al ver los dos nombres registraron la cantidad que le había salido a cada uno al lanzar los cuatro dados. Había un exceso de material, lo que ocasionó que Mariana diera consignas muy largas refiriéndose a cómo debían manipular el material, sin tirarlo, ni jugar con él. Un ejemplo es el siguiente:

> Mariana: Son de diferente color, una persona, cada uno va a elegir qué color va a agarrar, no se tiene que ocupar mucho tiempo decidiendo, son todas así, son de varios colores. Por ejemplo, Ana agarra las azules, Valentina las amarillas, sin pelearse, sin enojarse. Cada persona, ustedes deciden quién empieza, lanza los cuatro dados; no los voy a aventar, no los voy a tirar, los voy a aventar bonito, que caigan bonito [lanza despacio los dados en su escritorio para modelar cómo deberían de caer] ¿sí?, no sé si se alcanzó a ver, no los aventé, sólo dejé que cayeran. Voy a sumar mis cuatro dados; seis más cuatro, más tres, más cuatro [suma los números que le salieron al lanzar los dados en su escritorio]. Yo los sumo 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Son 17, si yo elijo los azules, voy a agarrar diecisiete azules y me las quedo, nada más. Mi compañero de mesa va a lanzar los dados, va a sumar los cuatro dados y agarra esa cantidad, imagínense que a mi compañero de mesa le salió quince y agarra sus quince fichitas. Después sin contarlas una por una, sin contarlas, yo calculo más o menos que 17 más 15 serían 28 [lo escribe en la tabla del pizarrón]; yo Mariana tengo 17 y 15, yo Mariana digo que sin contar una por una, busquen la manera de no contar una por una, hacerlo lo más mental posible. Yo Mariana digo que entre los dos tenemos 28, yo Randy[3], si a mí me salió 17 y a ti 15, ¿cuántas crees más o menos que tengamos los dos?

Para los niños resultó difícil retener la cantidad total del primer turno —que obtenían contando los puntos, después de contar los de su compañero— y retener la cantidad total del segundo turno para, finalmente, estimar la suma de las dos cantidades y registrarla. Aunque el material que repartió Mariana estaba acorde con lo que se solicitaba en el LTG-M1°; después de las dificultades con la estimación, la lección se tornó aún más compleja, pues con todo y el material que tenían en sus mesas, Mariana les repartió *Tableros de diez* para que estos les ayudaran a comprobar resultados. Si bien, se trataba de un material no previsto para esta lección del libro de texto, a Mariana le pareció pertinente. Esta decisión pudo estar influenciada por la sugerencia de la lección 5 de usar los *Tableros de diez* para comprobar sumas, con la misma actividad de la lección 4.

Lo más difícil de esta lección para los estudiantes fue responder cuántos *Tableros de diez* habían llenado. Por ejemplo, para el número 32, ellos no decían tener tres tableros de 10, en su lugar, comentaban tener 30. Ha sido documentado con anterioridad la dificultad que tienen los niños para separar cifras como el 30,

[3] Los nombres de los niños también fueron modificados para proteger su identidad.

 CC BY-NC

ya que este equivale a tres grupos de 10, se trata de una de las reglas del SND más difíciles de comprender pues requiere asignar un valor relativo a una cifra, es decir, concebir a un grupo de unidades como una nueva unidad (Steffe, 1980, citado en Block y Álvarez, 1999).

A los niños también se les dificultó el hecho de que los tableros debían llenarse por completo antes de usar otro, y que se podían usar diferentes colores de fichas para llenarlos. En un equipo los llenaron como en la figura 5:

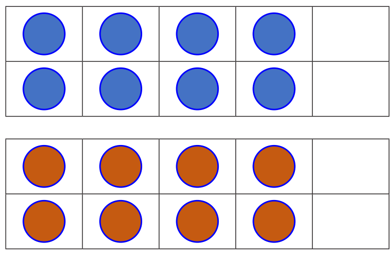


Figura 5. Ejemplo de un tablero llenado por alumnos de Mariana. (Hernández, 2020)

Mariana repetía constantemente a sus alumnos la consigna de llenar los tableros, pero los niños tuvieron muchas dificultades para entender, primero, que se podían poner fichas de dos colores en un solo tablero y, segundo, que con estos podían visualizar el resultado de la suma (ver figura 6).

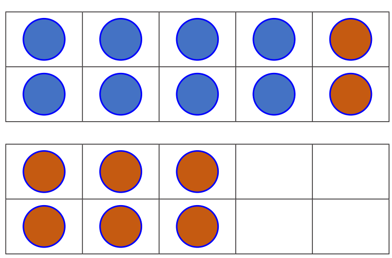


Figura 6. Llenado de tableros esperado para el número 16. (Hernández, 2020)

Walter (2018) reportó problemas muy similares con el uso de estos tableros por niños de primer grado, la explicación es que la estructuración que estos tableros pueden dar a los niños es muchas veces incompatible con sus representaciones. Parece ser que es excesiva la restricción de estos, lo que limita el individualismo de los métodos procesales de los niños. Esto explica el que los niños no encontraran una utilidad en el llenado de los tableros, porque en realidad

BY-NC

no sabían para qué servían, más allá de colocar las fichas encima de estos como lo había pedido su maestra. Mariana, por su parte, intentaba atender las sugerencias de la lección 5 donde se propone llenar los tableros para agrupar de 10 en 10 y con ello averiguar el resultado de la suma. La profesora enfrentó dificultades importantes durante toda la lección, y recordaba a los niños consignas largas y confusas de lo que tenían que hacer.

En el segundo día de observación, Mariana, con base en la dificultad de sus alumnos para registrar la estimación de la suma de los puntos obtenidos al lanzar ocho dados, les pidió que primero registraran los resultados individuales y después el de la suma total. En esta sesión no repartió fichas, pidió que las dibujaran en las fotocopias de los tableros. Mariana intentó, además, explicar en el pizarrón —de manera similar a la que aparece en el LTG-M-1°— (ver figura 7), cómo los tableros llenos comunicaban la forma de escribir cantidades.

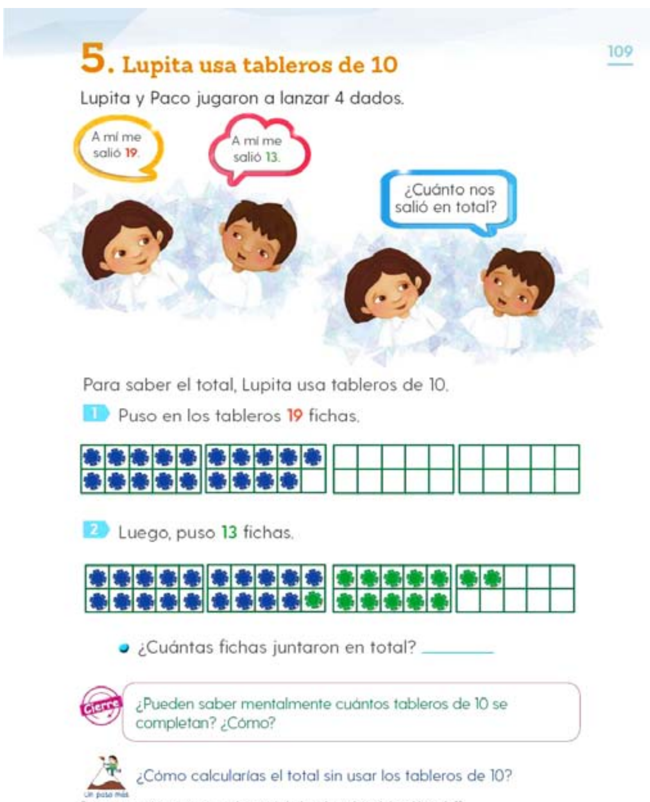


Figura 7. Lección 5. Trayecto 6. Bloque 2 (SEP, 2018b)

 CC BY-NC

En la suma que Mariana hizo en el pizarrón para ejemplificar cómo hacer la actividad, había llenado dos tableros y uno de ellos solo tenía cuatro fichas. Mariana preguntaba cuál era la cantidad resultante, a lo que uno de los niños respondió exactamente que se formaba el número 24. La profesora asumió que como un alumno había comprendido, todos los demás alumnos también. Sin embargo, las dificultades reaparecieron cuando dejó a los niños que resolvieran por sí mismos las sumas.

Lo primero que sucedió tras la consigna fue que muchos niños empezaron a pegar tableros sin realizar el lanzado de los dados y la estimación. La profesora al percatarse de esto indicó en plenaria que el primer paso era lanzar los dados, para poder hacer la suma de las dos cantidades y solo a partir de esto, imaginarse el número de tableros que debían pegar para poder dibujar sus fichas dentro de ellos. Sin embargo, hubo mucho desconcierto por parte de los niños, ya que les costó mucho imaginarse cuántos tableros tenían que utilizar. Ellos no le veían sentido al uso de los tableros, si primero tenían que hacer la suma. Esta confusión se presentó en todas las mesas, por lo que Mariana tuvo que ir una a una sugiriendo el pegado de dos, tres o cuatro tableros. Un niño, después de la sugerencia, preguntó a la profesora: *¿entonces son cuarenta?* A lo que Mariana dijo: *no lo sé, yo me lo imagino.* La estimación de cantidades no fue nada fácil para los niños, parece ser que la consigna de *imaginar* no era suficiente.

Tal como sucedió en la clase anterior, los niños no decían fácilmente el número de tableros llenos que les resultaban. Aunque Mariana había obtenido la respuesta esperada por un solo niño, el resto del grupo no entendía por qué era necesario el llenado de los tableros, tampoco por qué tener dos tableros llenos y uno con cuatro fichas formaba la cifra 24. En este sentido, coincidimos con Walter (2018), quien explica por qué los *Tableros de 10* son demasiado rígidos para apoyar el razonamiento de los niños alrededor de la decena. De esta manera, los *Tableros de diez* para los alumnos de Mariana no fueron un apoyo para sumar, ni para la escritura de cantidades.

Para Mariana resultó difícil cambiar la gestión de su clase en el momento en que esta se estaba llevando a cabo, lo que coincide con los planteamientos de Robert (2007) quien encuentra este cambio más factible durante la preparación de las clases. Si bien la profesora modificaba los materiales y realizaba una pre-clase, estas decisiones se tomaban en su planeación, en la clase tendía a repetir las consignas una y otra vez y atribuir las dificultades a la falta de atención de los niños. Además, la duración de las clases de Mariana permite ver un avance lento en la cronogénesis respecto al saber, es decir, la profesora decidía realizar clases largas para dar paso a que los estudiantes pudieran encontrar la pertinencia de la solución de las actividades sugerida en los libros: el empleo de los tableros para formar cifras y la estimación para realizar sumas.

(cc) BY-NC

5. Discusión y conclusiones

Hemos revisado las formas en las que Diana y Mariana enfrentaron el reto de abordar el SND con base en las lecciones del LTG-M1°. Para sintetizar los hallazgos, veamos las similitudes y diferencias de la gestión de las profesoras frente a las lecciones del libro.

5.1. *Similitudes*

Algo que caracterizó a ambas profesoras fue el entusiasmo por llevar a cabo las lecciones siguiendo las sugerencias del LTG-M1°, es decir, poca fue la intención de modificar las actividades a lo que ellas consideraran más pertinente. Ambas parecían estar de acuerdo con lo que estaba planteado en las sugerencias didácticas, incluso parecían esforzarse durante las clases para que las cosas sucedieran tal como las plantearon en el libro de texto. Esta similitud podemos atribuirla a la experiencia docente que tenían en el momento de la investigación, recordemos que ambas contaban con más de 10 años de desarrollo profesional como docentes. Diana tiene una Maestría en Educación mientras que Mariana llevaba cinco años con el primer grado de primaria. Ambas parecían tener experiencia en la formación socio-constructivista del aprendizaje, se esforzaban por no decir a sus estudiantes las respuestas, ni tampoco enseñaban la forma de resolver los problemas, por el contrario, permitían a los niños avanzar con la clase, reestableciendo las actividades si era necesario; esto resulta interesante, ya que fue una de las razones por las que logramos ver que no eran las profesoras haciendo cambios a la lección por falta de conocimiento acerca de los lineamientos metodológicos derivados del socio-constructivismo, más bien las dificultades que trataron de resolver, devienen de las pretensiones que se tienen en el libro de texto sobre las posibilidades de resolución de los niños.

Otra similitud entre las profesoras fue introducir actividades que consideraban de utilidad para que sus estudiantes comprendieran mejor las lecciones del LTG-M1°. Estas actividades resultaron alejadas de las posibilidades de resolución de los niños porque los alumnos no lograban comprenderlas, les costó mucho trabajo seguir las instrucciones de sus maestras. Sin embargo, las docentes, según expresaron en la entrevista, se ocuparon de diseñarlas y prepararlas con la intención de subsanar las dificultades que observaban en los niños frente a los planteamientos de las lecciones. En el caso de Diana, quien llevó a cabo la segunda sesión con base en la conservación de la cantidad empleando una tabla de doble entrada; justificó su uso señalando que *era mejor que los niños*

 CC BY-NC

se fueran acostumbrando porque en 5° y 6° tendrían que hacer tablas de este tipo. Mariana, por su parte, empleó la tabla desde la primera lección, para registrar la estimación de los niños para el resultado de la suma de dos cantidades. Aunque no pidió tantas columnas como Diana, los niños no comprendieron en dónde registrar la estimación personal de la suma total de las cantidades obtenidas en los dados; en cambio, creyeron que deberían registrar la cantidad que a cada uno le había salido en los dados.

5.2. *Diferencias*

Las diferencias respecto a la forma en la que las maestras enfrentaron las dificultades se observan especialmente en la cronogénesis y topogénesis del saber (Chevallard, 1998). En su entrevista, Diana señaló que se percató desde la primera clase que los aprendizajes esperados en el LTG-M1°, como el conteo por agrupamientos no se lograría con sus alumnos (Profa. Diana, comunicación personal, 19.02.2019). Ellos solo podían realizar el conteo de uno en uno y, si acaso, recitar la serie de 10 en 10. Ante esta situación, Diana apresuró la resolución con el conteo de 10 en 10 para facilitar la tarea a los niños, influyendo en la cronogénesis del saber. En la segunda clase, la profesora se percató de que los niños no realizarían conteos por agrupamientos de una cantidad diferente a 10; pero para apegarse lo más posible al libro, solicitó los agrupamientos en plenaria y utilizó la conservación de la cantidad para que los niños vieran cómo la cantidad de elementos de la colección no dependía de la forma del agrupamiento. Al privilegiar el conteo de 10 en 10, Diana bloqueó el conteo que los niños utilizaban en su lugar, el de uno en uno.

Mariana, por su parte, tuvo también dificultades con el tiempo. Para ella, 50 minutos dedicados a matemáticas no le eran suficientes para que los niños consolidaran los conocimientos. A diferencia de Diana, quien hacía presente una alta posición topogenética, Mariana iba lentamente e introducía actividades para ayudar a los niños. Sus clases duraban normalmente dos horas o más, puede que tomara esta decisión al sentirse observada, no obstante, consideraba importante que los aprendizajes pretendidos en el LTG-M1° se consolidaran. El exceso de materiales que se solicitaban desde el libro para el desarrollo de las clases de Mariana constituyó un distractor frecuente que impedía avanzar. Si bien la profesora intentó modificar y reducir este material en la segunda lección, los niños no pudieron estimar el número de tableros a emplear para resolver las sumas.

5.3. *Otros factores*

Hubo otros factores que enfrentaron las maestras, como las dificultades cognitivas de los niños para aprender el SND. En la segunda clase, Diana apeló a la conservación de la cantidad que, al margen de que estuviera o no consolidada en sus alumnos, la empleó con la intención de que los estudiantes “se dieran cuenta de que el total de elementos no cambia a pesar de que se modifiquen los agrupamientos” (Profa. Diana, comunicación personal, 19.02.2019). Con todo y esta enunciación de la profesora, algunos alumnos estaban convencidos de que, si cambiaba el acomodo de las fichas, las cantidades obtenidas serían diferentes, lo que sugiere que estos niños aún no construyen el sentido de conservación.

Mariana enfrentó dificultades similares a las de Diana. Para la primera clase en la que los niños debían emplear los *Tableros de diez*, solicitaba que le dijeran cuántos de esos se llenaban. Por ejemplo, Mariana esperaba que con 32 fichas los niños respondieran que tenían tres tableros llenos; esto no sucedió, pues su respuesta fue 30. Aunque se les reiterara *¿cuántos tableros?*, el valor relativo del 3 en las decenas no era muy claro. Mariana también se enfrentó a cuestionar sobre las fichas sueltas, por ejemplo, para la cifra 35; ella esperaba que los niños dijeran que tenían cinco, en cambio los niños respondían treinta y cinco. La profesora insistió en que el cinco tenían que separarlo, por lo que los niños lo empezaron a decir, pero no necesariamente porque comprendieran el valor posicional de los números, lo hacían más bien por la insistencia de Mariana quien señalaba el cinco en el 35.

Con todas las dificultades suscitadas en las dos aulas y, a pesar del trabajo con diferentes materiales, es posible pensar que las dificultades cognitivas de los niños alrededor del valor relativo de las cifras numéricas en el SND representan un saber que se debe seguir explorando desde la investigación para conocer su complejidad con mayor profundidad. Además, el hecho de que hubiera en las sugerencias didácticas del libro para el maestro (Secretaría de Educación Pública, 2018a) alusiones a formas de abordar la clase desde un enfoque constructivista, pero las actividades no se apeguen realmente al enfoque, resulta problemático y debería revisarse. Respecto al desarrollo del sentido numérico, los resultados de esta investigación nos hacen cuestionarnos su pertinencia cuando apenas se empiezan a aprender las reglas de base y posición del SND. Consideramos entonces, que alrededor de este análisis hay otras problemáticas que se asoman para la noosfera; como los enfoques didácticos y las restricciones institucionales. Son cuestiones que se conviene seguir indagando en futuras investigaciones.

 cc BY-NC

Agradecimientos

A las profesoras que permitieron la videograbación de sus clases y nos proporcionaron las entrevistas. A Yesenia Castaño por la lectura cuidadosa de este texto y sugerencias para mejorarlo.

Declaración de contribución y autoría

María del Rocío, Hernández Hernández, Investigación, Conceptualización, Metodología, Curación de datos, Análisis formal, Redacción en borrador original.

Irma Rosa, Fuenlabrada Velázquez, Conceptualización, Metodología, Supervisión, Redacción y edición.

…

Referencias

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación matemática*, *16*(3), 5-28. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-3/vol16-3-1.pdf

Block, D. y Álvarez, A. M. (1999). Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática, 11*(1), 57-76.

Block, D. (2018). La enseñanza de las matemáticas en la Reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la educación matemática*. (pp. 293-311). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

Block Sevilla, D., Ramírez Badillo, M. y Reséndiz Zamudio, L. (2019). ¿Cuánto pesa?, ¿cuánto mide? Una experiencia didáctica en una escuela primaria unitaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *24*(81), 537-564. https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v24n81/1405-6666-rmie-24-81-537.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal.

Coll, C. (2013). El currículo escolar en el marco de la nueva ecología del aprendizaje. *Aula de Innovación Educativa, 219,* 31-36. https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/53975/1/627963.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Aique.

Ferrarini, S. O. y Rancich, A. M. (1989). Conservación de masa, peso y volumen en escolares de una población marginal de Argentina. *Revista Latinoamericana de Psicología*, *21*(2), 165-175. https://www.redalyc.org/pdf/805/80521202.pdf

Fregona, D. y Orús Báguena, P. (2011*). La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas: una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Libros del Zorzal.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa*. Instituto Nacional para la Evaluacioìn de la Educacioìn. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D416.pdf

Gómez, L. (2015). Comprensión lectora como elemento primario para la resolución de los desafíos matemáticos en educación primaria. *Revista Internacional de Investigación y Formación Educativa. 1*(1). https://www.ensj.edu.mx/wp-content/uploads/2016/02/Compr-lect-como-elem-prim-para...-RIIFEDUC-Vol-1-N%C3%BAm-1-sep-oct-2015-lsgg.pdf

Hernández, M. del R. (2020). *Transposiciones didácticas del eje Número, álgebra y variación en el Libro de Texto Gratuito de Matemáticas 1o de primaria 2017* [tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/2772

Lê M-LT. y Noël M-P. (2020). Transparent number-naming system gives only limited advantage for preschooler's numerical development: comparisons of Vietnamese and French-speaking children. *PLOS ONE 15*(12). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0243472

Lerner, D. (1996). La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición. En J. A. Castorina, E. Ferreiro, M. Kohl de Oliveira y D. Lerner (Eds). *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. (pp. 69-118). Paidós.

Magina, S. M. P., Castro, V. O. y Fonseca, S. (2020). Uma intervenção pedagógica para a apropriação do sistema de numeração decimal. *Atos de Pesquisa em Educação*, *15*(4), 1246-1271. https://dx.doi.org/10.7867/1809-0354.2020v15n4p1246-1271

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré): une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *27*(3), 271-312. https://revue-rdm.com/2007/stabilite-des-pratiques-des/

Rockwell, E. y Mercado, R (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Investigación en la Escuela*, *2*(4), 65-78. https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/9314/8109

Rockwell, E. y Mercado, R. (2003). *La escuela, lugar de trabajo docente. Descripciones y debates* (1ra reimpresión, 2da ed.). Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Rojano, M. y Solares, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. INEE. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1F210.pdf

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. En H. Alagia, A. M. Bressan y P. Sadovsky (Eds). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 13-68). Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (2019). La Teoría de la Transposición Didáctica como marco para pensar la vida de los saberes en las instituciones. En C. Balagué (Comp.), *Bitácoras de la innovación pedagógica* (pp. 101-120). Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. https://www.flacso.org.ar/wp-content/uploads/2019/07/Bitacoras-de-la-innovacion-pedagogica.pdf

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Secretaría de Educación Pública (2004). *Programa de Educación Preescolar.* Publicado en el Diario Oficial de la Federación (DOF) el 27 de octubre de 2004. https://efmexico.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/06/prog_educ_preescolar_2004.pdf

 BY-NC

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Publicado en el Diario Oficial de la Federación el 12 de octubre de 2017. https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/10933/1/images/Aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

Secretaría de Educación Pública (2018a). *Libro para el maestro Matemáticas Primer grado*. CONALITEG.

Secretaría de Educación Pública (2018b). *Matemáticas Primer grado*. CONALITEG.

Thompson, C. S. y Van de Walle, J. (1984). The power of 10. *The Arithmetic Teacher*, *32*(3), 6-11.

Walter, D. (2018). How children using counting strategies represent quantities on the virtual and physical 'Twenty Frame'. En L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H. S. Siller, M. Tabach, C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education*. Springer.

Autoras

María del Rocío Hernández Hernández. Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav. Ciudad de México, México. rocio.hdz@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0002-5844-1170

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez. Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav. Ciudad de México, México. irfv2457@gmail.com

https://orcid.org/0000-0002-3045-0585

BY-NC

Yaneth Milena Agudelo-Marín, Eliécer Aldana-Bermúdez,
Laura Muñiz-Rodríguez

ENSEÑANZA EFICAZ DE LAS MATEMÁTICAS: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA

Effective mathematics teaching: A systematic review of the literature

RESUMEN

Esta revisión sistemática se plantea dos objetivos: determinar los factores de enseñanza eficaz de las matemáticas que inciden en el desarrollo de logros cognitivos en los estudiantes y conceptualizar el término enseñanza eficaz de las matemáticas. Se siguió un protocolo que permitió filtrar y analizar 31 artículos que revelan la multidimensionalidad y la estrecha relación que se entreteje entre los factores identificados, los cuales fueron agrupados en 3 categorías: factores asociados a características del docente como profesional, la dimensión general de la enseñanza y la dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas. También destaca entre los resultados la escasez de estudios en idioma castellano y la necesidad de implementar una metodología mixta en los estudios sobre este tópico.

PALABRAS CLAVE:

- *Enseñanza de las matemáticas*
- *Eficacia del docente*
- *Enseñanza centrada en el rendimiento*

ABSTRACT

This systematic review has two objectives: to determine the factors of effective mathematics teaching that influence the development of cognitive achievements in students and to conceptualize the term effective mathematics teaching. A protocol was followed that allowed filtering and analyzing 31 articles that reveal the multidimensionality and close relationship that is interwoven between the identified factors, which were grouped into 3 categories: factors associated with characteristics of the teacher as a professional, the general dimension of teaching and the specific dimension of mathematics teaching. Also notable among the results is the scarcity of studies in the Spanish language and the need to implement a mixed methodology in studies on this topic.

KEY WORDS:

- *Mathematics education*
- *Teacher effectiveness*
- *Competency based teaching*

CC BY NC

Agudelo-Marín, Y. M., Aldana-Bermúdez, E. y Laura Muñiz-Rodríguez, L. (2024). Enseñanza eficaz de las matemáticas: una revisión sistemática de la literatura. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 175-204. https://doi.org/10.12802/relime.24.2722. Recepción: Marzo 27, 2024 / Aceptación: Junio 4, 2024.

RESUMO

Esta revisão sistemática tem dois objetivos: determinar os fatores do ensino eficaz da matemática que influenciam o desenvolvimento de realizações cognitivas nos alunos e conceituar o termo ensino eficaz da matemática. Foi seguido um protocolo que permitiu filtrar e analisar 31 artigos que revelam a multidimensionalidade e a estreita relação que se entrelaça entre os fatores identificados, os quais foram agrupados em 3 categorias: fatores associados às características do professor como profissional, à dimensão geral da docência e a dimensão específica do ensino da matemática. Os resultados também destacam a escassez de estudos em espanhol e a necessidade de implementar uma metodologia mista em estudos sobre esse tópico.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação matemática*
- *Eficácia do profesor*
- *Ensino baseado em competências*

RÉSUMÉ

Cette revue systématique a deux objectifs : déterminer les facteurs d'un enseignement efficace des mathématiques qui influencent le développement des acquis cognitifs des élèves et conceptualiser le terme enseignement efficace des mathématiques. Un protocole a été suivi qui a permis de filtrer et d'analyser 31 articles qui révèlent la multidimensionnalité et la relation étroite qui s'entrelacent entre les facteurs identifiés, regroupés en 3 catégories : les facteurs associés aux caractéristiques de l'enseignant en tant que professionnel, la dimension générale de l'enseignement et la dimension spécifique de l'enseignement des mathématiques. Parmi les résultats, il convient également de souligner la rareté des études en langue espagnole et la nécessité de mettre en œuvre une méthodologie mixte dans les études sur ce sujet.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement des mathématiques*
- *Rendement de l'enseignant*
- *Enseignement basé sur les performances*

1. Introducción

La investigación en eficacia escolar busca determinar qué es lo que hace que los estudiantes aprendan más y mejor a través del reconocimiento de qué y por qué es lo que funciona en educación (Kyriakides et al., 2010; Martínez-Garrido, 2011). Para lograr este objetivo, se ha demostrado que, analizando los niveles del sistema educativo: contexto, escuela, profesor, aula y/o estudiante, se pueden empezar a dilucidar estas cuestiones (Creemers, 1994; Kyriakides et al., 2009; Scheerens y Creemers, 1989). Es así como en el seno de este movimiento investigativo se logró establecer que es en el aula en donde acontecen los aspectos más relevantes que explican el nivel de logro de los estudiantes y que, dentro de ella, el quehacer del profesor marca la diferencia (Kyriakides y Creemers, 2008), marcando los campos de acción de la línea de investigación en enseñanza eficaz —*effective teaching*—.

La enseñanza eficaz de las matemáticas —*effective mathematics teaching* o *effective teaching of mathematics*— es una línea de investigación que nació en Estados Unidos a finales de los años 60, del siglo XX, siguiendo los modelos de proceso - producto. Reynolds y Muijs (1999) se refieren a sus inicios en los siguientes términos: los estudios se fundamentaron en la observación de clases a gran escala y, desde ahí, los investigadores plantearon modelos que correlacionaron los comportamientos de los profesores con un mejor rendimiento de los estudiantes en matemáticas. Dichos modelos incluían los factores: oportunidades de aprendizaje —*OTL* por sus siglas en inglés—; instrucción / orientación académica; gestión eficaz del aula; altas expectativas de los profesores hacia los alumnos; proporción de enseñanza en el aula y enseñanza interactiva que involucre a los alumnos a través de preguntas, debates dirigidos y retroalimentación.

Una de las investigaciones más representativas de este periodo fue adelantada por Good y Grouws (1979), cuyo impacto fue profundo en las teorías que explican el rendimiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, después de 50 años la literatura sobre enseñanza eficaz tiene limitaciones con respecto al área específica de las matemáticas. Por ejemplo, las revisiones de la literatura la abordan mayoritariamente desde una perspectiva general de la enseñanza y en el marco de la eficacia escolar, es decir, teniendo en cuenta varios de los niveles descritos anteriormente (Klassen et al., 2011; Posner, 2004; Vélez et al., 1994), aunque en ocasiones es posible hallar dentro de ellas apartados o referencias sobre la enseñanza de las matemáticas (Hattie, 2009; Ko et al., 2014; Kyriakides et al., 2010; Muijs et al., 2014; Wayne y Youngs, 2003).

En particular, las revisiones de la literatura sobre enseñanza eficaz que se centran en las matemáticas han tenido perspectivas distintas: algunas se han interesado por las características de los profesores eficaces y/o sus creencias (Bolyard y Moyer-Packenham, 2008; Maamin et al., 2020), otras exploran la pedagogía que mejora los resultados deseables para diversos estudiantes (Anthony y Walshaw, 2007) y algunas más han visto posibilidades novedosas. En este último grupo se puede incluir el trabajo de Van de Grift (2007), quien demuestra que las revisiones pueden utilizarse para diseñar instrumentos de

 BY-NC

evaluación que permitan hacer seguimiento, en la práctica, a los factores que destaquen en la literatura. Otro caso es el estudio de Askew (2020), quien hace una revisión para responder a la cuestión: ¿reconocemos la enseñanza eficaz —de las matemáticas— cuando la vemos?, entre otras preguntas ancladas en la reflexión sobre la necesidad de identificar las prácticas particulares de los profesores según sus contextos.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, este artículo presenta una revisión de la literatura que analiza sistemáticamente las investigaciones publicadas sobre enseñanza eficaz que incluyen la enseñanza de las matemáticas. Esto con el propósito de determinar los factores que se han perfilado como aquellos que inciden positivamente en el desarrollo de logros cognitivos (relacionados con el dominio de competencias en pruebas escolares y/o en pruebas estandarizadas) y determinar lo que se entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas en medios académicos.

Así pues, esta revisión sistemática se estructura de la siguiente manera: a continuación, se documenta la metodología en la que se enmarcó para, posteriormente, analizar los resultados planteando una estructura conceptual con base en los hallazgos obtenidos en el mapeo y el análisis cualitativo. Finalmente, se presentan los resultados que pueden permitir a los actores educativos conocer las tendencias de esta línea de investigación para tomar decisiones con base en evidencias empíricas y teóricas.

2. Método

La revisión que se presenta está en línea con las pautas *Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyzes —PRISMA—* (Liberati et al., 2009), diseñadas para la realización de revisiones sistemáticas de la literatura. Asimismo, se tomó en cuenta el proceso explicado por Borrego et al. (2014), a partir del cual se siguieron los pasos:

Decidir adelantar una revisión sistemática. Debido a que la enseñanza eficaz es una línea de investigación que aglutina una tendencia con objetivos muy variados, se hizo necesario tener una visión precisa de la evolución de la evidencia en el campo específico de la enseñanza de las matemáticas.

Identificar el alcance. Esta revisión de la literatura busca determinar los factores de enseñanza eficaz de las matemáticas que inciden en el nivel de logro cognitivo de los estudiantes y, además, conceptualizar lo que se entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas. Así, se aprovecha el ejercicio bibliométrico para ahondar en datos relevantes que pueden obtenerse, por ejemplo, de las métricas de investigación disponibles sobre los artículos seleccionados.

Definir criterios de inclusión. En este estudio se decidió rastrear las investigaciones sobre enseñanza eficaz de las matemáticas desde el año 2000 hasta julio de 2020. Para ello se procedió a adelantar una búsqueda electrónica en las bases de datos *Web of Science —WoS—* y *SCOPUS*, por estar referenciadas como espacios dedicados a permitir el rastreo, el análisis y la visualización de la investigación académica.

La ecuación de búsqueda para ambas bases de datos incluyó las siguientes palabras clave y operadores booleanos: (factors OR factores) AND (effective OR eficaz) AND (teaching OR enseñanza OR ensino) AND (mathematics OR matemáticas). Para el caso de SCOPUS los resultados se filtraron por área temática de tal manera que solamente se aceptaron documentos de la colección de Ciencias Sociales y Matemáticas. Asimismo, se refinó la búsqueda por palabras clave y se excluyeron artículos con los términos "química", "biología", "biociencia", "enseñanza de las ciencias" y "*pre-service teachers*" (profesores en formación), ya que el interés se centró en el análisis de los factores que se evidencian en aulas dirigidas por profesores en servicio en cualquier nivel educativo.

En la base de datos WoS, la búsqueda se enmarcó en las categorías "*education educational research*", "*education scientific disciplines*" y "*special education*" y en ambas bases de datos solo se aceptaron artículos en idiomas inglés, español o portugués. Después de este proceso se obtuvieron 188 artículos: 79 en WoS y 109 en SCOPUS.

Buscar y catalogar las fuentes. Dentro de los 188 artículos obtenidos se identificaron 9 repetidos quedando 179. Estos estudios fueron sometidos a la revisión de sus títulos, palabras clave y resúmenes donde se excluyeron 76. Posteriormente, se realizó lectura completa de los textos de las 103 investigaciones preseleccionadas, eliminando 86 que no cumplían con las condiciones para ser incluidos: identificar factores de enseñanza eficaz de las matemáticas relacionados con el logro cognitivo de los estudiantes y, estar asociados al reconocimiento por parte de la comunidad (profesores, estudiantes, directivos, padres de familia / cuidadores, premios, instituciones reconocidas) del desempeño del profesor.

Los artículos que cumplieron estos criterios de inclusión fueron 17. Sin embargo, durante el ejercicio bibliométrico se evidenciaron fuentes primarias citadas en las referencias bibliográficas de los artículos obtenidos que no hacían parte del listado que arrojó la ecuación de búsqueda, motivo por el cual se decidió

 CC BY-NC

adelantar una búsqueda de citas. “Citation searching, or snowball sampling, involves reviewing the lists of works cited by sources already identified (cited references) as well as the later articles that cite the sources already identified (citing references)” [La búsqueda de citas, o muestreo de bola de nieve, consiste en revisar las listas de obras citadas por las fuentes ya identificadas (referencias citadas), así como los artículos posteriores que citan las fuentes ya identificadas (referencias citadas)] (Borrego et al., 2014, p. 57). Bajo estas condiciones se detectaron 14 artículos, por lo que la muestra se constituyó con 31 artículos de investigación, proceso que se resume en la Figura 1.

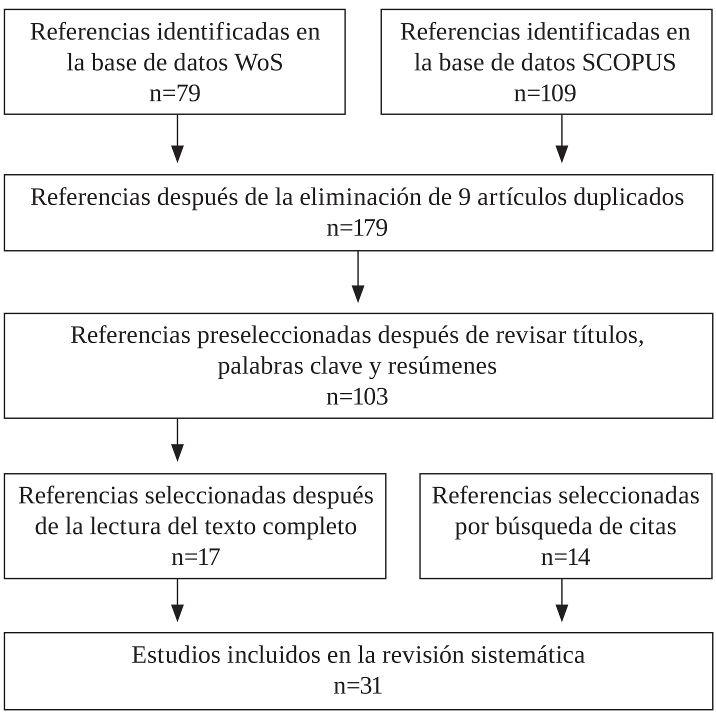


Figura 1. Diagrama de flujo del proceso de selección de artículos

Para estructurar los resultados de esta revisión sistemática se presenta la Tabla I, la cual incluye los 31 artículos seleccionados indicando su año de publicación, los autores y el área temática de la revista que los publicó. Como estrategia para referenciar con facilidad los artículos en los análisis posteriores, a cada uno se le asignó un código que inicia con la letra A seguida de un número que indica el orden cronológico en el que fue publicado.

(cc) BY-NC

TABLA I
Descripción general de los artículos analizados

Código	*Título*	*Autores*	*Área temática de la revista*
A1	The influence of teachers' efficacy and beliefs regarding mathematics instruction in the early childhood classroom	Todd (2005)	Educación
A2	Teacher characteristics and teaching styles as effectiveness enhancing factors of classroom practice	Opdenakker y Van Damme (2006)	Educación
A3	Australian teachers' views of effective mathematics teaching and learning	Perry (2007)	Educación matemática
A4	Characteristics of mathematics teaching in Shanghai, China: Through the lens of a Malaysian	Lim (2007)	Educación matemática
A5	Chinese (Mainland) teachers' views of effective mathematics teaching and learning	Wang y Cai (2007a)	Educación matemática
A6	Hong Kong teachers' views of effective mathematics teaching and learning	Wong (2007)	Educación matemática
A7	Quality of teaching in four European countries: A review of the literature and application of an assessment instrument	Van de Grift (2007)	Educación
A8	United States teachers' views of effective mathematics teaching and learning	Wang y Cai (2007b)	Educación matemática
A9	A residual analysis of effective schools and effective teaching in mathematics	Papanastasiou (2008)	Educación
A10	Characteristics of good mathematics teaching in Singapore grade 8 classrooms: A juxtaposition of teachers' practice and students' perception	Kaur (2009)	Educación matemática
A11	Good mathematics instruction in South Korea	Pang (2009)	Educación matemática
A12	Classroom and school factors related to student achievement: What works for students?	Teodorović (2011)	Políticas para la eficacia educativa
A13	Good Mathematics Teaching from Mexican High School Students' Perspective	Martínez-Sierra (2014).	Educación matemática
A14	An examination of some instructional practices in selected rural secondary schools	Ngoepe (2014)	Ciencias sociales

 CC BY-NC

A15	Effective mathematics teaching in Finnish and Swedish teacher education discourses	Hemmi y Ryve (2015)	Educación matemática
A16	Comparing performance: a cross-national investigation into the teaching of mathematics in primary classrooms in England and China	Miao et al. (2015)	Educación
A17	Determining effective teaching behaviors through the hiring process	Schumacher et al. (2015)	Educación
A18	Effective teaching in elementary mathematics: Identifying classroom practices that support student achievement	Blazar (2015)	Políticas y finanzas de la educación
A19	Inferring constructs of effective teaching from classroom observations: an application of bayesian exploratory factor analysis without restrictions	Lockwood et al. (2015)	Estadística aplicada
A20	Mathematical Knowledge for Teaching, Standards-Based Mathematics Teaching Practices, and Student Achievement in the Context of the Responsive Classroom Approach	Ottmar et al. (2015)	Educación
A21	The impact of instructor pedagogy on college calculus students' attitude toward mathematics	Sonnert et al. (2015)	Educación matemática
A22	Do the teacher and school factors of the dynamic model affect high- and Low-Achieving student groups to the same extent? A Cross-Country study	Vanlaar et al. (2016)	Educación
A23	Investigación Iberoamericana sobre enseñanza eficaz	Martínez-Garrido y Murillo (2016)	Educación
A24	Pupil's assessment of teaching and of him/herself as learner – relevant items in the teacher's creation of effective learning environment	Valenčič-Zuljan (2016)	Educación
A25	The impact of effective teaching characteristics in promoting student achievement in Ghana	Azigwe et al. (2016)	Educación
A26	Taiwanese high school students' perspectives on effective mathematics teaching behaviors	Wang y Hsieh (2017)	Educación

A27	Achieving elusive teacher change through challenging myths about learning: A blended approach	Anderson et al. (2018)	Educación
A28	Factores de aula asociados al desarrollo integral de los estudiantes: Un estudio observacional	Murillo y Martínez-Garrido (2018)	Educación
A29	A multilevel analysis of the impact of teachers' beliefs and mathematical knowledge for teaching on students' mathematics achievement	Ekmekci et al. (2019)	Educación
A30	Factors influencing students' proficiency development in the fraction domain: the role of teacher cognitions and behaviour	Koopman et al. (2019)	Educación
A31	Latent Class Analysis of Teacher Characteristics: Can We Identify Effective Teachers?	Holmes y Schumacker (2020)	Educación

Síntesis. Esta fase se dividió en dos subsecciones: mapeo y análisis cualitativo. El mapeo presenta y analiza datos relacionados con variables contextuales, mientras que el análisis cualitativo requirió el uso de un software para análisis de datos cualitativos (se eligió "QDA Miner"), con el objetivo de adelantar una codificación de orden deductivo (Flores-Kanter y Medrano, 2019) orientada por los factores que los investigadores señalan como factores de Enseñanza eficaz (no exclusivos de la enseñanza de las matemáticas y que para esta revisión se consideran como factores previstos[1]) y que Martínez-Garrido (2015) recoge, agrupa y detalla. Así, se reunió una colección de categorías establecidas previamente en un libro de códigos potenciales —lo que significa que el libro se modifica a medida que se revisan los datos— y que derivó en un libro final de códigos que guía la estructura conceptual que se presenta en los resultados.

[1] Martínez-Garrido (2015) presenta una revisión de la literatura, indicando que los autores organizan los factores de enseñanza eficaz "en relación a las diferentes situaciones que el docente tiene que considerar a la hora de llevar a cabo su docencia" (p. 112) agrupándolos en función de: i) aquello relacionado directamente con la didáctica, con el proceso de enseñanza —tiempo y oportunidades para aprender; metodología docente; deberes escolares; atención a la diversidad; evaluación del estudiante; retroalimentación y utilización de recursos—, ii) aquellos factores que suponen y definen un marco para que la enseñanza se desarrolle —clima de aula; gestión de aula; expectativas hacia el estudiante e implicación familiar—, y iii) factores que guardan relación con lo que el docente es como profesional en la docencia y sus condiciones laborales —compromiso; trabajo en equipo; planificación; desarrollo profesional; empoderamiento docente; relaciones con la dirección; condiciones laborales y satisfacción del docente—.

 CC BY-NC

3. Resultados

Se muestran, a continuación, los resultados obtenidos tomando como ejes organizativos el mapeo y el análisis cualitativo de los artículos seleccionados, esto con el fin de conectar o vincular campos de datos y desarrollar las categorías que, según los estudios, agrupan los factores que inciden en el rendimiento de los estudiantes; así como un apartado con la conceptualización de lo que se entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas desde la óptica de *cómo es* un docente eficaz y lo que este *hace* para alcanzar una enseñanza eficaz.

3.1. *Mapeo*

Las variables estudiadas en esta fase se relacionan con aspectos como el conteo de citaciones, la región de origen del artículo, la metodología de investigación implementada y el nivel educativo en el que se llevó a cabo el estudio.

Con respecto a las métricas, se aprovechó la posibilidad que brindan las bases de datos WoS y Scopus de inspeccionar el posicionamiento de los artículos seleccionados —revisando citas, no referencias—, destacando A2 con 113 citas, A7 con 107, A18 con 46 y A1 con 43. Un aspecto que resalta en este análisis es que, en general, las investigaciones tienen poca visibilización en citas de métricas alternativas —*altmetrics*—, como referencias a través de Wikipedia, comentarios y "me gusta" en blogs, Twitter o Facebook que, si bien es cierto, deben usarse con cuidado como complemento de las medidas tradicionales de la calidad de la investigación (Barnes, 2015), proporcionan una idea sobre qué se está hablando acerca de una investigación en espacios que incluyen otras audiencias interesadas en el tema. En este aspecto, el estudio A27 sobresale en *PlumX* —herramienta analítica disponible en Scopus— con 10 menciones en noticias, 1 en blogs, 51 tweets y 119 comentarios y me gusta en Facebook.

La Tabla II recoge el alcance geográfico de los artículos analizados mostrando las regiones donde se han producido las investigaciones objeto de este análisis.

TABLA II
Distribución regional de los artículos, según el lugar donde se realizaron los análisis

Continente	*f*	*Región*
Europa	5	Bélgica (A2); Chipre (A9); Eslovenia (A24); Países Bajos (30) y Serbia (A12)

América del Norte	11	Estados Unidos (A1; A8; A17; A18; A19; A20; A21; A27; A29 y A31); México (A13)
Asia	6	China (A4 y A5); Hong Kong (A6); Singapur (A10); Corea del Sur (A11); Taiwán (A26)
Oceanía	1	Australia (A3)
África	2	Ghana (A25) y Sudáfrica (A14)
Transnacionales	6	Alemania – Bélgica – Chipre – Eslovenia – Grecia – Irlanda (A22); Alemania – Bélgica – Inglaterra y Países Bajos (A7); China – Inglaterra (A16); Finlandia – Suecia (A15) e Iberoamérica (Bolivia – Chile – Colombia – Cuba – Ecuador – España – Panamá – Perú – Venezuela (A23 y A28)

Sobre este tópico se puede afirmar que:

a. Entre las regiones en las que se realizaron los análisis resalta Estados Unidos con 10 investigaciones —32,3 %—. Esta representatividad es esperable, toda vez que los profesores estadounidenses han sido pioneros en estudios de eficacia escolar e incluso cuentan con un centro nacional para la eficacia docente cuyo principal estudio se denomina: “Desarrollo de medidas de enseñanza eficaz de las matemáticas”, además del proyecto: Medición de la Efectividad Docente (MET, por sus siglas en inglés), de la Fundación Bill y Melinda Gates.

b. El 19,3 % de los artículos responden a estudios transnacionales.

c. Los factores de enseñanza eficaz de las matemáticas asociados al logro cognitivo de los estudiantes de Iberoamérica han sido abordados en el 9,7% de las investigaciones (A13, A23 y A28). No se halló desarrollo de otras investigaciones en esta región a pesar de que la búsqueda en las bases de datos incluyó los idiomas inglés —como lenguaje fundamental de socialización del conocimiento si se tiene en cuenta que, entre otros aspectos, al menos tres cuartos de la información electrónica almacenada en bases de datos está en este idioma (Díaz-Castelazo, 2018)—, castellano y portugués, decisión que se tomó para dar mayor cabida a producciones iberoamericanas publicadas en estas bases de datos bibliográficas en lenguas maternas.

Sobre los enfoques de investigación implementados por los investigadores y los niveles educativos en los que se llevaron a cabo los estudios, se puede decir que el 61,3 % de los investigadores ha utilizado el tipo cuantitativo, como se puede comprobar en la Tabla III.

 CC BY-NC

TABLA III
Enfoque metodológico y niveles educativos de los artículos revisados

Nivel	*Enfoque metodológico*			
	Cuantitativo	*Cualitativo*	*Mixto*	*Total*
Primera infancia	A1			1
Primaria[1]	A7; A12; A18; A20; A22; A23; A25; A28 y A30	A3; A6; A11	A16 y A27	14
Secundaria	A2; A9; A24; A26 y A31	A10, A13 y A14		8
Universitaria	A21	A15		2
Mixto[2]	A17; A19 y A29	A4; A5 y A8		6
Total	19	10	2	31

1 Incluye profesores de grado 1° a grado 6°.

2 Mixto: la población de estudio está constituida por profesores de diferentes niveles educativos. Elaboración propia.

Esta tendencia puede responder a la necesidad que perciben los investigadores de:

a. Hallar relaciones de articulación, persistencia y significatividad entre las variables diseñando estudios correlacionales (A1, A7, A9, A19, A21, A24 y A26) y estudios de modelado multinivel, jerárquicos o de regresión (A2, A12, A17, A18, A22, A23, A25, A28, A29 y A30).
b. Obtener información relevante sobre estructuras que subyacen a las variables, como estudios de análisis de agrupamiento (A20) o estudios de análisis de clases latentes (A31).

El análisis desde un enfoque cualitativo es utilizado por el 32,3% beneficiándose de métodos que les permiten ser exhaustivos y ahondar en detalles estructurales como los estudios de casos (A3, A4, A5, A6, A8, A11 y A14) y el análisis del discurso (A15) o, generar teoría a partir de sus análisis, por ejemplo, usando el método comparativo constante (A10 y A13), mientras que las metodologías mixtas solo son utilizadas en dos investigaciones, esto a pesar de que estas brindan mayor reconocimiento a elementos cualitativos que pueden enriquecer los datos estadísticos (Anderson et al., 2018; Azigwe et al., 2016; Ko et al., 2014; Miao et al., 2015).

Otro aspecto relevante es que el 45% de las investigaciones se adelantan en el nivel de primaria (14 estudios) y que entre ellos está la totalidad de los estudios de métodos mixtos (6,5%). Esta distinción es importante porque en primaria los estudiantes tienen el mismo profesor para casi todas las asignaturas, lo que no sucede en la educación secundaria. En este sentido, Chetty et al. (2014), estimaron que los efectos de los profesores es mayor en matemáticas en términos de los resultados en los exámenes (su estudio analizó el impacto de los profesores en las asignaturas de matemáticas y lengua materna —inglés—): “the fact that high math and English teachers continue to have substantial impacts in middle school indicates that education has substantial returns well beyond early childhood” [el hecho de que los profesores de matemáticas e inglés de alto nivel sigan teniendo un impacto sustancial en la escuela secundaria indica que la educación tiene rendimientos sustanciales mucho más allá de la primera infancia] (p. 2670).

3.2. *Análisis cualitativo*

Los autores de esta revisión reconocen, como Murillo et al. (2011), que un listado de factores “en ningún caso puede entenderse como una receta, apenas pretende ser un elemento útil en cualquier reflexión informada que busque mejorar el desarrollo de los estudiantes” (p. 9) y que la categorización que aquí se presenta no es la única forma de organizar los datos. Esto deriva de que en muchas ocasiones los límites entre variables no son del todo claros pues las características de los códigos se interrelacionan con expresiones que pueden estar conectadas a varias categorías (Hemmi y Ryve, 2015).

En esta revisión se diferenciaron las categorías de la enseñanza —dimensión general y dimensión específica—, de la categoría de las características del docente de matemáticas como profesional porque las primeras hacen alusión a las actividades relacionadas con las prácticas en el aula y la otra se refiere, como su nombre lo indica, a características del que enseña (Hemmi y Ryve, 2015). Los factores identificados se nuclearon en cada categoría determinando la incidencia positiva que tuvieron en el rendimiento matemático de los estudiantes —según los resultados de las investigaciones sujeto de este análisis— y obedeciendo a los marcos teóricos que se describen.

3.2.1. *Características del docente de matemáticas como profesional*

Los factores asociados con las características del docente de matemáticas como profesional, que se muestran en la Tabla IV, pueden entenderse como factores

 CC BY-NC

preexistentes que inciden desde más allá del aula (Ko et al., 2014), haciendo referencia al trabajo que el docente desarrolla fuera de la clase que también afecta al desarrollo de los estudiantes (Martínez-Garrido y Murillo 2016).

El análisis llevado a cabo destaca que, para esta categoría, tres de los factores establecidos en el libro final de códigos hacen parte de los factores previstos —trabajo en equipo, planificación y desarrollo profesional—, específicamente con aquellos que guardan relación con lo que el docente es como profesional en la docencia y sus condiciones laborales. No obstante, afloró el "conocimiento especializado" como una evidencia no contemplada en el libro de códigos potenciales para el factor "desarrollo profesional", haciendo referencia al conocimiento específico necesario para enseñar matemáticas (Carrillo et al., 2013) como un elemento base para el desarrollo profesional (Lima, 2017; Llinares et al., 2022) sobre el que, Liñán et al. (2016), exponen:

> Queda definido por el conocimiento y las habilidades matemáticas propias de esta, entre las que reconocen que implica el uso de una determinada representación, unir representaciones con las ideas subyacentes y otras representaciones, conectar temas con anteriores o posteriores, examinar equivalencias, y usar notación y lenguaje matemático. (p. 18)

TABLA IV
Factores de enseñanza eficaz asociados a las características del docente de matemáticas como profesional

Factor	*Evidenciado en*	*Artículo*
Trabajo en equipo	Disposición para el intercambio con colegas	A3, A4, A23, A27 y A31
Planificación	Planificación de las lecciones	A3, A4, A5, A6, A15, A16, A17, A18 y A28
Desarrollo profesional	Formación —inicial y continua— para la enseñanza de las matemáticas	A3, A4, A6, A11, A15, A18, A23, A27 y A29
	Conocimiento de los temas[2]/ Conocimiento especializado	A3, A5, A6, A8, A11, A13, A15, A18, A19, A20, A29 y A30

[2] Por temas matemáticos se hace referencia a los componentes de las grandes ramas propuestas por el National Council of Teachers of Mathematics en los estándares matemáticos publicados en el año 2000. Así pues, el conocimiento de los temas constituye el conocimiento en profundidad de los contenidos matemáticos en dichos temas, acompañado de sus fundamentos, propio de la labor de enseñar de los profesores de matemáticas (Vasco y Moriel, 2022).

Según las investigaciones mencionadas en este apartado, estos factores dan cuenta de que:

a. Los docentes que participan activamente en su propio desarrollo profesional, pertenecen a grupos de investigación y permiten la interacción y la colaboración con otros docentes de matemáticas —por ejemplo, asesorando a sus colegas—, favorecen el desarrollo cognitivo y la satisfacción de sus estudiantes frente a la escuela (Anderson et al., 2018; Lim, 2007; Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Perry, 2007).

b. La planificación de la clase es un componente vital en la enseñanza eficaz (Schumacher et al., 2015) pues las explicaciones claras se logran a través de lecciones bien preparadas y organizadas (Wong, 2007). Esta planificación debe considerar una estructura clara y una transición fluida entre sus componentes (Miao et al., 2015); múltiples actividades y estrategias de instrucción pensadas para atender a estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje; prever situaciones inesperadas en el aula; ir más allá del programa de estudios y proyectarse para satisfacer las necesidades de los estudiantes (Hemmi y Ryve, 2015; Perry, 2007; Wang y Cai, 2007a; Wong, 2007).

c. Hay efectos consistentemente positivos en el rendimiento matemático de los estudiantes que tienen docentes con un sólido conocimiento de las matemáticas y de su didáctica pues, entre otras acciones, pueden incluir en la preparación de sus clases ejemplos concretos para explicar conceptos abstractos, tener más herramientas para elegir recursos idóneos para la clase y ofrecer explicaciones y preguntas claras y sistemáticas que provoquen el pensamiento de los estudiantes (Blazar, 2015; Ekmekci et al., 2019; Hemmi y Ryve, 2015; Koopman et al., 2019; Martínez-Sierra, 2014; Perry, 2007; Wang y Cai, 2007a; Wong, 2007). Un mayor conocimiento especializado de los docentes es un fuerte predictor de la práctica docente (Carrillo et al., 2013) y el aprendizaje de los estudiantes (Ottmar et al., 2015).

3.2.2. *Dimensión general de la enseñanza*

Los factores que se asocian con lo que hacen los docentes en la práctica se clasificaron con el objeto de acercase a la identificación de los tipos de prácticas que más afectan los resultados de los estudiantes; después de todo, el efecto de los docentes ocurre, en parte, a través de la calidad de la instrucción (Blazar, 2015; Ottmar et al., 2015) y la mayor variación sobre el rendimiento matemático de los estudiantes puede explicarse por las acciones del profesor en el aula (Koopman et al., 2019).

 BY-NC

En esta categoría se incluyeron los factores relacionados con la competencia del docente para gestionar en el aula aspectos como el comportamiento, los conflictos y las emociones de los estudiantes —entre otros—, todo dentro de un marco de normalidad (López-Luján, 2018). Se consideran "generales" porque hacen referencia al conocimiento de las técnicas, estrategias e instrumentos adecuados para conducir de manera correcta un grupo —no necesariamente un grupo de estudiantes de matemáticas—, determinando, en gran medida, la calidad del proceso de aprendizaje-enseñanza (Sanz y López-Luján, 2013).

Los factores categorizados dentro de la dimensión general de la enseñanza se presentan en la Tabla V, cinco de ellos hicieron parte del libro de códigos potenciales —clima de aula, gestión del aula, tiempo y oportunidades para aprender, evaluación del estudiante y expectativas hacia el estudiante—, emergiendo el factor "motivación" con base en la concepción de que el objetivo de la enseñanza no debe ser únicamente la creación de situaciones de conflicto cognitivo donde los alumnos se encuentren solos; además, debe seguir una fase importante de apoyo o andamiaje (Valenčič-Zuljan, 2016), que debe responder a una política clara y constante del docente.

TABLA V
Factores de enseñanza eficaz asociados a la dimensión general de la enseñanza

Factor	*Evidenciado en*	*Artículo*
Clima de aula	Relaciones efectivas dentro del aula de clase	A2, A3, A4, A5, A6, A8, A20 y A22
	Disfrute de la enseñanza/ entusiasmo	A3, A5, A6, A8, A13 y A15
Gestión del aula	Ambiente disciplinado y orientado al aprendizaje	A4, A6, A7, A8, A9, A12, A16, A19, A22, A23 y A28
Tiempo y oportunidades para aprender	Tiempo dedicado realmente a la enseñanza	A6, A7, A10, A12, A16, A22, A23, A25 y A28
Evaluación del estudiante	Objetivos claros que el estudiantado conoce	A3, A5, A6, A7, A10, A15, A16 y A28
Expectativas hacia el estudiante	Altas expectativas sobre los estudiantes	A3, A5, A6, A8, A23 y A30
Motivación	Política de refuerzos positivos	A3, A4, A6, A8, A11, A24 y A31

De acuerdo con los datos extraídos de las investigaciones sujeto de esta revisión, el 80% de los estudios abordan factores de la dimensión general de la enseñanza que, para el caso específico de las matemáticas, cobran especial relevancia si se tiene en cuenta la variedad de relaciones significativas que se dan entre ellos y el rendimiento en matemáticas de los estudiantes.

Por ejemplo, se hallaron relaciones positivas entre el aprendizaje que se da en un ambiente disciplinado y, a) el tiempo dedicado realmente a la enseñanza, b) las relaciones efectivas en el aula, c) el disfrute por la enseñanza / entusiasmo y, d) la participación de los estudiantes en clase —clasificado en la dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas—, factores que se relacionan significativamente con el desarrollo de la competencia matemática (Holmes y Schumacker, 2020; Koopman et al., 2019; Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Vanlaar et al., 2016; Van de Grift, 2007).

Los resultados encontrados confirman, además, que en las aulas donde el docente mantiene un clima de disciplina se favorece hacer uso de un lenguaje en el que pueden explicitar las expectativas de éxito hacia el desarrollo de los estudiantes (Wang y Cai, 2007a). De hecho, Martínez-Garrido y Murillo (2016) estimaron que, en matemáticas, las expectativas de éxito que el docente tiene hacia sus estudiantes impactan positivamente en su desarrollo cognitivo casi en 4 puntos.

3.2.3. *Dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas*

La competencia que demuestre un profesor para conducir el aprendizaje en un aula toma matices distintos y relevantes en la medida en que la especificidad de un área así lo requiera. Blazar et al. (2017) lo explican magistralmente para el caso específico de las matemáticas: si por ejemplo, el profesor retroalimenta a los estudiantes sobre conceptos erróneos, se espera que ahonde en remediación conceptual más que procedimental.

A tal efecto, existen factores que se pueden determinar en cualquier aula, pero que tienen una connotación especial en el aula de matemáticas. Así pues, se detectaron los factores previstos que los investigadores relacionaban con la calidad de la instrucción, pero indicados para el área específica de las matemáticas. Surgieron evidencias nuevas como el discurso especializado; el uso pedagógico del error; la participación activa del estudiantado en la creación de significado matemático; la estimulación del pensamiento del estudiante y el factor “creencias”, que está detrás de la práctica del profesor, respaldando su filosofía acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, permeando sus conocimientos e influyendo y predisponiendo su práctica (Ekmekci et al., 2019; Flores-Medrano et al., 2016; Wang y Cai, 2007a). Dichos factores se enuncian en la tabla VI.

 CC BY-NC

TABLA VI
Factores de enseñanza eficaz asociados a la dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas

Factor	*Evidenciado en*	*Artículo*
Utilización de recursos	Materiales de instrucción	A3, A5, A6, A11, A14, A15, A21, A23 y A26
Desarrollo profesional	Discurso especializado	A3, A4, A5, A11 y A20
Metodología docente	Enseñar estrategias de aprendizaje	A7, A13, A15 y A16
	Enfoque de instrucción	Demostración para toda la clase A10, A15 y A16
		Dirigido por el profesor, pero centrado en el estudiante A2, A5, A6 y A26
	Claridad en la instrucción	A6, A9, A12, A13, A15, A16 y A21
Atención a la diversidad	Conocimiento / monitoreo de los estudiantes para atenderlos según sus necesidades	A1, A2, A3, A5, A6, A8, A10, A11, A15, A16, A17, A18, A23 y A24
Retroalimentación	Retroalimentación y uso pedagógico del error	A4, A10, A12, A15, A16, A17, A18, A22, A23, A24, A27, A28 y A30
Tiempo y oportunidades para aprender	Participación activa del estudiantado en la creación de significado matemático	A5, A6, A7, A11, A13, A24, A26, A30 y A31
Deberes escolares	Estimulación del pensamiento del estudiante	Tareas matemáticamente significativas e interesantes A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A15, A16, A17, A23, A24, A26 y A28 Practicar para comprender A4, A5, A6, A8, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A23, A26 y A28 Técnicas de interrogatorio A3, A4, A5, A6, A8, A10, A11, A16, A17, A18, y A22
Creencias	Creencias	Creencias sobre sí mismos y las matemáticas A3, A6, A8, A15 y A27 Creencias epistémicas A1, A5, A8, A13, A29 y A30

CC BY-NC

Como ya se mencionó, para trabajar en esta revisión sistemática y dar sentido a los factores de enseñanza eficaz de las matemáticas se determinó una colección de códigos potenciales —factores previstos— que se modificó a medida que se revisaron los datos de tal manera que el libro final de códigos, alimentado por los hallazgos que mostraron constancia a lo largo de la revisión, está plasmado en las tablas IV, V y VI.

Así pues, se consideró que mantener la estructura de los factores bajo tres categorías —características del docente de matemáticas como profesional, dimensión general y dimensión específica de la enseñanza— era una estrategia útil. Las diferencias más notables entre el libro final de códigos y los factores previstos se evidenciaron cuando se revisó la categoría que Martínez-Garrido (2015) denomina "aquello relacionado directamente con la didáctica, con el proceso de enseñanza" (p. 114), que aquí se denomina dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas.

En esta revisión se identificaron factores que no son contemplados en los factores previstos y que corresponden con la especificidad de la didáctica de las matemáticas: discurso especializado, claridad en la instrucción y estimulación del pensamiento del estudiante. Adicionalmente, los factores: enseñar estrategias de aprendizaje, participación activa del estudiantado —en la creación de significado matemático—, conocimiento / monitoreo de los estudiantes para atenderlos según sus necesidades y evaluación, retroalimentación y uso pedagógico del error, que son categorizados en los factores previos dentro del "marco para que la enseñanza se desarrolle", cobraron un matiz tan específico y evidente frente a la enseñanza de las matemáticas, que se decidió incluirlos en la dimensión específica. Un caso especial lo constituyen las creencias, que emergieron como un nuevo hallazgo frente a los factores previos y que poseen un papel destacado en la comprensión del comportamiento de los profesores durante su instrucción (Aguilar-González et al., 2018).

Llama la atención que, a pesar de que 29 de los 31 estudios revisados hicieron alusión a algún factor agrupado en esta dimensión, solo 6 investigaciones (Blazar, 2015; Ekmekci, et al., 2019; Koopman et al., 2019; Lockwood et al., 2015; Ottmar et al., 2015) utilizaron instrumentos de recolección de datos diseñados especialmente para el aula de matemáticas —como el *Mathematical Quality of Instruction* [MQI] (Hill et al., 2008; Hill et al., 2012)— o marcos reconocidos en materia de conocimiento del profesor de matemáticas —como el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza [MKT] (Loewenberg Ball et al., 2008) —.

Tal y como ocurrió con los factores asociados a la dimensión general de la enseñanza, en esta dimensión también se hallaron relaciones interesantes:

 CC BY-NC

a. Las aulas donde los estudiantes tienen la libertad de compartir abiertamente los errores que cometen en su desempeño a la hora de trabajar en las tareas matemáticas tienen más posibilidades de cumplir las altas expectativas de los docentes. Estos estudiantes saben que tendrán la oportunidad de modificar su respuesta / pensamiento sin ningún estigma y que serán guiados por una persona que conoce la materia y orienta con las preguntas adecuadas (Blazar, 2015; Vanlaar et al., 2016) percibiéndose mayor rendimiento en matemáticas, especialmente, en las clases de bajo rendimiento (Anderson et al., 2018).

b. La evidencia muestra que factores, como los clasificados en la Tabla VI, ayudan a los estudiantes a cerrar la brecha entre sus habilidades actuales y la meta prevista. En este sentido, se ratifica que las dimensiones de instrucción específicas inciden en la mejora de los niveles de rendimiento de los estudiantes (Anderson et al., 2018; Blazar, 2015; Ekmekci et al., 2019; Hemmi y Ryve, 2015; Lim, 2007; Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Miao et al., 2015; Murillo y Martínez-Garrido, 2018; Opdenakker y Van Damme, 2006; Ottmar et al., 2015; Papanastasiou, 2008; Schumacher et al., 2015; Teodorović, 2011; Todd, 2005; Vanlaar et al., 2016; Van de Grift, 2007; Wang y Cai, 2007a; Wang y Hsieh, 2017; Wong, 2007). De hecho, sin una guía e instrucción eficaz del docente durante la clase, se dificulta lograr el aprendizaje (Azigwe et al., 2016), esto porque lo que los estudiantes aprenden sobre las matemáticas depende casi totalmente de las experiencias que los profesores ofrecen cada día en el aula (Ngoepe, 2014, p. 464).

3.3. *¿Qué se entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas?*

Dado que definir la enseñanza eficaz es una tarea desafiante que conlleva a adentrarse en el ámbito de la medición, la teorización y la práctica (Ko et al., 2014), era de esperarse que, tal y como lo advirtieron Kaur (2009) y Hemmi y Ryve (2015), no se encontrara una definición universal de enseñanza eficaz de las matemáticas sin embargo, sí se halló una diferenciación entre quienes la conceptualizan desde la posición de *cómo es* —un docente eficaz— y quienes se decantan por determinar lo que *se hace* para alcanzar una enseñanza eficaz.

La conceptualización en torno a lo que significa *ser* un docente eficaz de matemáticas ha sido abordada por los investigadores con enfoque en la perspectiva de los estudiantes (Kaur, 2009), su propia perspectiva como docentes (Perry, 2007) o desde múltiples enfoques —las opiniones de los estudiantes, los mismos docentes, los observadores de clase y los directores de escuelas— (Holmes y Schumacker, 2020). No obstante, todos, sin excepción, hicieron referencia a *acciones* que operan en los actos que se llevan a cabo en el aula: explicar, hacer, desafiar, propiciar, demostrar, usar, enfocar o controlar; tal y como lo hicieron quienes usaron específicamente los términos *enseñanza, práctica* o *instrucción* eficaz de las matemáticas para referirse al *hacer*, destacando la definición dada por investigadores u organizaciones de consejos nacionales (Martínez-Sierra, 2014; Perry, 2007; Wang y Cai, 2007b; Wang y Hsieh, 2017; Wong, 2007), desde su propia experiencia como investigadores expertos en enseñanza de las matemáticas (Ottmar et al., 2015) o como formadores de docentes de matemáticas (Hemmi y Ryve, 2015).

Esta diferenciación no se evidenció en las investigaciones que abordaron la especificidad de la enseñanza eficaz de las matemáticas dentro del marco de la dimensión general de la enseñanza, pues todos los artículos definieron la enseñanza eficaz en términos de *acciones* que lleva a cabo el docente (Van de Grift, 2007).

Estas definiciones tienen en común que:

a. La enseñanza eficaz de las matemáticas implica reflexión por parte del docente —reflexión sobre sí mismo y su práctica en el aula— y sobre los estudiantes, sus necesidades y su aprendizaje (Anderson et al., 2018; Hemmi y Ryve, 2015; Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Ngoepe, 2014; Opdenakker y Van Damme, 2006; Pang, 2009; Valenčič-Zuljan, 2016; Wong, 2007);

b. La enseñanza eficaz de las matemáticas está cargada de valor cultural según el contexto local (Hemmi y Ryve, 2015; Lim, 2007; Martínez-Sierra, 2014; Pang, 2009; Van de Grift, 2007; Wang y Cai, 2007b; Wang y Hsieh, 2017; Wong, 2007) y, por tanto, lo que en un aula es práctico y efectivo, a pocos kilómetros puede tener una connotación menos positiva aunque, como afirma Miao et al. (2015), es importante reconocer que, aunque las influencias culturales en las aulas las hacen diferentes, la respuesta de los estudiantes a una enseñanza eficaz es la misma.

c. La enseñanza eficaz de las matemáticas busca su comprensión a través de la multidimensionalidad (Holmes y Schumacker, 2020; Ottmar et al., 2015; Pang, 2009; Van de Grift, 2007; Wang y Cai, 2007b; Wang y Hsieh, 2017), así como la mejora de aspectos de tipo no cognitivo como las actitudes hacia las matemáticas o aspectos socio-afectivos y emocionales (Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Murillo y Martínez-Garrido, 2018; Opdenakker y Van Damme, 2006; Papanastasiou, 2008; Valenčič-Zuljan, 2016).

 (cc) BY-NC

4. Discusión

La investigación sobre enseñanza eficaz de las matemáticas reconoce explícitamente que la enseñanza es una actividad compleja, para nada estática ni lineal, anidada dentro de una red en evolución que incluye a la escuela, al sistema educativo, al hogar y a la comunidad (Anthony y Walshaw, 2009). Así pues, en esta revisión se proporciona una descripción del estado general y las tendencias de investigación sobre los factores que describen la enseñanza eficaz de las matemáticas y la noción que del mismo proceso tienen los actores involucrados en educación. Se documentó una variada lista de factores y evidencias que se pueden clasificar de múltiples formas, pero que aquí se categorizaron bajo 3 categorías que exponen características del docente como profesional y de su práctica en el aula —subdividida esta última en 2 categorías—: dimensión general de la enseñanza y dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas.

Esta revisión sistemática ha reforzado los hallazgos previos con respecto a la intervención de múltiples factores en la consecución de una enseñanza eficaz. Además, ha permitido identificar factores y evidencias específicas de la enseñanza de las matemáticas que no se hallaron entre los factores previstos —conocimiento especializado, discurso especializado, política de refuerzos positivos, uso pedagógico del error, participación activa del estudiantado en la creación de significados, creencias y estimulación del pensamiento del estudiante—. Igualmente se constató que hay factores que han sido estudiados como factores asociados a la enseñanza general, pero que en el aula de matemáticas tienen una connotación específica —enseñar estrategias de aprendizaje, participación activa del estudiantado en la creación de significado matemático, conocimiento / monitoreo de los estudiantes para atenderlos según sus necesidades y evaluación, retroalimentación y uso pedagógico del error—.

Estos hallazgos apoyan el argumento de que en la práctica de aula del docente eficaz de matemáticas coexisten factores que impactan no solo a los estudiantes, sino también a otros docentes (Perry, 2007), teniendo presente que no hay una regla fija para llevar a cabo una enseñanza eficaz en ningún área del conocimiento y que no es posible medir todas las prácticas beneficiosas para el aprendizaje (Wong, 2007; Ottmar et al., 2015). En suma, la enseñanza eficaz es una tarea compleja que se nutre con la investigación —en el sentido de que esta mejora su comprensión y la de sus supuestos normativos—, lo que implica que la noción que tengan los docentes, los formadores de docentes y los encargados de políticas públicas influya en las decisiones que se toman sobre el diseño y la investigación de la enseñanza (Krainer, 2005).

CC BY-NC

Se destaca que los factores clasificados teóricamente en una u otra categoría, se conjuntan en la práctica de tal modo que pueden ser al mismo tiempo origen o resultado de una acción que desarrolle el docente en el aula, pero todos aportan significativa y positivamente a la consecución de la mejora en el rendimiento en matemáticas (Anderson et al., 2018; Blazar, 2015; Ekmekci et al., 2019; Hemmi y Ryve, 2015; Lim, 2007; Martínez-Garrido y Murillo, 2016; Miao et al., 2015; Murillo y Martínez-Garrido, 2018; Opdenakker y Van Damme, 2006; Ottmar et al., 2015; Papanastasiou, 2008; Schumacher et al., 2015; Sonnert et al., 2015; Teodorović, 2011; Todd, 2005; Vanlaar et al., 2016; Van de Grift, 2007; Wang y Cai, 2007a; Wang y Hsieh, 2017; Wong, 2007).

5. Conclusiones

El objetivo de esta revisión sistemática de la literatura es determinar los factores que se han perfilado como aquellos que inciden positivamente en el desarrollo de logros cognitivos y determinar lo que se entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas en medios académicos. El análisis muestra que hay consenso en distinguir factores de enseñanza que pueden influir en el nivel de logro cognitivo que alcanzan los estudiantes en matemáticas. En el relevamiento se identificaron 3 categorías y 16 factores con 21 evidencias que los profesores, directores de escuela y diseñadores de políticas educativas pueden estudiar para apoyar a los docentes en la mejora del desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes.

Los hallazgos confirman que las categorías y los factores determinados coinciden con los estudios que se han realizado sobre eficacia escolar y del docente: el nivel del aula es más importante que el nivel de la escuela ya que este explica la mayor variación en el desarrollo de logros de los estudiantes (Kyriakides et al., 2000 y Scheerens y Bosker, 1997 citados por Azigwe et al., 2016); para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es más decisivo lo que el profesor hace, que sus características personales (Opdenakker y Van Damme, 2006) y para acercarse a la comprensión de las características de la enseñanza específica de las matemáticas, se requiere un marco teórico de lo específico, además del marco general de la enseñanza (Blazar, 2015; Ekmekci et al., 2019; Koopman et al., 2019; Lockwood et al., 2015; Ottmar et al., 2015).

Hay acuerdo entre los investigadores en reconocer que, dentro del nivel del aula, “teachers are the most important key players in students’ educational outcomes” [los profesores son los actores clave más importantes en los resultados

 BY-NC

educativos de los alumnos] (Ekmekci et al., 2019, p. 57). Prueba de ello son los 31 artículos estudiados, en donde el tema central ha sido la enseñanza eficaz de las matemáticas. No obstante, no hay consenso en la conceptualización sobre si la enseñanza eficaz de las matemáticas es un logro que corresponde a *cómo es* el profesor, a *qué hace* o a ambas. Sin embargo, esta diferenciación no fue un obstáculo para la consecución de los objetivos propuestos para este trabajo porque la categorización permitió clasificar factores de orden profesional, general y específico de la enseñanza y las evidencias presentadas por los autores permitieron construir una imagen de lo que la comunidad académica entiende por enseñanza eficaz de las matemáticas con base en acciones (lo que se hace) y en actitudes, disposiciones y concepciones (cómo se es).

La decisión de incluir estudios con enfoques metodológicos variados —cualitativos, cuantitativos y mixtos— permitió verificar que los factores que más interés suscitan entre los investigadores interesados en determinar los factores de enseñanza eficaz de las matemáticas son precisamente los relacionados con la dimensión específica de la enseñanza de las matemáticas. En suma, en este artículo se evidencia la multidimensionalidad de la enseñanza de las matemáticas (Holmes y Schumacker, 2020; Ottmar et al., 2015; Van de Grift, 2007) a través de las 3 categorías definidas y se comparte, con Azigwe et al. (2016), que la comprensión del funcionamiento de los factores relacionados con el quehacer eficaz del profesor han de estudiarse desde múltiples aspectos para llegar a inferencias más holísticas.

Además, se estableció un panorama claro y delimitado con la información disponible para la ventana de tiempo estudiada que revela coincidencias y novedades frente a otras investigaciones que se han llevado a cabo. La validez de los hallazgos se apoya en los repositorios de fuentes de datos utilizados y en el proceso iterativo de codificación que se usó para analizarlos, aunque se considera relevante que para próximos estudios se amplíen los repositorios en los que se determinen las búsquedas y se incluyan otros idiomas para motivar las pesquisas sobre los factores de enseñanza eficaz con una perspectiva más pluricultural e inclusiva.

Se recomienda a los formadores de docentes y a los encargados de recursos humanos que integren en los cursos de formación de los docentes —inicial y continua— una noción clara de lo que podría entenderse por enseñanza eficaz (Hemmi y Ryve, 2015), con el fin de que los estudiantes puedan experimentar un aprendizaje que los conduzca a un nivel de logro óptimo, teniendo presente que la “buena” enseñanza de las matemáticas da como resultado un alto nivel de rendimiento (Papanastasiou, 2008).

Declaración de contribución y autoría

Yaneth Milena, Agudelo-Marín, conceptualización, metodología, investigación, análisis formal, redacción en borrador original, revisión y edición.

Eliécer, Aldana-Bermúdez, conceptualización, redacción y revisión

Laura, Muñiz-Rodríguez, redacción y revisión.

…

Referencias

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41–61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Anderson, R. K., Boaler, J. y Dieckmann, J. A. (2018). Achieving elusive teacher change through challenging myths about learning: a blended approach. *Education Sciences, 8*(3) 98. https://doi.org/10.3390/educsci8030098

Anthony, G. y Walshaw, M. (2007, abril). *Characteristics of effective teaching of Mathematics: an evidential synthesis*. [Artículo presentado ante la American Educational Research Association]. Chicago, Illinois, Estados Unidos. https://www.massey.ac.nz/massey/fms/Colleges/College%20of%20Education/Documents/C%26P/Anthony/AERA%20-%20Characteristics%20of%20Effective%20Teaching.pdf

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of Mathematics: a view from the west. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 147–164. https://journalofmathed.scholasticahq.com/article/122428-characteristics-of-effective-teaching-of-mathematics-a-view-from-the-west

Askew, M. (2020). Identifying effective mathematics teaching: some questions for research. *African Journal of Research in Mathematics, Science & Technology Education, 24*(1), 1–9. https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1710049

Azigwe, J. B., Kyriakides, L., Panayiotou, A. y Creemers, B. P. M. (2016). The impact of effective teaching characteristics in promoting student achievement in Ghana. *International Journal of Educational Development, 51*, 51–61. https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2016.07.004

Barnes, C. (2015). The use of altmetrics as a tool for measuring research impact. *Australian Academic & Research Libraries, 46*(2), 121–134. https://doi.org/10.1080/00048623.2014.1003174

Blazar, D. (2015). Effective teaching in elementary mathematics: identifying classroom practices that support student achievement. *Economics of Education Review, 48*, 16–29. https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2015.05.005

Blazar, D., Braslow, D., Charalambous, C. Y. y Hill, H. C. (2017). Attending to general and mathematics-specific dimensions of teaching: exploring factors across two observation instruments. *Educational Assessment, 22*(2), 71–94. https://doi.org/10.1080/10627197.2017.1309274

Bolyard, J. J. y Moyer-Packenham, P. S. (2008). A review of the literature on mathematics and science teacher quality. *Peabody Journal of Education, 83*(4), 509–535. https://doi.org/10.1080/01619560802414890

 BY-NC

Borrego, M., Foster, M. J. y Froyd, J. E. (2014). Systematic literature reviews in engineering education and other developing interdisciplinary fields. *Journal of Engineering Education, 103*(1), 45–76. https://doi.org/10.1002/jee.20038

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985–2994). Middle East Technical University. http://cerme8.metu.edu/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf

Chetty, R., Friedman, J. N. y Rockoff, J. E. (2014). Measuring the impacts of teachers II: teacher value-added and student outcomes in adulthood. *American Economic Review, 104* (9): 2633–2679. https://doi.org/10.1257/aer.104.9.2633

Creemers, B. P. M. (1994). *The effective classroom*. Cassell.

Díaz-Castelazo, C. (2018). La importancia del idioma inglés para el desarrollo y enseñanza de las ciencias. *Revista Eduscientia. Divulgación de la ciencia educativa*, *1*(2), 60–68. https://www.eduscientia.com/index.php/journal/article/view/27

Ekmekci, A., Corkin, D. M. y Fan, W. (2019). A multilevel analysis of the impact of teachers' beliefs and mathematical knowledge for teaching on students' mathematics achievement. *Australian Journal of Teacher Education, 44*(12), 57–80. https://doi.org/10.14221/ajte.2019v44n12.4

Flores-Kanter, P. E. y Medrano, L. A. (2019). Núcleo básico en el análisis de datos cualitativos: pasos, técnicas de identificación de temas y formas de presentación de resultados. *Interdisciplinaria: Revista de Psicología y Ciencias Afines, 36*(2), 203–215. https://www.redalyc.org/journal/180/18060566010/html/

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán, M. M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 204–221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Good, T. L. y Grouws, D. A. (1979). The Missouri Mathematics Effectiveness Project: an experimental study in fourth-grade classrooms. *Journal of Educational Psychology, 71*(3), 355–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.71.3.355

Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* Routledge.

Hemmi, K. y Ryve, A. (2015). Effective mathematics teaching in Finnish and Swedish teacher education discourses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 501–521. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9293-4

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. y Loewenberg Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511, https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hill, H. C., Umland, K., Litke, E. y Kapitula, L. R. (2012). Teacher quality and quality teaching: examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education, 118*(4), 489–519. https://doi.org/10.1086/666380

Holmes, L. y Schumacker, R. (2020). Latent class analysis of teacher characteristics: can we identify effective teachers? *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives, 18*(2), 75–86. https://doi.org/10.1080/15366367.2019.1657350

Kaur, B. (2009). Characteristics of good mathematics teaching in Singapore grade 8 classrooms: a juxtaposition of teachers' practice and students' perception. *ZDM, Mathematics Education, 41*(3), 333–347. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0170-z

BY-NC

Klassen, R. M., Tze V. M. C., Betts, S. M. y Gordon, K. A. (2011). Teacher efficacy research 1998-2009: signs of progress or unfulfilled promise? *Educational Psychology Review, 23*(1), 21–43. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9141-8

Krainer, K. (2005). What is “Good” mathematics teaching, and how can research inform practice and policy? *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(2), 75–81. https://doi.org/10.1007/s10857-005-4766-0

Kyriakides, L. y Creemers, B. P. M. (2008) Using a multidimensional approach to measure the impact of classroom level factors upon student achievement: a study testing the validity of the dynamic model. *School Effectiveness and School Improvement, 19*(2), 183–306. https://doi.org/10.1080/09243450802047873

Kyriakides, L., Creemers, B. P. M. y Antoniou, P. (2009). Teacher behaviour and student outcomes: suggestions for research on teacher training and professional development. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 12–23. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.06.001

Kyriakides, L., Creemers, B. P. M., Antoniou, P. y Demetriou, D. (2010). A synthesis of studies searching for school factors: implications for theory and research. *British Educational Research Journal, 36*(5), 807–830. https://doi.org/10.1080/01411920903165603

Ko, J., Sammons, P. y Bakkum, L. (2014). *Effective teaching.* Education Development Trust. https://www.educationdevelopmenttrust.com/our-research-and-insights/research/effective-teaching

Koopman, M., Thurlings, M. y den Brok, P. (2019). Factors influencing students’ proficiency development in the fraction domain: the role of teacher cognitions and behaviour. *Research Papers in Education, 34*(1), 14–37. https://doi.org/10.1080/02671522.2017.1390595

Liberati, A., Altman, D. G., Tetzlaff, J., Mulrow, C., Gøtzsche, P. C., Ioannidis, J. P. A., Clarke, M., Devereaux, P. J., Kleijnen, J. y Moher, D. (2009). The PRISMA statement for reporting systematic reviews and meta-analyses of studies that evaluate healthcare interventions: explanation and elaboration. *BMJ, 339.* https://doi.org/10.1136/bmj.b2700

Lim, C. S. (2007). Characteristics of mathematics teaching in Shanghai, China: through the lens of a Malaysian. *Mathematics Education Research Journal, 19*(1), 77–88. https://doi.org/10.1007/BF03217450

Lima Díaz, I. (2017). Perspectivas del conocimiento especializado del profesor de matemáticas como elemento de su desarrollo profesional. *Tecné, Episteme Y Didaxis: TED*, (42), 175–191. https://doi.org/10.17227/01203916.6970

Liñán, M. M., Contreras, L. C. y Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12–20). Universidad de Huelva.

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. De Castro Hernández y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 480–530). Universidad de Granada.

Lockwood, J. R., Savitsky, T. D. y McCaffrey, D. F. (2015). Inferring constructs of effective teaching from classroom observations: an application of bayesian exploratory factor analysis without restrictions. *The Annals of Applied Statistics, 9*(3), 1484–1509. https://doi.org/10.1214/15-AOAS833

 BY-NC

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

López-Lujan, E. (2018). Dimensiones para evaluar una buena práctica educativa: el cuestionario sobre competencias del profesorado (CCPES II). *Edetania. Estudios y Propuestas Socioeducativos, 54,* 53–71. https://revistas.ucv.es/index.php/Edetania/article/view/428

Maamin, M., Maat, S. M. y Ikhsan, Z. (2020). A systematic review of teacher factors and mathematics achievement. *Universal Journal of Educational Research, 8*(3), 998–1006. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080334

Martínez-Garrido, C. (2011). 25 investigaciones clave en eficacia escolar. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 15*(3), 149–174. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/20418

Martínez-Garrido, C. (2015). *Investigación sobre Enseñanza Eficaz. Un estudio multinivel para Iberoamérica* [Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid]. Repositorio institucional - Universidad Autónoma de Madrid.

Martínez-Garrido, C. y Murillo, F. J. (2016). Investigación sobre enseñanza eficaz. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 21*(69), 471–499. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662016000200471&lng=es&tlng=

Martínez-Sierra, G. (2014). Good mathematics teaching from Mexican high school students' perspective. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(6), 1547–1573. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9480-2

Miao, Z., Reynolds, D., Harris, A. y Jones, M. (2015). Comparing performance: a cross-national investigation into the teaching of mathematics in primary classrooms in England and China. *Asia Pacific Journal of Education, 35*(3), 392–403. https://doi.org/10.1080/02188791.2015.1056593

Muijs, D., Kyriakides, L., Van der Werf, G., Creemers, B., Timperley, H. y Earl, L. (2014) State of the art - teacher effectiveness and professional learning. *School Effectiveness and School Improvement, 25*(2), 231–256. https://doi.org/10.1080/09243453.2014.885451

Murillo, F. J. y Martínez-Garrido, C. (2018). Factores de aula asociados al desarrollo integral de los estudiantes: Un estudio observacional. *Estudios Pedagógicos, 44*(1), 181–205. https://doi.org/10.4067/S0718-07052018000100181

Murillo Torrecilla, F. J., Martínez Garrido, C. A., y Hernández Castilla, R. (2011). Decálogo para una Enseñanza Eficaz. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 9*(1), 6–27. https://doi.org/10.15366/reice2011.9.1.001

Ngoepe, M. G. (2014). An examination of some instructional practices in selected rural secondary schools. *Mediterranean Journal of Social Sciences, 5*(9), 464–469. https://doi.org/10.5901/mjss.2014.v5n9p464

Opdenakker, M.-C. y Van Damme, J. (2006). Teacher characteristics and teaching styles as effectiveness enhancing factors of classroom practice. *Teaching & Teacher Education: An International Journal of Research and Studies, 22*(1), 1–21. https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.07.008

Ottmar, E. R., Rimm-Kaufman, S. E., Larsen, R. y Berry, R. Q. (2015). Mathematical knowledge for teaching, standards-based mathematics teaching practices, and student schievement in the context of the responsive classroom approach. *American Educational Research Journal, 52*(4), 787–821. https://doi.org/10.3102/0002831215579484

Pang, J. (2009). Good mathematics instruction in South Korea. *ZDM, Mathematics Education* 41, 349–362. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0169-5

Papanastasiou, C. (2008). A residual analysis of effective schools and effective teaching in mathematics. *Studies in Educational Evaluation, 34*(1), 24–30. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2008.01.005

Perry, B. (2007). Australian teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM, Mathematics Education* 39, 271–286. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0032-5

Posner, C. M. (2004). Enseñanza efectiva. Una revisión de la bibliografía más reciente en los países europeos y anglosajones. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9*(21), 277–318. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1005603

Reynolds, D. y Muijs, D. (1999) The effective teaching of mathematics: a review of research, *School Leadership & Management, 19*(3), 273–288. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13632439969032

Sanz Ponce, R. y López Luján, E. (2013). La gestión del aula. En A. Argente Sanz, L. Ballester Pont, E. Llorca Valmaña, E. López Luján, V. Marchante Villanueva, J. M. Mula Benavent, J. Nando Rosales, R. Sanz Ponce y M. Vilata Tamarit (Eds.), *Docencia y práctica educativa. La estilística en la educación* (pp. 85–124). Boreal.

Scheerens, J. y Creemers, B. P. M. (1989). Towards a more comprehensive conceptualization of school effectiveness. En B. P. M. Creemers, T. Peters y D. Reynolds (Eds.), *School effectiveness and school improvement* (pp. 265–278). Routledge. https://doi.org/10.1201/9780203740156

Schumacher, G., Grigsby, B. y Vesey, W. (2015). Determining effective teaching behaviors through the hiring process. *International Journal of Educational Management, 29*(1), 139–155. https://doi.org/10.1108/IJEM-04-2013-0071

Sonnert, G., Sadler, P. M., Sadler, S. M. y Bressoud, D. M. (2015). The impact of instructor pedagogy on college calculus students' attitude toward mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(3), 370–387. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.979898

Teodorović, J. (2011). Classroom and school factors related to student achievement: what works for students? *School Effectiveness & School Improvement, 22*(2), 215–236. https://doi.org/10.1080/09243453.2011.575650

Todd, E. (2005). The influence of teachers' efficacy and beliefs regarding mathematics instruction in the early childhood classroom. *Journal of Early Childhood Teacher Education, 26*(3), 239–257. https://doi.org/10.1080/10901020500369811

Valenčič-Zuljan, M. (2016). Pupil's assessment of teaching and of him/herself as learner – relevant items in the teacher's creation of effective learning environment. *Croatian Journal of Education, 18,* 213–230. https://doi.org/10.15516/cje.v18i0.2219

Van de Grift, W. (2007). Quality of teaching in four European countries: a review of the literature and application of an assessment instrument. *Educational Research, 49*(2), 127–152. https://doi.org/10.1080/00131880701369651

Vanlaar, G., Kyriakides, L., Panayiotou, A., Vandecandelaere, M., McMahon, L., De Fraine, B. y Van Damme, J. (2016). Do the teacher and school factors of the dynamic model affect high- and low-achieving student groups to the same extent? a cross-country study. *Research Papers in Education, 31*(2), 183–211. https://doi.org/10.1080/02671522.2015.1027724

Vasco Mora, D. y Moriel Junior, J. (2022). Conocimiento de los temas. En J. Carrillo Yáñez, M. A. Montes Navarro y N. Climent Rodríguez (Eds.) *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino.* (pp. 35–46). Dykinson. https://doi.org/10.14679/1452

Vélez, E., Schiefelbein, E. y Valenzuela, J. (1994). Factores que afectan el rendimiento académico en la educación primaria. Revisión de la literatura de América Latina y el Caribe. *Revista Latinoamericana de Innovaciones Educativas, 17,* 29–53. https://hdl.handle.net/20.500.12799/4317

 BY-NC

Wang, T. y Cai, J. (2007a). Chinese (Mainland) teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education* 39, 287–300. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0030-7

Wang, T. y Cai, J. (2007b). United States teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM, Mathematics Education 39*, 315–327. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0031-6

Wang, T.-Y. y Hsieh, F.-J. (2017). Taiwanese high school students' perspectives on effective mathematics teaching behaviors. *Studies in Educational Evaluation, 55*, 35–45. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2017.06.001

Wayne, A. J. y Youngs, P. (2003). Teacher characteristics and student achievement gains: a review. *Review of Educational Research, 73*(1), 89–122. https://doi.org/10.3102/00346543073001089

Wong, N. (2007). Hong Kong teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM, Mathematics Education 39*, 301–314. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0033-4

Autores

Yaneth Milena Agudelo-Marín. Secretaría de Educación Municipal de Pereira. Colombia.
yanethm.agudelom@uqvirtual.edu.co

https://orcid.org/0000-0002-1955-8501

Eliécer Aldana-Bermúdez. Universidad del Quindío. Armenia, Colombia.
eliecerab@uniquindio.edu.co

https://orcid.org/0000-0003-1691-2699

Laura Muñiz-Rodríguez. Universidad de Oviedo. Oviedo, España.
munizlaura@uniovi.es

https://orcid.org/0000-0001-7487-5588

BY-NC

Natália Aparecida Valentim Santos, Douglas Daniel,
Elaine Jeremias Pereira Costardi, Everaldo Gomes Leandro

O PENSAMENTO ALGÉBRICO DE SURDOS EM TEMPOS DE PAN-ESCOLA: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

The algebraic thinking of the deaf in pan-school times: challenges and possibilities

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo investigar el pensamiento algebraico de estudiantes sordos en el contexto en el que emerge una pan-escuela y se encuentra en un proceso, aún incierto, de cambio. La investigación se caracterizó por ser de tipo estudio de caso cualitativo y para investigar el pensamiento algebraico, se analizaron las producciones y diálogos de los estudiantes construidos durante las reuniones a partir de propuestas creadas a partir de un juego digital y tareas investigativas. Los resultados encontrados mostraron desafíos y posibilidades al buscar desarrollar y comprender el pensamiento algebraico de personas sordas en una propuesta de enseñanza remota. Se concluyó que existe la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico de las personas sordas en el contexto de una escuela en la pandemia, pero que la creación de materiales y tareas por sí solas no es suficiente, y el trabajo colectivo, el diálogo y los momentos sincrónicos fueron la base para que esto ocurra.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación Matemática*
- *Pensamiento Algebraico para Sordos*
- *Pandemia*
- *Enseñanza a Distancia*
- *Pan-escuela*

ABSTRACT

This research aimed to investigate the algebraic thinking of deaf students in the context of a pan-school that is emerging and undergoing a process of change, which is still uncertain. The research was characterized as a qualitative case study and, in order to investigate algebraic thinking, the students' productions and the dialogues constructed during the meetings were analyzed based on proposals created based on a digital game and investigative tasks. The results found showed challenges and possibilities when seeking to develop and understand the algebraic thinking of deaf students in a

KEY WORDS:

- *Mathematics Education*
- *Algebraic Thinking for the Deaf*
- *Pandemic*
- *Remote Teaching*
- *Pan-school*

CC BY NC

Santos, N. A. V., Daniel, D., Costardi, E. J. P., Leandro, E. G. (2024). O pensamento algébrico de surdos em tempos de pan-escola: desafios e possibilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 205-236. https://doi.org/10.12802/relime.24.2723. Recepción: Mayo 29, 2024 / Aceptación: Febrero 12, 2025.

remote teaching proposal. It was concluded that there is a possibility of developing the algebraic thinking of deaf students in the context of a pan-school, but that the creation of materials and tasks alone is not enough, and collective work, dialogue and synchronous moments were the basis for this to occur.

RESUMO

A presente pesquisa objetivou investigar o pensamento algébrico de estudantes surdos no contexto em que uma pan-escola surge e está em um processo, ainda incerto, de mudança. A pesquisa se caracterizou como qualitativa do tipo estudo de caso e para investigar o pensamento algébrico, analisou-se as produções dos estudantes e os diálogos construídos durante os encontros a partir de propostas criadas com base em um jogo digital e em tarefas investigativas. Os resultados encontrados mostraram desafios e possibilidades ao buscar desenvolver e compreender o pensamento algébrico de surdos em uma proposta de ensino remoto. Concluiu-se que há a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico de surdos no contexto de uma pan-escola, mas que a criação de materiais e tarefas por si só não basta, sendo que o trabalho coletivo, o diálogo e os momentos síncronos foram a base para que isso ocorresse.[1]

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação Matemática*
- *Pensamento Algébrico de Surdos*
- *Pandemia*
- *Ensino Remoto*
- *Pan-escola*

RÉSUMÉ

La présente recherche visait à étudier la pensée algébrique des élèves sourds dans le contexte dans lequel une pan-école émerge et est dans un processus, encore incertain, de changement. La recherche a été caractérisée comme un type d'étude de cas qualitative et pour enquêter sur la pensée algébrique, les productions des étudiants et les dialogues construits au cours des réunions ont été analysés sur la base de propositions créées à partir d'un jeu numérique et de tâches d'investigation. Les résultats trouvés ont montré des défis et des possibilités lorsqu'on cherche à développer et à comprendre la pensée algébrique des personnes sourdes dans une proposition d'enseignement à distance. Il a été conclu qu'il existe une possibilité de développer la pensée algébrique des personnes sourdes dans le contexte d'une école pan-scolaire, mais que la création de matériels et de tâches à elle seule ne suffit pas, et que le travail collectif, le dialogue et les moments synchrones constituent la base de ce projet. que cela se produise.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement des mathématiques*
- *Pensée algébrique pour les sourds*
- *Pandémie*
- *Enseignement à distance*
- *Pan-école*

[1] Pesquisa Aprovada pelo Comitê de Ética - CAAE n.º 47818021.7.0000.5473. Parecer: 4.881.129. Pesquisa financiada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - Campus Registro.

1. O surgimento de uma pan-escola, as aulas de matemática e a preocupação com a aprendizagem de estudantes surdos

> "Haverá um amanhã que anuncie uma pan-escola?" (Miguel & Vianna, 2020, p. 19)

Esse amanhã chegou para nós[2]. Nós, que somos professores, futura professora e intérprete de uma instituição pública federal situada no estado de São Paulo.

Quando os professores Antônio Miguel e Carlos Vianna nos questionaram se haverá esse amanhã, nós já o estávamos vivenciando desde março de 2020. Esta escola já não está no futuro, mas é o contexto ao qual nós trabalhamos todos os dias. Entre a crítica assertiva sobre se há "ensino" de forma remota (Saviani & Galvão, 2021) e às discussões sobre se o que estamos fazendo é Ensino Remoto, Ensino Remoto Emergencial (ERE) ou Educação a Distância (EaD) (Branco & Neves, 2020), nós estávamos produzindo materiais, atualizando ambientes virtuais e refletindo sobre práticas que agora não mais faziam sentido em um contexto de distanciamento social e em um mundo onde o contato com os estudantes é mediado pela tela de um celular ou de um computador.

Nesse cenário, nós, pan-educadores, nos vimos diante da necessidade de formação para lidar com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), assumimos papéis que, em propostas de EaD, são atribuições de diferentes profissionais – tutores, professores conteudistas, técnicos, etc. – e gerimos crises emocionais e materiais de nossos estudantes.

Nesse contexto, as desigualdades se aprofundaram no campo educacional (Lima & Souza, 2020) e as pessoas com deficiência, em particular, se viram em uma pan-escola que, além de tentar resolver todos os desafios que surgiram, precisava garantir a sua inclusão. Porém, concordamos que a pandemia somente evidenciou "problemas graves já existentes na educação e na sociedade, ressaltando como as pessoas com deficiências têm sido frequentemente excluídas" (Nunes et al., p.46).

Em 2021 ingressaram em nossa instituição, no primeiro ano do Ensino Médio, três estudantes surdos. Diante de todo esse contexto, não queríamos que as aulas de matemática se tornassem um fator que reafirmasse e aprofundasse essa exclusão. Começamos a refletir sobre os processos de ensino e de aprendizagem de matemática desses estudantes em uma pan-escola e algumas inquietações

[2] O texto desta pesquisa está na primeira pessoa do plural para indicar que a investigação foi desenvolvida de maneira colaborativa e o texto construído por diversas mãos.

 CC BY-NC

iniciais surgiram: Como ensinar e aprender matemática para estes estudantes em tempos de pandemia? Como possibilitar o desenvolvimento de um dos tipos de pensamento mais complexos, o pensamento algébrico, objeto de estudo central no primeiro ano do Ensino Médio?

Tentamos compreender melhor essas perguntas. Identificamos que os estudantes necessitavam aprender conceitos "antecedentes", no currículo, ao desenvolvimento de um pensamento algébrico, conceitos relacionados ao campo da aritmética.

Assim, reelaboramos a proposta da disciplina para responder a essa demanda, mas sabíamos que um trabalho concomitante à disciplina poderia ser feito, por entendermos, assim como Souza (2004), que a aritmética não precede a álgebra, mesmo porque há na aritmética um carácter potencialmente algébrico (Mestre & Oliveira, 2012). Buscamos assim, por meio de uma pesquisa, organizar outros momentos que possibilitassem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Destas constatações e destes entendimentos surge esta pesquisa. Objetivamos investigar o pensamento algébrico de estudantes surdos no contexto em que uma pan-escola surge e está em um processo, ainda incerto, de mudança. Para alcançar o objetivo traçado, procuramos responder a seguinte questão de pesquisa: Que desafios e possibilidades existem em busca do desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes surdos do primeiro ano de um curso técnico integrado ao Ensino Médio?

Com essa pergunta como sul, estruturamos esse texto nas quatro partes a seguir: (i) O pensamento algébrico de surdos: relações entre pensamento e linguagem; (ii) Delimitando caminhos metodológicos da pesquisa; (iii) Desafios e possibilidades: práticas que auxiliam no desenvolvimento e na compreensão do pensamento algébrico de surdos; (iv) Algumas considerações.

2. O pensamento algébrico de surdos: relações entre pensamento e linguagem

> Pode-se dizer que o domínio de uma língua estrangeira eleva tanto a língua materna da criança a um nível superior quanto o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, permitindo entender qualquer operação matemática como caso particular de operação de álgebra, facultando uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos. (Vigotski, 2001, p. 265)

Pesquisar o pensamento de uma pessoa tem seus desafios, assim como Vigotski já nos mostrou em suas pesquisas. O pensamento que é mediado e expresso pela linguagem faz com que as pessoas possam compreender o que se passa no mundo interior dos outros. Para Vigotski (2001), por exemplo, esse processo de externalização do pensamento está no que ele chama de campo do "pensamento verbalizado". Esse campo "não esgota todas as formas de pensamento nem de linguagem. Há uma vasta área do pensamento que não mantém relação direta com o pensamento verbal" (Vigotski, 2001, p. 139). Por sua vez, as estruturas da linguagem que o sujeito domina tornam-se estruturas básicas para o pensamento na visão de Vigotski (2001), há assim uma retroalimentação quando o desenvolvimento do pensamento e das linguagens interior e exterior do indivíduo ocorrem.

No vasto campo de estudo sobre pensamento e linguagem, há ainda quem acrescente à palavra pensamento um complemento, é o caso dos estudos em Educação Matemática que investigam o pensamento denominado de "algébrico". Conceitualmente, esse tipo de pensamento é entendido de maneiras distintas pelos pesquisadores (Almeida & Santos, 2017).

O pensamento algébrico surge na medida em que os seres humanos percebem padrões, estabelecem relações entre as coisas e percebem a fluência e impermanência das coisas, como quando um aluno, no primeiro ano do Ensino Médio é apresentado ao conceito de função - algo está em função de outro, algo muda quando outra coisa se modifica. A partir do entendimento de tais relações, o pensamento algébrico se desenvolve como uma atividade exclusivamente humana e as generalizações vão sendo estabelecidas por meio de diferentes linguagens (Kaput, 2008).

Pensar algebricamente liberta o sujeito das limitações existentes das operações estáticas com os números. Para Radford (2011), por exemplo, o pensamento algébrico está relacionado às quantidades indeterminadas e seu tratamento se dá como se fossem conhecidas. As operações da aritmética feitas com valores conhecidos são generalizadas na álgebra ao realizarmos as operações com valores desconhecidos como se fossem conhecidos. Van de Walle (2009) complementa essa ideia ao afirmar que:

> O Pensamento algébrico ou Raciocínio algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função. (p. 287)

Cabe chamar atenção que a utilização de um sistema de símbolos faz parte do longo processo de desenvolvimento do pensamento algébrico e, mais

 CC BY-NC

especificamente, de expressão desse pensamento. Porém, “o foco atual do ensino de álgebra está no tipo de pensamento e raciocínio que prepara os alunos a pensar matematicamente em todas as áreas da Matemática” (Van de Walle, 2009, p. 287). Isso quer dizer que há uma fronteira entre o desenvolver o pensamento algébrico e utilizar com competência os simbolismos e o utilizar um simbolismo algébrico sem compreensão.

O simbolismo matemático da álgebra objetiva, nessa perspectiva, uma forma de expressão do pensamento para outros sujeitos e para si mesmo. O simbolismo auxilia a organizar o pensamento, ajuda a compreender melhor, a analisar com mais cuidado as ideias e generalizações desenvolvidas pelos sujeitos. Souza (2004), ao compreender o simbolismo em um viés histórico, argumenta que:

> Na gestação do simbolismo, o conteúdo do pensamento não é a simbologia em si, mas sim, a escrita de movimentos que se apresentam na realidade das civilizações. Por esse motivo, o conteúdo é humano, embora sua simbologia esteja muito distante do humano, do movimento que se quer descrever. (p. 102)

Dessa maneira, não se pode limitar a álgebra ao seu simbolismo atual; ao fim de um processo histórico que culminou no desenvolvimento lógico dos conceitos algébricos. Aprender álgebra pressupõe pensar algebricamente (Ponte et al., 2009) e os simbolismos, sejam quais forem, são os instrumentos necessários para apoiar e comunicar o pensamento algébrico (Godino & Font, 2003).

A questão do simbolismo é importante para nós dado que esta pesquisa tem como participantes estudantes surdos. Para eles, simbolizar ao fazer matemática pressupõe a utilização de recursos visuais e motores. O pensamento algébrico de surdos se expressa por meio desses recursos. Essa característica faz com que a compreensão sobre como esses sujeitos pensam algebricamente se complexifique para nós, pesquisadores ouvintes.

Para Fernandes e Healy (2013, p. 353) “as línguas de sinais, consideradas as línguas naturais dos surdos, utilizam tanto recursos visuais como motores, ao passo que nas línguas orais predomina o sistema sensorial”. Mesmo nas tarefas em que se pede para que o aluno surdo registre por escrito, a compreensão sobre as resoluções pode necessitar de uma explicação por meio da língua de sinais.

Quanto mais a pessoa surda desenvolve o pensamento algébrico, maior a chance de utilizar e entender um tipo de linguagem formal. No entanto, estudantes surdos podem desenvolver um tipo de pensamento algébrico em que uma linguagem matemática formal não esteja presente, dado que utilizam as línguas de sinais como língua materna e, algumas vezes, os símbolos matemáticos formalizados não têm uma tradução nessas línguas ou não são conhecidos pelos estudantes.

O desafio consiste em desenvolver o pensamento ao mesmo tempo em que se desenvolve a compreensão dos simbolismos matemáticos presentes nos objetos algébricos como sequências, funções, equações e inequações. Construir sentidos para os símbolos é primordial ao desenvolvimento do pensamento algébrico, não somente para estudantes surdos, mas para todos.

Blanton e Kaput (2005) salientam que o pensamento algébrico é o processo em que alunos generalizam ideias matemáticas, estabelecem essas generalizações através da argumentação e expressam essas generalizações de forma gradual por meio de uma maneira simbólica de acordo com sua idade. Concordamos com os autores e complementamos que a idade não é o único fator para expressar as generalizações por meio de simbolismos. Um outro fator é a maneira como o pensamento se expressa por meio de diferentes linguagens e línguas[3].

As pesquisas de Fernandes e Healy (2013; 2016) já nos indicaram que o pensamento algébrico de surdos se expressa de maneiras próprias. Um exemplo é como quando as autoras percebem que uma estudante surda compreende o conceito de variável e, ao expressar seu entendimento, faz o sinal em Libras da palavra "segredo", dando a entender que variável é um número segredo (Fernandes & Healy, 2016).

Nesse sentido, os simbolismos se modificam a partir da linguagem e da língua que se utiliza. O pensamento algébrico é um tipo de reflexão e ação cultural (Radford, 2011) e a estrutura de linguagem que o sujeito domina influenciará e moldará a forma de se expressar algebricamente com seus simbolismos próprios.

Fiorentini et al. (2005), por exemplo, entendem que o desenvolvimento do pensamento algébrico passa por três fases: (i) fase pré-algébrica; (ii) fase de transição e; (iii) pensamento algébrico mais desenvolvido. Entendemos que o simbolismo aparece nas três fases, mas as compreensões sobre eles são distintas dependendo da fase em que o estudante se encontra. Na fase pré-algébrica, por exemplo, Fiorentini et al. (2005) argumentam que se utiliza algum símbolo alfanumérico, mas não é entendido como número generalizado. Na fase de transição o aluno aceita que o simbolismo, ao ser utilizado, representa um número qualquer e faz algumas generalizações. Por fim, na fase de um pensamento algébrico desenvolvido o estudante se expressa genericamente, entende o conceito de variável, se expressa por escrito e opera com os simbolismos.

[3] O termo linguagem é usado nesta pesquisa de forma ampliada como maneira de interação social entre as pessoas (Bakhtin, 1997; 2006; Geraldi, 1984). O termo língua é utilizado quando se retende referir a um conjunto específico de elementos verbais e não verbais: a esse fenômeno social e historicamente desenvolvido que possibilita a comunicação, como é o caso da Libras.

 CC BY-NC

As compreensões teóricas sobre pensamento algébrico sugerem um caráter ampliado de entendimento que não só se limita ao simbolismo. Essa compreensão ampliada encontramos na pesquisa de Radford (2010a) na medida em que entende que o pensamento algébrico se caracteriza por três elementos: a indeterminação, a denotação e a analiticidade. Os simbolismos ou o sistema semiótico utilizado estão relacionados ao que Radford (2010a) chama de denotação. Para Fernandes e Healy (2016) a denotação se refere ao uso de um sistema semiótico adequado que apoia as outras duas características, a indeterminação e a analiticidade. Porém a denotação não envolve somente o uso de padrões alfanuméricos, sendo que o pensamento pode ser denotado por meio de gestos, sinais não convencionais ou uma mistura deles (Radford, 2014). Os(as) outros(as) dois(duas) elementos / características se relacionam a um sentimento de indeterminação e a uma forma de agir analiticamente com objetos indeterminados (Fernandes & Healy, 2013).

Os três elementos característicos do pensamento algébrico apresentados por Radford (2010a; 2014) aparecem e reaparecem quando os estudantes realizam tarefas e dialogam sobre os conceitos da álgebra. Isso só acontece quando os estudantes estão em uma zona, denominada por Radford (2010b), de *zone of emergence of algebraic thinking* (zona de emergência do pensamento algébrico). Nessa zona os estudantes têm a possibilidade de pensar algebricamente e desenvolver o sentimento de indeterminação, a forma de agir analiticamente e a maneira de se expressar denotativamente.

Nesta pesquisa nos apoiamos teoricamente nas discussões trazidas ao longo desse tópico, entendendo o pensamento algébrico de maneira ampla e que não se limita somente à utilização dos simbolismos, em especial de simbolismos alfanuméricos. Buscamos criar momentos de diálogo com os estudantes surdos em que essa zona, não física, de emergência do pensamento algébrico pudesse ocorrer em um contexto de distanciamento social e de pan-escola. No tópico a seguir discorremos sobre o percurso metodológico da pesquisa e os caminhos escolhidos para alcançar o objetivo traçado inicialmente.

3. Delimitando caminhos metodológicos da pesquisa

Para investigar o pensamento algébrico de estudantes surdos no contexto em que uma pan-escola surge e está em um processo, ainda incerto, de mudança, tínhamos em nossa frente características materiais que moldaram algumas das escolhas feitas para o desenvolvimento desta pesquisa.

A principal característica é a própria pandemia e suas influências no campo educacional. Nossa instituição parou em março de 2020 e precisamos de quatro meses para nos reestruturarmos para o retorno às aulas. O desenvolvimento da pesquisa ocorreu ao longo de 2021 e nesse período já contávamos com um ambiente virtual (Moodle) organizado para as aulas de matemática, contávamos com a intérprete que nos acompanhava nas aulas síncronas e dispúnhamos da tradução para Libras dos materiais desenvolvidos pelo professor de matemática da turma e disponibilizados no YouTube[4].

A instituição também ofertou computadores aos estudantes que precisavam e a pesquisa se iniciou nesse contexto. As aulas com a turma inteira se deram de forma assíncrona. Ou seja, todos os estudantes da classe tinham a mesma aula, porém avaliamos que os estudantes surdos necessitavam de tempos extras de forma síncrona para discussão das temáticas das aulas planejadas para todos. Os materiais utilizados nas aulas foram pensados para os estudantes surdos e ouvintes, mas o tempo de desenvolvimento da aula era diferente para os estudantes ouvintes e os estudantes surdos. Decidimos por tempos de aula distintos devido à avaliação diagnóstica realizada no começo do ano e à dinâmica própria das aulas síncronas[5]. Somente os estudantes surdos constituíram nossos sujeitos de pesquisa dado o objetivo posto.

Para alcançar o objetivo traçado, a investigação se delimitou como qualitativa do tipo estudo de caso (Lüdke & André, 1986). O caso definido para investigação está relacionado ao ensino e à aprendizagem de surdos no contexto específico da Pandemia. Os sujeitos da investigação são três estudantes surdos do Ensino Médio Técnico de um Instituto Federal. Entendemos que nossa investigação se constitui um estudo de caso também pelas seguintes características: (i) os dados foram construídos e registrados ao longo da aula do próprio professor regente - ambiente natural - e interpretados levando em conta seu contexto; (ii) buscamos uma nova descoberta em relação à temática estudada - pensamento algébrico de surdos; (iii) retratamos a realidade da forma mais profunda e ampliada que conseguimos; (iv) nos apoiamos em diversas fontes de informação sobre a temática; (v) refletimos sobre os diferentes pontos de vistas dos sujeitos que participaram da pesquisa - estudantes, intérprete, professores e bolsista de iniciação científica e; (vi) escrevemos os relatos de pesquisa de forma descritiva, a partir de uma análise situada e em profundidade, com a finalidade de que tal estudo possa auxiliar outros professores da Educação Básica e pesquisadores interessados no assunto.

---

4 Link do canal: https://www.youtube.com/channel/UCwAKth9faujoMu3EowCNbkw

5 A avaliação constatou que vários conteúdos do Ensino Fundamental não foram vistos ou aprendidos pelos estudantes surdos e, dessa maneira, a dinâmica da aula precisou ser revista para que os estudantes pudessem aprender e acompanhar o curso técnico escolhido por eles: Técnico Integrado em Mecatrônica.

 CC BY-NC

Durante os encontros com os estudantes surdos prezamos pelo diálogo para compreendermos os sentidos e significados que eles tinham e estavam construindo sobre os conceitos aritméticos, geométricos e algébricos visto ao longo do ano.

Esta pesquisa construiu seus dados ao longo de cinco encontros com os estudantes ao tratar de conceitos relacionados ao campo da álgebra. Nós, os pesquisadores - professor regente, professor colaborador, intérprete e bolsista de iniciação científica - nos reunimos previamente para planejar os encontros e decidir quais características do pensamento algébrico seriam priorizadas. Durante os encontros com os estudantes, realizados pelo *GoogleMeet*, gravamos as reuniões e fizemos anotações. Depois dos encontros descrevemos o que ocorreu, indicamos o que nos surpreendeu e o que poderíamos ter feito diferente e elaboramos narrativas de aula em que refletimos sobre nossas práticas. Esse processo se repetiu após cada encontro com os estudantes.

Por sua vez, a intérprete teve papel decisivo para o desenvolvimento da pesquisa. A intérprete fez parte da pesquisa também como orientadora da bolsista, indicou textos sobre Libras e Educação Inclusiva, auxiliou nas decisões tomadas, orientou os professores sobre os materiais produzidos, pesquisou sobre os termos matemáticos que seriam tratados nas aulas, assumiu uma postura de indicar aos outros pesquisadores quando os estudantes não entendiam os conceitos e buscou explicar de diferentes maneiras os conceitos que faziam sentido para ela no momento da aula.

Os participantes da pesquisa cursavam o primeiro ano do Ensino Médio em uma instituição federal situada no Vale do Ribeira no estado de São Paulo em 2021. Nesta investigação os denominamos pelos nomes fictícios Pedro, Bruno e Ítalo. No momento da pesquisa, Bruno e Pedro tinham 16 anos, enquanto Ítalo tinha 15 anos. Bruno e Pedro residiam na mesma cidade em que se encontrava a instituição, enquanto Ítalo morava em uma cidade próxima. Os três estudantes indicaram que gostam e compreendem matemática, mas a avaliação diagnóstica constatou que os conhecimentos se limitavam às três operações da aritmética - adição, subtração e multiplicação. Outros conteúdos do Ensino Fundamental (divisão, geometria, fração, conjuntos numéricos, potenciação, sequências, equações etc) não dominavam ou nunca tinham visto. Mesmo não estudando juntos ao longo do Ensino Fundamental, os estudantes indicaram dificuldades semelhantes.

Os dados construídos e analisados a seguir partem dos resultados da avaliação diagnóstica e dos documentos internos da instituição e baseiam-se nos diálogos criados com os estudantes e aos dados documentais elaborados (tarefas desenvolvidas pelos estudantes, narrativas de aula produzidas pela bolsista de iniciação científica e fichamentos de textos teóricos estudados pelos pesquisadores). Buscamos assim criar uma análise multidimensional do caso (Lüdke & André, 1986). Para a análise dos dados decidimos não criar categorias, mas uma narrativa em que trazemos o movimento da pesquisa que possibilita uma compreensão que entendemos ser mais profunda sobre a realidade apresentada em tempos de pan-escola. Nessa narrativa, apresentamos e refletimos sobre os desafios e possibilidades surgidos nas práticas desenvolvidas.

4. Desafios e possibilidades: práticas que auxiliam no desenvolvimento e na compreensão do pensamento algébrico de surdos

Ao mostrar o movimento da pesquisa, pretendemos indicar que nossos planejamentos foram se modificando e se moldando a partir das respostas e diálogos que tínhamos dos/com os estudantes. Assumimos uma postura de refletir sobre nossas práticas e identificar pontos que precisavam ser melhorados e reelaborados. Essa dinâmica de reflexão se traduz nos três tópicos a seguir. Os tópicos são os três movimentos da pesquisa que fizemos ao longo de 2021 com o intuito de desenvolver e compreender o que chamamos de multilateralidade do pensamento algébrico. Entendemos por multilateralidade do pensamento algébrico as complexas facetas existentes deste tipo de pensamento que auxiliam a resolver diferentes tipos de problemas.

4.1. *A escolha de um jogo e a compreensão de que o pensamento algébrico é multifacetado*

Com a pandemia e o ensino remoto como contextos, questionamos, logo antes do primeiro encontro com os estudantes, como nosso diálogo com eles poderia ser iniciado? Que tarefas poderiam mediar esses encontros? Que tarefas nos ajudariam a compreender e desenvolver o pensamento algébrico de estudantes que dominam uma outra língua? Que situações potencializariam o desenvolvimento do pensamento dos estudantes ao se expressarem em Libras?

Sabíamos que os estudantes surdos estavam em níveis distintos de compreensão de leitura e de escrita em Português e de domínio da Libras. Bruno compreendia sentenças simples em português e conseguia entender parcialmente problemas matemáticos na sua forma escrita. Bruno também conseguia se expressar em Libras e compreendia a intérprete e as intervenções dos professores e da bolsista. Pedro e Ítalo não conseguiam dar sentidos às mesmas sentenças e

 CC BY-NC

problemas e a comunicação por meio da língua de sinais era comprometida devido ao domínio que tinham. Em um documento interno, em que foi traçado o perfil de um desses estudantes, no momento de sua entrada na instituição, foi descrito, por exemplo, que:

> considera-se o seguinte perfil do aluno: *domínio insuficiente da língua portuguesa para leitura e escrita; domínio intermediário da língua de sinais para produção e compreensão de enunciados*; pouco domínio e compreensão em relação ao uso das tecnologias em nível básico; lacunas historicamente situadas no percurso educacional que impactaram diretamente na aquisição de conhecimentos básicos atrelados aos diversos campos disciplinares. (excerto de um documento interno do projeto, marcação dos pesquisadores).

Dadas essas características dos estudantes, buscamos nesse primeiro momento planejar as aulas com materiais que privilegiassem os aspectos visuais em detrimento do texto escrito em Português. Entendíamos que as aulas de matemática poderiam auxiliar na leitura e escrita desses estudantes, mas como essa pesquisa queria compreender o pensamento e sabíamos que o pensamento desses estudantes se expressava melhor por meio da língua de sinais, optamos por esses materiais visuais nesse primeiro momento.

Concordamos que os jogos digitais poderiam ser esses materiais com aspectos visuais. Encontramos no trabalho de Viana e Barreto (2011, p. 19) a sugestão de que "é importante, então, que o professor proporcione, aos alunos surdos, ambientes de aprendizagem ricos em estimulação visual". As autoras defendem que a pedagogia que se busca no trabalho com estudantes surdos é a Pedagogia Visual e que "os jogos e brincadeiras trazem, em sua composição, recursos visuais que chamam a atenção e podem aguçar a curiosidade" (Viana & Barreto, 2011, p. 10). Por outra mirada, concordamos que ainda as escolas ainda não consideram as possibilidades das TDIC [Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação] na educação de surdos, mesmo que existam pesquisas, como a de Stumpf (2008), que indicam que as TDIC oportunizam a comunicação com estudantes surdos e se constituem como ferramenta pedagógica para uma Pedagogia Surda.

Disto, selecionamos o jogo digital *Math Riddles*. O jogo *Math Riddles*[6] é desenvolvido em níveis (ou fases) onde, em cada um deles, é apresentado um desafio matemático de forma visual, assim o jogador deve responder corretamente o valor numérico esperado na fase indicada. Se o valor for o correto, o jogador passa para o próximo nível, caso contrário, o jogador permanece no mesmo nível até que resolva o que se pede.

---

6 Link do Jogo: https://apps.apple.com/br/app/math-riddles-and-puzzles/id1455734504

Fizemos um primeiro encontro com os estudantes para que conhecessem o jogo. Tínhamos como desafio a constituição de um espaço em que o diálogo e a escuta ocorressem. Os estudantes já estavam acostumados com esse tipo de espaço nas aulas do professor regente e já estavam à vontade para expressarem dúvidas, pois já tinham uma relação construída com a intérprete de Libras e com o professor. Porém, duas outras pessoas seriam apresentadas ao estudante, o professor colaborador e a bolsista de iniciação científica. Queríamos que esse ambiente construído não se perdesse e que os alunos ficassem à vontade para se expressarem com todos os presentes nos encontros através do *GoogleMeet*. O jogo, por suas características relacionadas à socialização, poderia nos ajudar nesse desafio de constituição de um espaço em que o diálogo ocorresse de maneira livre.

Como primeira ação, pedimos para os estudantes realizarem o *download* do jogo nos seus aparelhos e tínhamos como objetivo que eles se familiarizassem com o jogo, reconhecessem as suas regras e jogassem despretensiosamente - o jogo pelo jogo - (Grando, 2007). Na etapa do jogo pelo jogo o objetivo é que os estudantes joguem despretensiosamente e garantam a compreensão das regras (Grando, 2007). Assim, pedimos para os estudantes jogarem os dois níveis iniciais (Figura 1) para percebermos se entenderam a dinâmica do aplicativo.

(a)	(b)
4, 8, 16, ?	$2 + 2 \times 2 = ?$

Nota: (a) Nível 1 e (b) Nível 2

Figura 1. Níveis Iniciais do Math Riddles

Optamos por dialogar com os estudantes sempre que ultrapassavam os níveis solicitados ou surgiam dúvidas. Isso ocorreu devido às limitações das aulas síncronas com surdos. Quando os alunos abaixavam a cabeça para registrarem algo no papel, não conseguíamos chamá-los de volta e a estratégia utilizada por nós era a gesticulação com as mãos, muitas vezes ineficiente para chamar atenção dos estudantes.

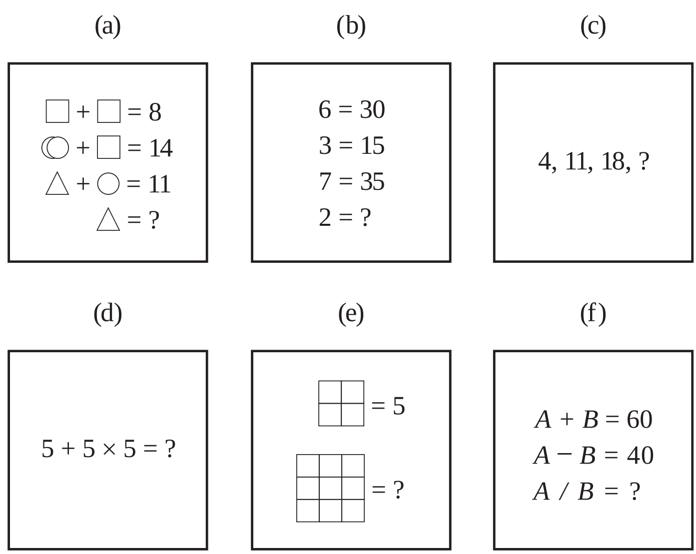
Nos dois primeiros níveis apresentados na Figura 1 estão, respectivamente, um nível relacionado ao conceito de sequência numérica e outro relacionado à

 CC BY-NC

ordem das operações aritméticas de adição e multiplicação. O jogo faz a opção por utilizar o sinal de interrogação “?” para indicar que há um sucessor na sequência e isso não causou dúvidas aos estudantes. No nível 2, o problema é basicamente aritmético, o que nos fez pensar que em um momento posterior ao jogo pelo jogo, nossas intervenções pedagógicas verbais (Grando, 2007) precisariam de intencionalidade e atenção aos pensamentos e expressões realmente algébricos.

Mesmo que o primeiro nível (Figura 1b) possa ser entendido como uma sequência, não percebemos no diálogo com os estudantes todos os elementos que caracterizam o pensamento algébrico, como os apresentados por Radford (2010a): denotação, indeterminação e analiticidade. Há um sentimento de indeterminação ao ter que encontrar o número correspondente à “?” e uma forma de agir analiticamente para encontrar o número indeterminado (Fernandes & Healy, 2013), mas a utilização de uma denotação não ficou clara para nós, dado que o simbolismo utilizado “?” parte *a priori* do aplicativo e não é uma construção dos estudantes.

Refletimos que esse elemento também não apareceu devido às nossas próprias intencionalidades com esses dois níveis, que eram a familiarização com o jogo, reconhecimento de regras e o jogo pelo jogo. Continuamos nossas discussões e propomos os níveis seguintes, do 3 ao 8 (Figura 2), com o intuito de perceber como eles se sairiam com outros tipos de padrão.



Nota: Níveis do 3 ao 8. Nível 3 (a); Nível 4 (b); Nível 5 (c); Nível 6 (d); Nível 7 (e); e Nível 8 (f)

Figura 2. Níveis de 3 ao 8 do Math Riddles

CC BY-NC

Esses níveis nos indicaram que há diferentes conceitos tratados no jogo *Math Riddles*, como operações, padrões, sequências e sistemas de equações. Alguns desses conceitos estavam relacionados ainda à figuras geométricas. O jogo nos trazia diferentes características de abordagem do pensamento algébrico. Nesse momento estávamos preocupados com a familiarização com o jogo e em como os estudantes iriam interagir com cada nível. Por exemplo: como eles reagiriam a um problema que está relacionado com o conceito de sistemas (Níveis 3 e 8)? Ou qual seriam seus comentários sobre um problema mais relacionado à identificação de padrões (Níveis 4 e 5, por exemplo)?

Esses conceitos requerem tipos distintos de pensamento em suas resoluções e foi o que apareceu nos registros e nas falas dos estudantes. Pedro e Bruno, por exemplo, conseguiram encontrar o padrão existente no nível 4 (Figura 3) e perceberam a maneira como a indeterminação existente nesse nível se apresentava.

(a) (b)

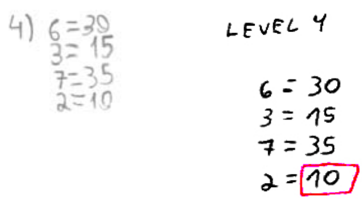


Figura 3. Resolução do Pedro (a) e Bruno (b) do nível 4

Porém, no nível 7 (Figura 2e), o padrão existente se modificou e exigia um outro tipo de pensamento. Se no nível quatro o padrão existente se relacionava com operações entre números separados pelo sinal de "igualdade", no nível 7, o padrão estava relacionado à quantidade de quadrados presentes nas duas figuras apresentadas. No nível 7, o conceito geométrico de quadrado é uma faceta que modifica o tipo de pensamento requerido para resolver esse problema. Essa característica coaduna com a compreensão de Vigotski (2001) quando afirma que pensar algebricamente é entender qualquer operação matemática como caso particular de operações da álgebra e, no nosso caso, a compreensão do movimento de mudança da quantidade de uma figura geométrica plana[7]. Analisamos que por esse motivo, Pedro não teve dificuldades no nível 7, enquanto Bruno, por exemplo externou tal dificuldade:

[7] Vale ressaltar que a resolução do nível 7 não passa apenas pela percepção visual de uma figura, mas também pelo pensamento geométrico e compreensão das características que compõem e definem o conceito de quadrado, algo que também em nossa avaliação diagnóstica não se mostrou ser um conhecimento que os estudantes dominavam.

 CC BY-NC

Intérprete[8]: *Pedro, 1 [fase] passou?*
Pedro: sim.
Intérprete: *2 [fase] passou?*
Pedro: sim.
Intérprete: *6 [fase] passou?*
Pedro: 7 não passei. Difícil. [expressão de dúvida ao falar do nível 7]
Intérprete: *O professor está perguntando. Em cima quantos têm? Tem o quadrado aqui [aponta para a primeira figura do nível 7] e tem o quadrado aqui [aponta para a segunda figura do nível 7], quantos têm em cima?*
Pedro: 4.
Intérprete: *Tem mais, 4 só não tem. Conta, conta.*
Pedro: [fica um tempo pensando e tenta resolver], passei.
Intérprete: *Bruno, passou nível 7?*
Bruno: Não, está difícil esse 7, estou pensando aqui.
Professor colaborador: *quantos quadrados têm?*
Intérprete: *Bruno, o professor está perguntando. Conta, quantos tem? Os quadrados.*
Bruno: 4.
Intérprete: *Tem mais. Conta.*
Bruno: 5. Tem um quadrado grande, então tem cinco quadrados.
Intérprete: *E o debaixo?*
Bruno: 8.
Intérprete: Tem mais. O professor está falando que tem mais.
Bruno: 12.
Intérprete: Digita 12.
Bruno: Está errado, não deu [se volta para o caderno e começa a pensar novamente].

A partir dos níveis discutidos com os estudantes nesse primeiro encontro, percebemos que o pensamento algébrico é multifacetado, que a tarefa que se escolha requer um tipo característico de pensamento, mesmo que o conceito em questão seja o mesmo, por exemplo o reconhecimento de padrões. Essa constatação reforça a afirmação de Van de Walle (2009) quando argumenta que o foco atual do ensino de álgebra está relacionado à preparação dos alunos para pensar matematicamente em todas as áreas da Matemática. Para Ponte (2009) aprender álgebra é aprender a pensar algebricamente e, no caso apresentado, os estudantes surdos precisavam de um conceito geométrico bem delimitado para conseguirem pensar algebricamente sobre o padrão apresentado pelo nível do jogo.

Diante disso, percebemos, após esse primeiro encontro, que precisávamos selecionar com maior intencionalidade os níveis para conseguirmos desenvolver com os estudantes o pensamento algébrico de forma multilateral. Assim,

8 A transcrição foi feita de acordo com o que a intérprete dizia e assim em alguns momentos, quando ela traduzia os estudantes ou sinalizava, ela utilizava ou não artigos e conjugava ou não os verbos. Optamos por manter a fala da intérprete como foi feita nos encontros.

classificamos os níveis do jogo *Math Riddles* em cinco tipos: níveis que abordam o pensamento geométrico em suas conexões com o pensamento algébrico (Figura 4a); níveis que abordam o pensamento aritmético (Figura 4b); níveis que abordam o pensamento funcional (Figura 4c); níveis que abordam padrões e/ou sequências (Figura 4d); níveis que abordam sistemas de equações (Figura 4e).

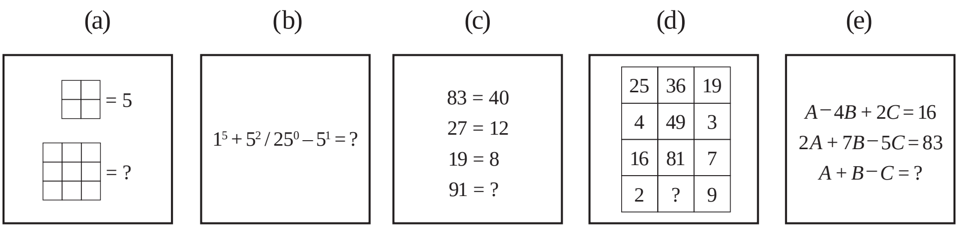


Figura 4. Classificação dos níveis do Math Riddles

Terminamos o primeiro encontro solicitando que os estudantes jogassem um pouco mais em casa e que nos próximos encontros retomaríamos alguns níveis do jogo. Intencionamos começar, no segundo encontro, uma discussão sobre padrões e sequências e então selecionamos os níveis do jogo que nos auxiliariam a discutir tais ideias com os meninos.

4.2. *A mesma fase do jogo, pensamentos distintos sobre padrões e sequências*

A escolha por continuar as discussões com os meninos no segundo encontro em relação aos padrões e sequência se deu pela influência de algumas leituras que fizemos ao longo de 2021 (Fiorentini et al., 2005; Van de Walle, 2009; Fernandes & Healy, 2016). Nessas pesquisas, percebemos que o trabalho com padrões e sequências auxiliaram no desenvolvimento das características do pensamento algébrico. Primeiramente, percebemos que o trabalho com padrões e sequências mostrou claramente como o sentimento de indeterminação aparece, como a forma de agir analiticamente ocorre e como a denotação / simbolismos foram criados e tomaram sentido para os sujeitos (Radford, 2010a). Queríamos que essas três características do pensamento algébrico fossem desenvolvidas a partir das discussões que faríamos com os estudantes.

Retomamos no segundo encontro alguns níveis iniciais do jogo, entre eles o nível 5 (Figura 2c). Como os estudantes ficaram com a tarefa de jogarem em casa e anotarem as resoluções ao longo da semana, recebemos por *WhatsApp* os registros do jogo. Os estudantes conseguiram avançar as fases e jogar com competência (Grando, 2007). Pedro e Bruno já estavam por volta da fase 17 do jogo, enquanto Ítalo estava por volta da fase 12.

 CC BY-NC

No nível 5, os registros de Pedro e Bruno, por exemplo, foram os seguintes.

(a) (b)

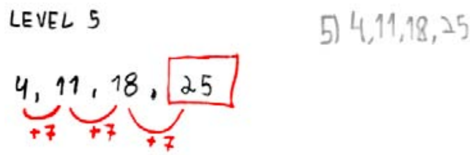


Figura 5. Resolução do Nível 5 de (a) Bruno e (b) Pedro

Inicialmente, ao analisar os registros, não percebemos dificuldades dos estudantes. Pelos registros, percebemos que Bruno coloca em vermelho o padrão identificado (+7), entende a denotação (?) utilizada pelo nível e trabalha com a indeterminação existente, além de agir analiticamente. Pedro também, apesar de não deixar explícito isso em sua resolução. Esse detalhe reafirmou nossa ideia de que, mesmo nas tarefas em que se pede para que o aluno surdo registre por escrito, a compreensão sobre as resoluções pode necessitar de uma explicação por meio da língua de sinais.

No caso do nível 5, percebemos que estava claro o conceito de sequência e a identificação de padrão. Porém, perguntamos aos estudantes sobre qual seria o 8.º termo da sequência sendo que eles sabiam somente os quatro primeiros termos. Nesse momento, a conexão com a internet de Italo caiu, enquanto Pedro e Bruno deram respostas distintas - assinaladas em verde (54) e laranja (53) - e apresentadas abaixo:

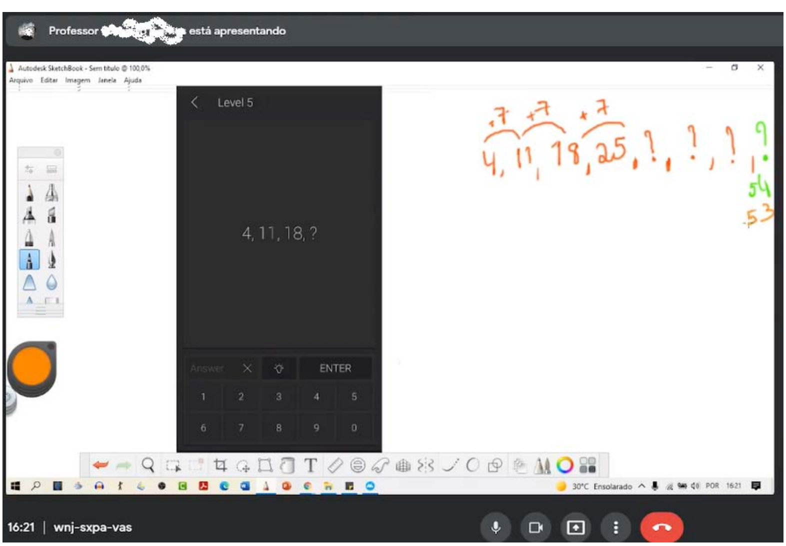
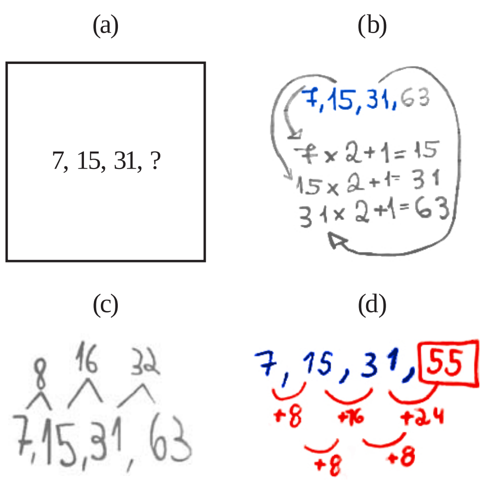


Figura 6. Tela compartilhada com os estudantes

Ao externalizarem seus pensamentos (Vigotski, 2001), percebemos que os estudantes conseguiram agir analiticamente ao fazermos essa intervenção pedagógica verbal sobre uma situação do jogo. Há também a percepção, por parte dos estudantes, da indeterminação na situação apresentada e a compreensão do simbolismo utilizado pelo professor para expressar os sucessivos termos. O que cabe chamar atenção é o fato de Pedro dizer que o 8.º termo é o número 54, enquanto Bruno afirmar ser o número 53. O erro aparece na resolução de Pedro devido a um cálculo mental equivocado, mas não pela falta de uma analiticidade ou de um pensamento algébrico sobre a questão apresentada. Em tarefas que requerem um pensamento algébrico, algumas vezes nós, professores, avaliamos erros procedimentais como sendo "incompreensão" ou "falta" de um pensamento algébrico desenvolvido. Nesse caso, não fizemos essa avaliação em relação à resposta de Pedro e ele mesmo identifica o erro de cálculo quando afirma em seguida: "Errei, errei, Bruno está certo".

Continuamos nossas discussões sobre padrão e sequência utilizando o jogo *Math Riddles* com os estudantes até o fim do segundo encontro e, ao longo do terceiro encontro, sempre retomando as fases e colocando outras situações de jogo. No início do terceiro encontro, apresentamos o nível 18 (Figura 6) do jogo com o objetivo de retomar as discussões realizadas anteriormente.



Nota: (a) Nível 18 e respostas de (b) Ítalo, (c) Pedro e (d) Bruno

Figura 7. Nível 18 do Math Riddles e resoluções

A ideia do nível 18 consistia em encontrar o próximo termo da sequência "7, 15, 31, ?" e alguns dos pensamentos que imaginamos que iriam aparecer *a priori*, considerando a_{n+1} como o termo que se quer encontrar e a_n como o termo anterior, eram:

 CC BY-NC

- $a_{n+1} = a_n + a_n + 1$, ou seja, para encontrar o próximo termo somamos o anterior a ele mesmo e adicionamos uma unidade (por exemplo: 15 = 7 + 7 + 1);
- $a_{n+1} = a_n + (a_n + 1)$, se diferenciando da primeira proposta, pois indica a adição do termo a_n com o seu sucessor (por exemplo: 15 = 7 + 8);
- $a_{n+1} = 2a_n + 1$, ou seja, para encontrar o próximo termo é necessário multiplicar o anterior por 2 e somar 1 unidade (por exemplo: $15 = 2 \cdot 7 + 1$).[9]

Ítalo comentou durante a sua explicação que multiplicou o primeiro número por "2" e analisou que não chegou à resposta, então somou "+1" e verificou que a resposta estava correta (Figura 7b). Pedro, por sua vez, pensou em uma soma do número ao seu sucessor $a_n + (a_n + 1)$ (Figura 7c). Essas duas ideias, que imaginamos *a priori* que surgiriam, apareceram.

Com o compartilhamento das resoluções de Ítalo e Pedro, Bruno ficou com uma expressão de dúvida ao comparar sua resolução com as dos outros dois meninos. Bruno pensou em uma ideia que não deu certo (Figura 7d) se considerarmos o gabarito do jogo, mas o seu raciocínio matemático foi correto se considerarmos o conceito de Progressão Aritmética (PA) de 2.ª ordem.

Ao dialogarmos com Bruno, sugerimos que ele colocasse no *Math Riddles* sua resposta e ele percebeu que não daria certo. Ele ficou mais um tempo pensando e encaminhou o seguinte registro:

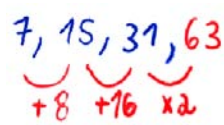


Figura 8. Nova resolução de Bruno para o nível 18

Bruno foi influenciado pelas resoluções dos seus colegas ao compartilharem as suas formas únicas de resolução, talvez por isso tentou, a força, chegar na resposta "correta" utilizando o seu pensamento algébrico próprio. Bruno nos mostrou uma maneira particular de generalizar a partir de números e operações (Van de Walle, 2009), seu raciocínio operou com uma PA de 2.ª ordem e avaliamos ser um pensamento sotisficado, mas que o jogo não considerou.

As dúvidas de Bruno persistiram, pois estava convicto de que seu raciocínio era correto. A confiança demonstrada por Bruno sobre seu pensamento e a reavaliação do caminho escolhido para a solução fez com que percebêssemos a

[9] Não esperávamos tal sistematização dos estudantes, porém para maior compreensão do leitor utilizamos essa notação para expressar pensamentos distintos.

autonomia desenvolvida diante de problemas que não só têm uma única forma de resolução como também não admitem respostas e pensamentos (Fernandes & Healy, 2013; 2016) únicos. Discutimos que os dois caminhos seriam possíveis, apesar de o jogo ter essa limitação e indicar apenas a resolução de Pedro e Ítalo. Ao fim desse terceiro encontro, Bruno refletiu e comentou:

> Bruno: [...] Tem dificuldade, dúvida, a gente troca informações, a gente vê que são jeitos diferentes, formas diferentes de pensar, fazer. Cada um tem uma forma diferente de cada um, de pensamento.

A partir do nível 18, percebemos que os estudantes agiram analiticamente de diferentes formas e perceberam as indeterminações existentes na sequência apresentada. Após o encontro nos reunimos e percebemos que a ideia de denotação poderia ser desenvolvida com os estudantes de maneira mais aprofundada. Observamos que os estudantes registravam utilizando números, talvez pela própria estrutura do jogo. Percebemos que as denotações utilizadas e os simbolismos que apareciam eram provenientes do jogo e não uma criação própria dos estudantes.

Nesse sentido, para nossos quarto e quinto encontros, refletimos que esse jogo e a forma de utilizá-lo tinham suas limitações. Dessa forma, avaliamos que as tarefas investigativas poderiam ser uma saída para aprofundarmos nossas discussões sobre o simbolismo algébrico e como ele auxilia nas generalizações e no trabalho com quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas (Radford, 2011; Van de Walle, 2009).

4.3. *Em busca do desenvolvimento da denotação por meio de tarefas investigativas*

Ao concordarmos que as estruturas da linguagem que o sujeito domina tornam-se estruturas do pensamento (Vigotski, 2001), queríamos que os estudantes identificassem e criassem estruturas próprias para pensar sobre uma indeterminação ou valores desconhecidos. No nosso caso, continuamos a discussão com a ideia de sequência e, assim, buscamos criar momentos em que os estudantes pudessem identificar termos desconhecidos da sequência, encontrar padrões e posteriormente generalizar para toda a sequência. Desejávamos que os estudantes se afastassem da dureza da ideia de número e caminhassem para um entendimento generalizado de um termo qualquer de uma sequência.

Optamos por criar uma tarefa investigativa que apresentava sequências figurais em detrimento das numéricas, como as presentes no jogo *Math Riddles*. Entre as tarefas criadas estavam:

 CC BY-NC

1) Observe a sequência de bolinhas e responda o que se pede:

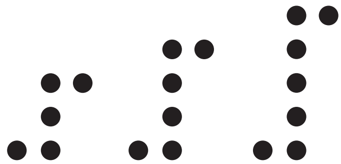


Fig 1 Fig 2 Fig 3

a) Desenhe a figura 4.

b) Sem desenhar, responda quantas bolinhas existem na figura 6.

c) Preencha a tabela a seguir com a quantidade de bolinhas de cada figura:

Figura	Quantidades de Bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

d) Há algum padrão entre as colunas da tabela, qual?

2) Observe a sequência de bolinhas abaixo e responda:

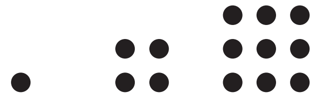


Fig 1 Fig 2 Fig 3

a) Desenhe a figura 7.

b) Sem desenhar, quantas bolinhas há na 10º figura?

c) Construa una tabela como a presente na atividade 1 (faça a tabela até a 10º figura).

d) Qual o padrão da sequência?

Figura 9. Tarefas Investigativas

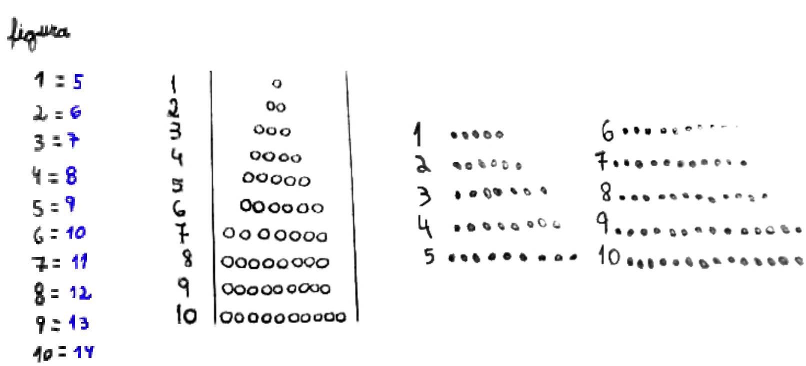
Com essas duas tarefas investigativas queríamos que os estudantes compreendessem a necessidade de uma denotação para termos grandes das sequências. Nos momentos que criamos para o diálogo com os estudantes, percebemos que nessa zona, não física, de emergência do pensamento algébrico (Radford, 2010b) tínhamos proporcionado momentos de desenvolvimento de outras características do pensamento algébrico, como a compreensão da indeterminação e as reflexões sobre as múltiplas formas de analisar as situações apresentadas. Essas duas características podem ou não se apoiar na rigidez dos números, no nosso caso esse apoio aconteceu.

Buscávamos agora a compreensão sobre a generalização, o entendimento do simbolismo alfanumérico como número generalizado e a operacionalização com o simbolismo criado (Fiorentini et al., 2005).

Para que conseguíssemos o que buscávamos, a tarefa foi construída de uma forma que os enunciados fossem diretos e com poucos termos, facilitando a leitura dos estudantes. Ainda assim, discutimos com eles cada enunciado e tiramos dúvidas sobre termos que talvez fossem desconhecidos por eles. Em todos os momentos a comunicação se deu através da intérprete de Libras traduzindo os enunciados, mesmo que curtos, e auxiliando nas possíveis dúvidas de interpretação. Selecionamos alguns fragmentos da tarefa que indicam o movimento da pesquisa em busca da generalização e do entendimento da ideia de denotação.

O primeiro fragmento se relaciona ao preenchimento da tabela na tarefa 1[10]:

(a) (b) (c)



Nota: Tabela da tarefa 1 de (a) Bruno, (b) Ítalo e (c) Pedro

Figura 10. Tarefas de Bruno, Ítalo e Pedro

Os três estudantes registram de maneiras distintas a tabela da tarefa 1. Bruno optou por preencher de uma forma semelhante a apresentada no jogo Math Riddles. Ele anotou a quantidade de bolinhas depois de contá-las. Ítalo e Pedro escolhem representar na segunda coluna da tabela as próprias bolinhas. Uma característica desta representação feita pelos dois é que a estrutura de cada figura da sequência é desfeita ao colocar as bolinhas uma após a outra. Essa característica talvez possa fazer com que a identificação do padrão se torne difícil.

Após o preenchimento da tabela perguntamos aos estudantes se existia algum padrão / relação entre as colunas da tabela. Eles pensaram e não conseguiram perceber tal padrão. Nesse momento, esperávamos que eles falassem algo como "é o número da figura somado 4". Isso não ocorreu. Porém, fizemos um segundo questionamento: "Quantas bolinhas existirão na 50.ª figura?". A partir desse

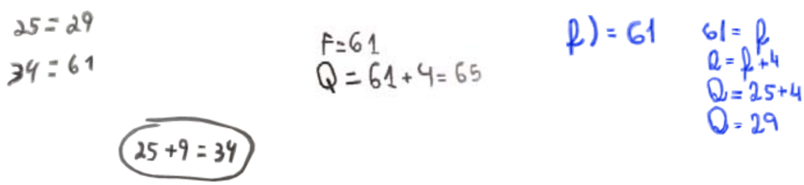
[10] Escolhemos analisar a tabela devido ao fato de que avaliamos que as questões anteriores da tarefa 1 foram respondidas tranquilamente pelos estudantes, dado que os encontros anteriores focaram no desenvolvimento da percepção da indeterminação e da analiticidade.

 CC BY-NC

questionamento poderíamos perceber se foi a maneira como perguntamos que não contribuiu para que eles respondessem ou se foi realmente uma incompreensão sobre o padrão da sequência. Pedro respondeu 54, nos mostrando que talvez a comunicação entre nós e eles não ficou clara no primeiro questionamento.

Nesse momento do encontro iniciamos a introdução do simbolismo alfanumérico, por entender que a percepção de padrão estava compreendida pelos estudantes. Relacionamos as colunas da tabela por $Q = F + 4$, onde Q é a quantidade de bolinhas e F é a figura correspondente na sequência. Discutimos os significados dos simbolismos alfanuméricos e como eles são os instrumentos que apoiam o pensamento e a comunicação (Godino & Font, 2003) e pedimos que o padrão criado fosse utilizado (Figura 11).

(a) (b) (c)



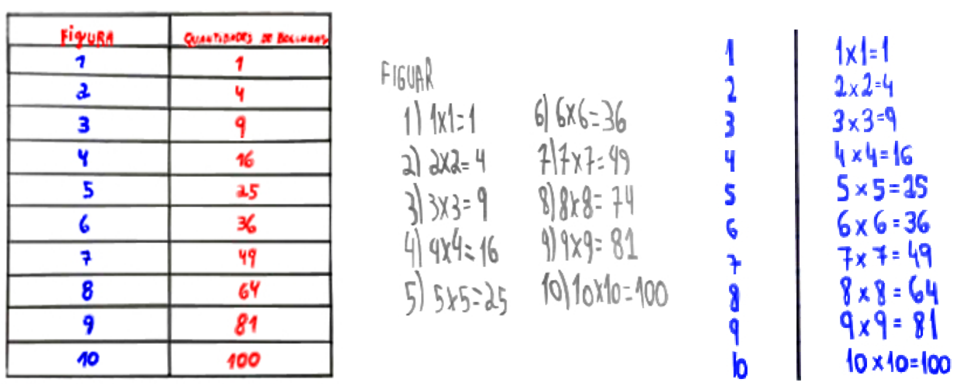
Nota: (a) Bruno, (b) Pedro e (c) Ítalo utilizando o padrão da sequência criado

Figura 11. Utilização de padrão criado pelos estudantes

Pedro conseguiu utilizar, mas os outros dois meninos continuavam com dúvidas em relação ao padrão utilizado. Enquanto professores pesquisadores, refletimos se apresentar um simbolismo alfanumérico naquele momento foi uma boa escolha ou se foi precipitado. Percebemos que a compreensão de sequência estava acontecendo, que os meninos conseguiam identificar os padrões, mas no geral não conseguiam operar com os simbolismos e se expressarem de forma escrita, principalmente os estudantes Bruno e Pedro (Figura 11). Refletimos que os garotos ainda não tinham desenvolvido a ideia do simbolismo como uma maneira de escrita de movimentos (Souza, 2004) e de comunicação do pensamento (Vigotski, 2001). Insistimos na discussão com os intuitos de que construíssem sentidos e significados ao simbolismo apresentado e de que se expressassem de maneira própria a partir dessa denotação.

Continuamos as discussões no nosso quinto encontro. Percebemos que o padrão presente na tarefa 1 era um pouco mais complexo do que o padrão presente na tarefa 2 para os alunos, essa percepção se deu pois na tarefa 1, a apresentação do simbolismo alfanumérico envolvia, além do número da figura, o número 4 – que era necessário ser percebido através do padrão $Q = F + 4$; já na tarefa 2, os estudantes precisavam somente multiplicar o número relacionado à ordem da figura por ele mesmo, não envolvendo outro valor a não ser o da própria figura – percebido pelo padrão $Q = F \times F$. Com isso e a partir da discussão realizada com os estudantes no encontro anterior, desejávamos que a criação e compreensão de uma denotação, seja por meio de simbolismos alfanuméricos ou não, acontecesse. Na figura abaixo, estão as tabelas criadas pelos estudantes para a tarefa 2:

(a) (b) (c)



Nota: Preenchimento da tabela da tarefa 2 por (a) Bruno, (b) Pedro e (c) Ítalo

Figura 12. Preenchimento da tabela

Pela figura 12 pudemos observar que os registros na segunda coluna da tarefa 2 já indicavam com mais clareza o padrão da sequência quando comparados com os registros da tarefa 1. Reforçamos a ideia de configuração retangular das figuras e fizemos uma adaptação da tabela para indicar para os meninos que ela seria infinita e colocamos intencionalmente a denotação pela letra *F* na primeira coluna para indicar a indeterminação da posição da figura existente ali.

 CC BY-NC

Questionamos os estudantes novamente se existia uma relação entre a posição da figura na sequência e o número de bolinhas da figura e o diálogo que se gerou foi o seguinte:

Professor: Ítalo, esses três pontinhos indicam que a tabela vai até o infinito. Agora vamos imaginar que eu tenho uma figura que eu não sei a posição, quantas bolinhas têm do lado de cá [apontando para a última linha da segunda coluna].

Intérprete: Professor, eu não consegui entender para passar.

Professor: Certo. Vamos de novo.

Intérprete: Professor completou a tabela. Três pontinhos. Parece o quê? linha, linha, linha, linha. Muitas.

Professor: Aí eu fiz uma linha aqui e chamei a figura de F. Não sei qual a posição da figura. Só sei que ela está lá distante. Quantas bolinhas essa figura tem? Você saberia calcular? [concomitante a intérprete estava traduzindo].

Intérprete: Ítalo, sabe calcular quantidade de bolinhas?

Professor colaborador: A expressão dele também é impagável [ao perceber como Ítalo está concentrado para encontrar a resposta].

Professor: vamos dar um exemplo.

Professor colaborador: se F é 20.

Pedro: 200 bolinhas.

Professor: Como?

Pedro: É 20×20 [refez a conta], 400, 400, Colocaria ali 400 bolinhas, 20×20. [Pedro começa a dar vários exemplos numéricos, sem contudo responder quantas bolinhas existem na figura indeterminada denotada por F].

Intérprete: Pedro, F não tem número ali, não tem. Como você faz para responder aqui?

Pedro: F vezes… [faz os sinais da letra F e da operação de multiplicação. É não sei.

Intérprete: [direcionando a fala para os professores] Achei que ia sair dessa vez.

Professor colaborador: também achei. Intérprete, explica novamente da figura 1, 2 e 3.

Intérprete: olha, figura 1, 1×1 é igual a 1. Figura 2, 2×2 é igual a 4. Figura 3, 3×3 é igual a 9.

Professor colaborador: não precisa colocar o resultado.

Intérprete: Ah, ok.

Intérprete: e F, como vai resolver?

Professor: vamos dar outros exemplos [escreve na tabela]. A figura 30, é 30 × 30 bolinhas.

Professor colaborador: Professor, escreve rapidão e apaga. Coloca outro exemplo.

Intérprete: É a figura 100, é 100 × 100 bolinhas. E a figura F? Essa figura qualquer. Poderia chamar de F, P, coração, qualquer coisa.

Ítalo: [com uma expressão de euforia por ter entendido]. F × F.

Intérprete: Aeeee.

Ítalo: Ah entendi [com uma expressão de felicidade por ter entendido].

A partir desse diálogo percebemos que dar sentidos e significados para os surdos para a ideia de denotação não é uma tarefa simples, ainda mais quando se quer denotar por meio de simbolismos alfanuméricos. Confirmamos também que as generalizações foram sendo estabelecidas por meio de diferentes linguagens (Kaput, 2008) a partir do diálogo com os meninos. Eles também nos indicaram que, ao fim desse encontro, estavam em uma fase de transição (Fiorentini et al., 2005) por meio da qual estavam compreendendo como tratar quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas (Radford, 2011; Van de Walle, 2009). O trabalho continuou para que os estudantes conseguissem compreender a denotação utilizada e desenvolvessem as outras características do pensamento algébrico.

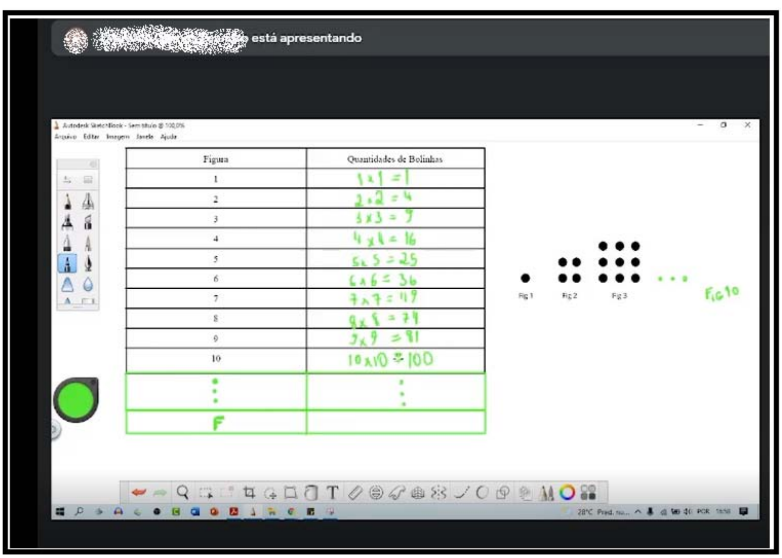


Figura 13. Adaptação da tabela pensando na denotação utilizada

 CC BY-NC

Por fim, a partir desta pesquisa pudemos compreender o pensamento algébrico de estudantes surdos em um contexto de pan-escola e refletimos sobre nosso trabalho. Concordando que o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático (Vigotski, 2001), nosso grande desafio foi entender tal pensamento na medida em que esses estudantes se expressavam em Libras em um ambiente que nos comunicamos através de computadores e celulares.

5. Algumas considerações

Encontramos nos jogos digitais e nas tarefas investigativas uma possibilidade para dialogar com os estudantes. Partimos de um jogo que nos indicou que os pensamentos dos estudantes são distintos. Compreendemos que algumas características do pensamento algébrico, como a analiticidade e a indeterminação, se apresentaram e se desenvolveram mais facilmente a partir do jogo, enquanto que outra característica, a utilização de simbolismos / denotação, apareceu e se desenvolveu por meio de uma tarefa investigativa. Em todo caso, percebemos a importância das imagens em todos os nossos encontros, independentemente da proposta criada. Percebemos que elas assumem um papel central para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da compreensão do simbolismo algébrico por estudantes surdos.

Concordamos que a denotação auxilia o desenvolvimento da analiticidade e da indeterminação. Porém, a denotação, enquanto simbolismo alfanumérico, apareceu somente no fim dos encontros com os estudantes, quando eles perceberam que poderiam operar com o desconhecido.

Os resultados encontrados mostraram desafios e possibilidades ao buscar desenvolver e compreender o pensamento algébrico de surdos em uma proposta de ensino remoto.

Entre os desafios encontrados está o trabalho coletivo remoto entre professores e intérprete. Entendemos por desafio, pois sem essa profissional os esforços para desenvolver o pensamento algébrico seriam em vão. Como a palavra é essa ponte (Bakhtin, 2006) entre nós e os estudantes surdos, sem a intérprete essa ponte não se construiria.

Um outro desafio está na constituição de um espaço em que o diálogo e a escuta ocorressem. Esse espaço foi criado nos cinco encontros que foram analisados nesta pesquisa, mas também durante os dois anos em que trabalhamos remotamente com esses estudantes. Esse trabalho se prolongou para além da pesquisa apresentada aqui e se desenvolveu durante todos os anos do Ensino Médio dos estudantes, inclusive quando a pandemia se encerrou e as aulas retornaram presencialmente.

Um terceiro desafio está na compreensão das expressões do pensamento algébrico por meio da Libras. Refletíamos constantemente se as dúvidas que surgiam por parte dos estudantes estavam relacionadas às limitações de um pensamento algébrico ou se estavam relacionadas a nossa forma de comunicação com os estudantes sobre os conceitos apresentados. Isso se constituiu um desafio, pois na maioria das vezes as dúvidas surgiam por questão da própria comunicação com os estudantes sobre os conceitos matemáticos estudados. Entendemos que a Libras é um fator central para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica, porém percebemos a necessidade de desenvolvimento de propostas que mantenham a centralidade da comunicação com os estudantes por meio desta língua ao mesmo tempo que distintos sinais possam ser criados coletivamente e que consigam representar diferentes conceitos relacionados à Álgebra.

Um último desafio, que intencionalmente nos colocamos, foi criar tarefas que possam ser utilizadas na perspectiva da Educação Matemática Inclusiva em um momento pós-pandêmico. As propostas elaboradas a partir do jogo Math Riddles e das tarefas investigativas criadas são algumas das possibilidades para esse trabalho em um momento futuro.

Entre as possibilidades surgidas com esta pesquisa estão a compreensão de que o pensamento algébrico é multifacetado e que, para desenvolvê-lo de forma multilateral, as tarefas escolhidas necessitam de intencionalidade, a percepção de que há pensamentos algébricos particulares que se desenvolvem a partir do diálogo com outros e a criação de tarefas e a organização de momentos que busquem criar o diálogo com os estudantes surdos sobre os conceitos de padrão e sequência. Por ser multifacetado, percebemos que para o desenvolvimento do pensamento algébrico possa ocorrer, diferentes propostas precisam ser criadas em que a visualidade (Viana & Barreto, 2011) toma centralidade na construção das ideias de denotação, analiticidade e indeterminação (Radford 2010a; 2010b; 2011; 2014). Tendo isso em mente, percebemos que uma possível abordagem com estudantes surdos, no início do processo de escolarização, deveria se iniciar a partir de estudos da geometria e que, a construção do pensamento algébrico poderia se dar a partir daí, das relações entre Geometria e Álgebra, utilizando a visualidade como principal recurso para o ensino e a aprendizagem da matemática.

 CC BY-NC

Por fim, percebemos que o professor precisa compreender em que fase está o pensamento e a linguagem algébricos de seus estudantes (Fiorentini et al., 2005) para poder, com competência, planejar suas aulas. Concluiu-se com esta pesquisa que há a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico de surdos no contexto de uma pan-escola, mas que a criação de materiais e tarefas por si só não basta, sendo que o trabalho coletivo, o diálogo e os momentos síncronos foram a base para que isso ocorresse.

Referências

Almeida, J. R. de, & Santos, M. C. dos. (2017). Pensamento algébrico: em busca de uma definição. *Revista Paranaense de Educaçao Matemática*, 6(10), 34-60. https://doi.org/10.33871/22385800.2017.6.10.34-60

Bakhtin, M. (1997). *Estética da criação verbal.* Martins Fontes.

Bakhtin, M. (2006). *Marxismo e Filosofia da Linguagem*. (12ª ed.) Hucitec.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Branco, J. C. S., & Neves, I. S. (2020). Trabalho docente em tempos de COVID-19: EaD e Educação Remota Emergencial. *Revista de Educação, Ciência e Cultura*, 25(3), 19-33. https://doi.org/10.18316/recc.v25i3.7382.

Fernandes, S. H., & Healy, L. (2013). Expressando generalizações em Libras: álgebra nas mãos de aprendizes surdos. *Caderno Cedes*, *33*(91), 349-368. https://doi.org/10.1590/S0101-32622013000300004

Fernandes, S. H., & Healy, L. (2016). A emergência do pensamento algébrico nas atividades de aprendizes surdos. *Ciência & Educação*, v.22, n.1, p. 237-252. https://doi.org/10.1590/1516-731320160010015

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor.* p.1-22. https://cead.ufop.br/professores/jorgelcosta/2018a/ema702/aula06/fiorentini%3Bfernandes%3Bcristovao%2C2005.pdf

Geraldi, J. W. (1984). Concepções de linguagem e ensino de Português. In: *O texto na sala de aula:* leitura & produção. Assoeste.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. *Universidad de Granada*, Departamento de Didáctica de la Matemática. https://digibug.ugr.es/handle/10481/95716

Grando, R. C. (2017). Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da Matemática. *USF*. https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2000.210144

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J.; Carraher, D.; Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Lawrence Erlbaum Associates.

Lima, B., & Souza, C. (2020). *Pandemia evidenciou desigualdade na educação brasileira*. https://www.correiobraziliense.com.br/euestudante/educacao-basica/2020/12/4897221-pandemia-evidenciou-desigualdade-na-educacao-brasileira.html

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação:* abordagens qualitativas. EPU.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano. *Interacções*. https://doi.org/10.25755/int.484

Miguel, A., & Vianna, C. (2020). Vírus vêm em vão: uma alegoria da pan-escola que (não) virá. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. https://doi.org/10.22267/relatem.20131.42

Nunes, T., Amorim, A., & Caldas, L. (2020). A pandemia de COVID-19 e os desafios para uma educação inclusiva. In: Mendes, A. et al. (Org). *Diálogos sobre acessibilidade, inclusão, e distanciamento social:* territórios existenciais na pandemia. https://www.arca.fiocruz.br/handle/icict/42296

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1736

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pensamiento Numerico Avanzado*, v. 4, n. 2, p. 37-62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, Abingdon, v. 12, n. 1, p. 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: Cai, J.; Knuth, E. (Eds). *A global dialogue from multiple perspectives*. Editora Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2014). The progressive development of early-embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, v. 26, n. 2, p. 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Saviani, D., & Galvão, A. C. (2021). Educação na pandemia: a falácia do "ensino" remoto. *Universidade e Sociedade*. Ano XXXI Nº. 67. https://www.andes.org.br/img/midias/0e74d85d3ea4a065b283db72641d4ada_1609774477.pdf

Sousa, M. C. (2004). *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:* um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 286f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP. http://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2004.310000

Stumpf, M. R. (2008). Mudanças estruturais para uma Inclusão Ética. In: *QUADROS*, Ronice Müller de (Org.). Estudos Surdos III. Arara Azul, p. 14 - 29. https://editora-arara-azul.com.br/wp-content/uploads/2023/07/EstudosSurdosIII-Miolo.pdf

Van de Walle, J. A. (2009). Pensamento Algébrico: generalizações, padrões e funções. Van de Walle, John A. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Artmed, cap 15, p. 287-319.

Viana, F. R., & Barreto, M. C. (2011). A construção de conceitos matemáticos na educação de alunos surdos: o papel dos jogos na aprendizagem. *Horizontes*, USF, v. 29, n 1, p 17-25. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1560/240

Vigotski, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. Trad. Paulo Bezerra. Martins Fontes.

 CC BY-NC

Autores

Natália Aparecida Valentim Santos. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP/Campus Registro), Brasil. natalia.valentim@aluno.ifsp.edu.br

https://orcid.org/0009-0000-7538-7113

Douglas Daniel. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP/Campus Salto), Brasil. douglas.daniel@ifsp.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-7520-9680

Elaine Jeremias Pereira Costardi. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP/Campus Registro), Brasil. elainecostardi@ifsp.edu.br

https://orcid.org/0000-0003-2759-3291

Everaldo Gomes Leandro. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP Campus Campos do Jordão), Brasil. everaldo.gomes@ifsp.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-7226-1504

CC BY-NC

Pablo Agustin Sabatinelli, Viviana Carolina Llanos

ANÁLISIS MACRODIDÁCTICO BASADO EN LOS PROGRAMAS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA: EVOLUCIÓN DE LOS SABERES EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS EN ARGENTINA

Macrodidactic analysis based on linear algebra and analytic geometry syllabi: evolution of knowledge in engineering education in Argentina

RESUMEN

Se analizan 504 planes de estudio de carreras de ingeniería en Argentina y 125 programas de las materias que reúnen los saberes de Álgebra Lineal (AL) y Geometría Analítica (GA) en el periodo 1810-2021. Nos proponemos conocer las transformaciones de dichos saberes a enseñar a partir de cuatro etapas definidas en la investigación. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard. Los resultados ponen en evidencia los cambios en los saberes de AL y GA necesarios para la formación de los ingenieros en cada etapa y se analizan los motivos de dichas transformaciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Plan de Estudios*
- *Álgebra*
- *Geometría*
- *Formación de Ingenieros*
- *Teoría Antropológica de lo Didáctico*

ABSTRACT

We analyze 504 curricula of engineering degrees in Argentina and 125 syllabuses of the courses of Linear Algebra (LA) and Analytic Geometry (AG) in the period 1810-2021. We aim to investigate the transformations of such knowledge to be taught from four stages defined in the research. Yves Chevallard's Anthropological Theory of Didactics is adopted as a theoretical reference. The results show the changes in the LA and AG knowledge necessary for the formation of engineers in each stage and the reasons for these transformations are analyzed.

KEY WORDS:

- *Curriculum*
- *Algebra*
- *Geometry*
- *Engineering education*
- *Anthropological Theory of the Didactic*

RESUMO

Analisamos 504 planos de estudos de cursos de engenharia na Argentina e 125 planos de estudos das disciplinas que reúnem os conhecimentos de Álgebra Linear (AL) e Geometria Analítica (GA) no período 1810-2021. Propomo-nos a conhecer as transformações deste saber a ensinar com base em quatro etapas definidas na investigação. A Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard é adotada como referencial teórico. Os resultados mostram as transformações dos saberes da AL e da GA necessários à formação dos engenheiros em cada etapa e são analisadas as razões dessas transformações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Programa de estudos*
- *Álgebra*
- *Geometria*
- *Educação em Engenharia*
- *Teoria Antropológica do Didático*

CC BY NC

Sabatinelli, P. A.. y Llanos, V. C. (2024). Análisis macrodidáctico basado en los programas de álgebra lineal y geometría analítica: evolución de los saberes en la formación de ingenieros en Argentina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 237-264. https://doi.org/10.12802/relime.24.2724. Recepción: Enero 16, 2025 / Aceptación: Junio 11, 2025.

RÉSUMÉ

Nous analysons 504 syllabus de diplômes d'ingénieur en Argentine et 125 syllabus des matières qui regroupent les connaissances d'Algèbre Linéaire (AL) et de Géométrie Analytique (AG) dans la période 1810-2021. Nous proposons de découvrir les transformations de ces savoirs à enseigner à partir de quatre étapes définies dans la recherche. La théorie anthropologique de la didactique d'Yves Chevallard est adoptée comme référence théorique. Les résultats montrent l'évolution des savoirs AL et AG nécessaires à la formation des ingénieurs à chaque étape et les raisons de ces transformations sont analysées.

MOTS CLÉS:

- *Curriculum*
- *Algèbre*
- *Géométrie*
- *Formation des Ingénieurs*
- *Théorie Anthropologique du Didactique*

1. Introducción

Las carreras de ingeniería en Argentina, cualquiera sea la especialidad, tienen un ciclo básico común de aproximadamente 2 años y en el que se estudian saberes de Matemática, Física y Química. Dentro del área de Matemática, encontramos saberes de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal (AL) y Geometría Analítica (GA), entre otros. En trabajos anteriores, hemos realizado una recopilación de 168 investigaciones que se ocupan del problema de la enseñanza de AL y GA en la universidad (Sabatinelli et al., 2021). Solo en una de estas investigaciones se reconoce un estudio similar al que se realiza en este trabajo y es relativo a un diseño curricular para la enseñanza de AL desde un enfoque computacional. Este enfoque, sugerido por el Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) tuvo una gran influencia en Estados Unidos y en varios países; y muchos libros para cursos de AL siguen los criterios propuestos por dicho grupo (Carlson et al., 1993). Actualmente, el LACSG reformuló algunas de sus propuestas y adoptó un enfoque STEM buscando fomentar la innovación, el pensamiento lógico y la creatividad en estudiantes y profesionales (Stewart et al., 2022). Por otra parte, el conjunto de las investigaciones antes mencionadas, dan cuenta de un problema más general que podríamos sintetizar como el fenómeno de la *escisión* de los saberes de AL y GA que conforman una misma asignatura, es decir, en su propuesta dichas disciplinas aparecen juntas, pero de hecho se enseñan como dos partes separadas. Vinculado a esto se identifica otro problema que Chevallard (2013) define como desarticulación de los temas y la consecuente *pérdida de sentido* de los saberes. Otro fenómeno vinculado es el de la utilidad de estos saberes en la formación de los ingenieros (Sabatinelli et al., 2021).

(cc) BY-NC

En general, en las facultades de ingeniería, la materia "Álgebra y Geometría Analítica" u otros nombres similares, es una materia anual percibida por los docentes y en consecuencia por los estudiantes, como dos partes bien diferenciadas de la misma materia: primero se estudia GA y luego, como sin relación AL, incluso separadas en dos semestres distintos. Convendremos en esta investigación llamar AyGA a estas materias. En otros casos, el plan de estudios establece dos materias diferentes (GA y AL) en semestres distintos y consecutivos, proponiendo un estudio por separado de los saberes de GA y AL. Sin embargo, el estudio conjunto de estas disciplinas se volvería insoslayable si se tiene en cuenta que esta separación no existe desde el *saber sabio* (Chevallard, 1985), es decir, la referencia, ni obedece a razones de naturaleza histórico-epistemológica (Sabatinelli y Llanos, 2022).

Se incluyen en el análisis los planes desde 1810, correspondientes a la Academia de Dibujo fundada por Manuel Belgrano en 1799, hasta los de las universidades nacionales actuales. Específicamente analizamos 504 planes de estudio y 125 programas de AyGA para conocer la organización de los saberes y el lugar otorgado a AL y GA en carreras de ingeniería en Argentina. Las preguntas que orientan la investigación son: ¿Cuáles son las transformaciones del saber matemático de AL y GA propuestos en los programas de dichas asignaturas? ¿Cómo interpretar esos efectos transpositivos y la escisión de los saberes de AL y GA a partir de la escala de los niveles de codeterminación didáctica?

2. Marco Teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), establece que las actividades matemáticas que se dan en el seno de una institución educativa no están aisladas del contexto histórico y epistemológico a la que la institución está sujeta y por lo tanto para interpretar esta actividad matemática es imprescindible estudiar los procesos de construcción y las transformaciones que un saber matemático sufre desde su creación en la comunidad matemática a la institución educativa donde se difunden (Chevallard, 1985). Estas restricciones y condiciones tienen diferentes orígenes: en la propia institución, en los organismos que las regulan, en la sociedad en la que esta institución influye y es influenciada, entre otras. En el marco de la TAD, Chevallard (2001, 2019) propone un instrumento teórico denominado *escala de niveles de codeterminación didáctica* para analizar y describir dichas transformaciones (véase Figura 1).

Humanidad↔Civilización↔Sociedad↔Escuela↔Pedagogía↔Disciplina↔Área↔Sector↔Tema↔Cuestión

Figura 1. Escala de los Niveles de codeterminación didáctica

 CC BY-NC

En cada una de estas etapas, se imponen restricciones y condiciones que terminan definiendo qué se puede estudiar de la cuestión considerada. Por una parte, en los niveles superiores es donde se piensan y discuten los planes de estudio para las carreras de ingeniería: en la noósfera coinciden las empresas y sus necesidades, la sociedad en su conjunto, el Ministerio de Educación, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), entre otros. Sin embargo, es responsabilidad del profesor definir las características de los programas de estudio de las asignaturas, según las sugerencias o recomendaciones que se plantean desde la noósfera. Por tal motivo, no utilizaremos aquí la escala de codeterminación completa, sino que nos circunscribiremos a la sección de la escala comprendida entre el nivel *sociedad* y el nivel *tema*; es decir desde los niveles en que opera la noósfera hasta aquellos en donde opera el profesor responsable de la elaboración del programa de estudio. El nivel *sociedad* corresponde al conjunto de personas o naciones a los que les es común su organización política, sistema educativo y el sistema legal que rige las actividades entre las personas que integran la sociedad (Chevallard, 2019; Otero, 2021). En esta investigación, son de interés, por ejemplo, la sociedad colonial en el Río de la Plata durante el siglo XIX o la sociedad argentina de principios de siglo XX. El nivel *escuela* agrupa cualquier institución de enseñanza, por ejemplo, universidades, una facultad determinada, escuela secundaria, centros de formación técnica o centros de capacitación laboral. Aquí nos interesamos en las diversas escuelas y academias que estuvieron bajo la órbita militar hasta la revolución de mayo de 1810, las universidades nacionales, la universidad obrera y la universidad tecnológica nacional. El nivel *pedagogía*, corresponde al “arte” de poner a los estudiantes en contacto con cierta obra a estudiar; esta obra o conjunto de obras que serán objeto de estudio están enmarcadas en una *disciplina*. En nuestro caso, la disciplina es la matemática, y las *áreas* de interés son AL y GA. A su vez, dentro de cada área es posible identificar *sectores* que estarán compuestos de *temas*. Por ejemplo, dentro del área GA identificamos al *sector* cónicas, compuesto de los *temas*: elipses, hipérbolas, entre otros.

Por otra parte, la TAD propone que es posible describir cualquier actividad realizada regularmente a través de un modelo único llamado praxeología (Chevallard, 1999; Bosch y Gascón, 2014). Éstas comprenden dos niveles: el de la praxis, que consta de tipos de tareas T y de las técnicas τ para llevar a cabo esas tareas; y el nivel de logos, que contiene las justificaciones de las técnicas para llevar a cabo las tareas. Estas justificaciones constituyen un bloque que consta de la tecnología θ que permite explicar y justificar por qué una técnica funciona adecuadamente, y una teoría Θ que explica y justifica la tecnología. La elección de la teoría y las tecnologías que de ella se desprendan, dependen de la institución a la que estamos asociando la praxeología e incluso del momento histórico al que nos estemos refiriendo para un análisis en el tiempo como el que se plantea en este caso.

3. Metodología

Recopilamos 504 planes y 125 programas de estudio de facultades de ingeniería de Argentina en el periodo 1810-2021; y más de 60 documentos producidos por la noósfera que incluyen leyes, decretos y disposiciones ministeriales, entre otros. Con base en esta documentación, identificamos qué características definieron a cada uno de los niveles de la escala desde *sociedad* a *pedagogía*. Como consecuencia, definimos cuatro etapas que se ajustan a los lineamientos en las transformaciones detalladas por el CONFEDI (Cristal, 2020), que marcan los principales cambios en la concepción de las carreras de ingeniería del país, y que atienden a cuestiones sociales, políticas, vinculadas al desarrollo de la industria, y que influyen en la formación de los ingenieros.

Sintetizamos las cuatro etapas (Sabatinelli y Llanos, 2024) como sigue:

- Etapa 1 (E1): corresponde al periodo 1810 a 1920 y está caracterizada por la conversión de los ingenieros con orientación militar a los ingenieros orientados a la producción y la industria (ingenieros civiles).
- Etapa 2 (E2): desde 1921 a 1976 corresponde al desarrollo de las carreras de ingeniería vinculado al proceso de industrialización que tuvo el país y de políticas económicas basadas en la sustitución de importaciones.
- Etapa 3 (E3): corresponde al periodo 1977 a 2002, y responde a una etapa de estancamiento y retroceso por la desindustrialización del país y políticas económicas que fomentaron la importación de productos elaborados.
- Etapa 4 (E4): desde 2003 que corresponde a una vuelta hacia la industrialización, el fomento de la industria nacional y algunas políticas públicas conducentes a fomentar la formación de ingenieros en Argentina.

Los documentos se distribuyen en cada etapa de la siguiente manera:

TABLA I
Planes y programas de estudio analizados para cada etapa

	Planes de estudio	*Programas de estudio*	
Etapa E1	20	3	23
Etapa E2	41	1	42
Etapa E3	123	11	134
Etapa E4	320	110	430
	504	125	629

 BY-NC

El desbalance entre la cantidad de documentos analizados en cada etapa se debe, por un lado, a las posibilidades actuales del acceso a la información, y por otro, a la cantidad de instituciones que forman ingenieros en Argentina desde los últimos dos periodos. Además, la cantidad de planes y programas correspondientes a las últimas etapas se corresponde con las reglamentaciones determinadas por el CONFEDI desde 1988 y la CONEAU desde 1995, que sientan las bases y criterios para la unificación de un ciclo básico común a todas las carreras de ingeniería del país, lo que produjo una modificación completa de planes y programas.

Previo al análisis de la *disciplina* y específicamente de AL y GA que es el *área* en cuestión, se realizó una identificación de los principales acontecimientos históricos, desarrollos y transformaciones de los saberes de AL y GA en las diferentes corrientes filosóficas dentro de la matemática en el tiempo que influyen en la descripción de los niveles de la escala de codeterminación (Kline, 2012; Sabatinelli y Llanos, 2022). Analizamos en qué punto estos cambios podrían afectar a la organización del saber en los planes y programas de estudio, y sintetizamos esta información en una tabla como la que se muestra en la Figura 2.

Nro.	*Etapa*	*Año*	*Universidad*	*Carrera*	*Materia*	*Régimen de cursado*	*Contenidos*	*Bibliografía*

Figura 2. Tabla de programas

Para cada programa, indicamos: en la columna “Nro.” el número; en la columna “Etapa” la etapa histórica que corresponde (E1 a E4); en la columna “Año” el año correspondiente; en la columna “Universidad” la universidad a la que pertenece; en la columna “Carrera” la carrera a la que pertenece; en la columna “Materia” el nombre de la asignatura; en la columna “Régimen de cursado”, si la materia es anual, semestral, cuatrimestral, etc.; en la columna “Contenidos” se listan todas las praxeologías incluidas y en la columna “Bibliografía” se registran los libros de texto recomendados. Las filas se completan con la información de cada programa.

En la tabla II se muestra un extracto para el programa PR7 correspondiente a la etapa E3, del año 1986, de la Universidad de Buenos Aires, para la carrera de Ingeniería Civil. La materia es Álgebra, de cursado anual.

(cc) BY-NC

TABLA II
Extracto de la Tabla de Programas

Contenidos	*Bibliografía*
Puntos en el espacio n-dimensional. Vectores. Producto escalar. Norma. Rectas y planos. Producto vectorial. Definición. Subespacios. Independencia lineal. Combinación lineal. Sistemas de generadores. Bases. Dimensión. Suma e intersección de subespacios. Suma directa. Espacios con producto interno. Espacios de matrices. Suma y producto de matrices. Ecuaciones lineales. Eliminación de Gauss-Jordan. Rango. Teorema de Roché-Frobenius. Determinantes. Propiedades. Determinante de un producto. Determinantes e inversas. Definición. Núcleo e Imagen. Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Composición de transformaciones lineales. Transformaciones lineales inversas. Números complejos. Operaciones. Forma binómica y trigonométrica. Teorema de De Möivre. Resolución de ecuaciones. Polinomios. Grado de un polinomio. Operaciones con polinomios. Raíces. Teorema del resto. Descomposición factorial. Teorema fundamental de Álgebra. Fórmula de interpolación de Lagrange. Matriz de una transformación lineal. Matriz de la composición. Matriz de la inversa. Cambios de Bases. Vectores y valores propios. Polinomio característico. Aplicaciones. Subespacios invariantes. Diagonalización.	ANTON, H.: Introducción al Álgebra lineal. (Ed. Limusa) LANG, S.: Álgebra lineal. (Fondo Educativo Interamericano) GROSSMAN, S.: Álgebra lineal. (Grupo Editorial Iberoamérica) KUROSCH, A. G.: Curso de Álgebra superior. (Ed. Mir) LIPSCHUTZ, S.: Álgebra lineal. (Serie Schaum Ed. Mc Graw Hill) GENTILE, Enzo: Álgebra lineal. (Ed. Docencia) KOLMAN, B.: Álgebra lineal. (Fondo educativo Interamericano) HERSTEIN, I. N.; WINTER, D. J.: Álgebra lineal y teoría de matrices. (Grupo Editorial Iberoamérica)

Los contenidos mínimos enunciados en los 504 planes de estudio y los recopilados entre los 125 programas de AyGA, nos permitieron identificar un total de 32 praxeologías incluidas en los mismos. Las praxeologías se nombran de P1 a P32 y esta organización responde al orden cronológico de su primera aparición en el conjunto de programas analizados. Es decir, las praxeologías se listan consecutivamente, independientemente de que aparezca o evolucione en años posteriores. Esto nos permite analizar y comparar entre las distintas etapas. De estas praxeologías, nos remitimos a identificar cuáles son específicas de cada etapa. Sin embargo, no es posible describir aquí sus componentes –como los tipos

 BY-NC

de tareas, técnicas o tecnologías asociadas–, ya que dicha información no se encuentra disponible en los programas ni en los planes de estudio de las carreras. Por tal motivo, se seleccionó la lista de libros de textos recomendados en cada programa, con el fin de realizar un análisis posterior.

Como hemos mencionado, no todas las praxeologías identificadas están presentes en todas las etapas. Esta identificación de las praxeologías propias de cada etapa, y los cambios dados entre una etapa y la siguiente, nos llevó a realizar una segunda clasificación, ya no de los planes, sino de las praxeologías incluidas en los mismos. En la investigación distinguimos para cada etapa las praxeologías que se eliminan o que "migran" hacia otra materia; aquellas que dejan de estudiarse y aquellas que permanecen en AyGA aunque con modificaciones.

A continuación, se realiza una descripción de las praxeologías identificadas en los programas de cada etapa (E1 a E4), seguida de una discusión que permite identificar los cambios entre las 32 praxeologías mencionadas en cada etapa, todas juntas. La *escala de los niveles de codeterminación didáctica* se utiliza siempre para justificar los motivos por lo que dichos cambios podrían tener lugar en cada momento.

4. Descripción de las praxeologías por etapas

4.1. *Etapa 1: 1810-1920*

En esta etapa se analizan 20 planes de estudio y 3 programas de AyGA que nos permiten identificar 17 praxeologías que se sintetizan en la tabla III.

TABLA III
Praxeologías para la etapa E1

Praxeologías	
P1: Determinantes	P10: Aritmética
P2: Ecuaciones algebraicas	P11: Análisis Combinatorio
P3: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	P12: Geometría elemental
P4: Fracciones continuas	P13: Cosmografía
P5: Números complejos	P14: Cuádricas
P6: Trigonometría rectilínea	P15: Sistemas de coordenadas
P7: Trigonometría esférica	P16: Geometría analítica del plano y espacio
P8: Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)	P17: Cónicas
P9: Teoría general de ecuaciones	

Las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones (P2, P3 y P9) responden a una concepción del álgebra propia del renacimiento y que durante los siglos XVIII y XIX seguían presentes, aunque con menos influencia: el álgebra es la *ciencia* de resolver ecuaciones (Katz y Barton, 2007) y en general la matemática, la ciencia de encontrar cantidades desconocidas a partir de otras conocidas (Euler, 1802).

La praxeología P4 (fracciones continuas) se introdujo dentro de los saberes de AL y GA porque aún no se había cambiado completamente el antiguo modelo que separaba a la Matemática en Aritmética, Álgebra, Coordinatoria, Geometría, etc. Como consecuencia de esto, el estudio de los números racionales e irracionales es considerado una cuestión privativa del álgebra. Los saberes involucrados en esta praxeología buscan un método para aproximar números irracionales de manera *óptima*. Sin embargo, estos saberes no responden a lo que se entiende por AL y GA, sino que son propios del análisis algebraico elemental (Español González et al., 2010).

Antes de referir a la P5 (números complejos) tomamos la cita de Padilla y Arcos (1753) para contextualizar las características del modelo “escolar” dominante de las escuelas militares sobre la Matemática:

> La cantidad, objeto de la Matemática, puede considerarse entera, o dividida en partes. De la primera trata la Geometría, y de la segunda la Aritmética: de suerte, que toda la Matemática no es otra cosa, que Aritmética, y Geometría.... La cantidad asimismo puede considerarse contraída en particular a alguna cosa, o abstraída por el entendimiento de toda materia: por lo que las Ciencias Matemáticas unas son puras, o abstractas, y otras mixtas. (Padilla y Arcos, 1753, p. 17).

Esta idea de que la matemática se ocupa de la cantidad y por lo tanto estudiar conjuntos numéricos es estudiar matemática, es lo que justifica que la praxeología números complejos (P5) inicialmente haya formado parte de los programas de AL y GA. Efectivamente, el estudio comenzaba con el conjunto de números naturales, y continuaba con los números enteros, los racionales, los reales y finalmente los números complejos. Cada conjunto numérico precedía al anterior porque permitía una operación que con el conjunto de números que se contaba hasta ese momento no era posible: el conjunto de números enteros permitió la resta de números cuando el sustraendo fuera mayor que el minuendo; el conjunto de números racionales permitió el cociente de números aun cuando el divisor fuese mayor que el dividendo, el conjunto de números reales permitió la radicación y logaritmación de números racionales positivos y el de números complejos la radicación y logaritmación para cualquier número real (con excepción del 0 para la logaritmación). Con la misma concepción de la matemática, se justifican la praxeología aritmética (P10) y geometría elemental (P12).

 CC BY-NC

Las praxeologías relativas a trigonometría y cosmografía (P6, P7 y P13) se justifican también a partir del estudio de la Geometría, y dentro de ésta el estudio de la proporción. La trigonometría plana y esférica como aplicación de la teoría de las proporciones (y las razones trigonométricas como constantes de proporcionalidad de esas proporciones) y no como el estudio de funciones trigonométricas. La cosmografía (P13) se consideraba una aplicación práctica de los saberes de trigonometría, de tradición en las academias militares; y la inclusión de P13 implica la de P6 y P7 a partir de las cuales se justifican términos teóricos de gran parte de P13.

La praxeología determinantes (P1) responde a lo estudiado inicialmente por Cramer (1704-1752) para dar respuesta al problema de encontrar una curva algebraica de grado n que pase por $\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$ puntos dados. Este problema conduce a la resolución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que aquí se refleja en la praxeología P8 (aunque en ésta, se estudian sistemas lineales más generales de tamaño $m \times n$). Complementa a esta praxeología el trabajo de Euler (1750) quien teoriza acerca de que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución o que, si tienen, ésta sea única. La idea de independencia lineal que Euler desarrolla es el inicio de lo que conocemos como AL (Dorier, 1995). El estudio que se hace durante esta etapa de los determinantes es bastante exhaustivo: además de las propiedades que resultan de diferentes transformaciones sobre un determinante o los teoremas de desarrollo por filas o columnas, se estudian determinantes recíprocos, de Vandermonde, simétricos, hemisimétricos, ortosimétricos y continuantes. También se incluye el estudio del teorema de Hadamard relativo a una cota superior para un determinante y una introducción a determinantes en varias dimensiones.

La praxeología SEL (P8) corresponde a un estudio *elemental* de estos sistemas, que incluyen problemas de aplicación de ingeniería, pero no hay un estudio completo sobre sistemas no cuadrados, cantidad de soluciones, o sobre la compatibilidad en general. Los sistemas de coordenadas, la geometría analítica lineal, el estudio de las cónicas y superficies (P14, P15, P16 y P17) corresponden al *área* GA, pero con base en solución algebraica, es decir a través de ecuaciones que representen lugares geométricos. Esta es la idea de Descartes del álgebra como instrumento para *automatizar* o *mecanizar* la resolución de problemas geométricos (Boyer, 1944; Kline, 2012). Respecto de los sistemas de coordenadas, además de las coordenadas cartesianas ortogonales, se incluye el estudio de sistemas polares, cilíndricos, esféricos, parabólicos, hiperbólicos, homogéneas, entre otros.

La figura 3 corresponde a una red praxeológica de la etapa E1. En esta red se trata de establecer cuáles son las relaciones que desde los planes y programas se proponen para la organización de las praxeologías para el estudio de AyGA.

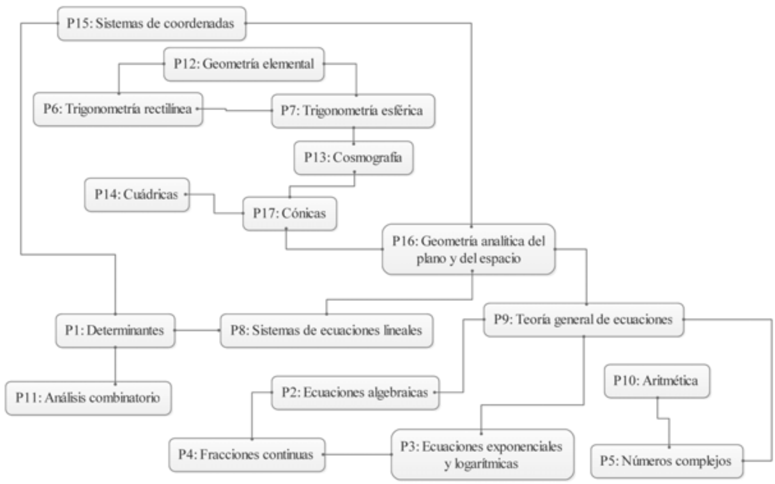


Figura 3. Red praxeológica de la etapa E1

4.2. *Etapa 2: 1921-1976*

En esta etapa se analizan 41 documentos oficiales que corresponden al periodo 1921-1976. Se identifican cambios en las praxeologías incluidas en los planes de estudio respecto de la etapa E1. En la tabla IV se muestran estos cambios:

TABLA IV
Evolución de las praxeologías durante la etapa E2

Praxeologías que desaparecieron	*Praxeologías que se mantuvieron*	*Praxeologías que se incorporaron*
(P4) Fracciones continuas (P6) Trigonometría rectilínea (P7) Trigonometría esférica (P9) Teoría general de ecuaciones (P10) Aritmética (P12) Geometría elemental (P13) Cosmografía	(P1) Determinantes (P2) Ecuaciones algebraicas (P3) Ecuaciones exponenciales y logarítmicas (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P11) Análisis Combinatorio (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas	(P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P21) Aproximación Numérica (P22) El número Real (P23) Matrices (P24) Resolución numérica de ecuaciones (P25) Series numéricas (P26) Interpolación (P27) Nomografía

 CC BY-NC

Durante esta etapa las praxeologías relativas a trigonometría, cosmografía, aritmética y geometría elemental (P6, P7, P10, P12 y P13) desaparecen de los planes de estudio (con excepción de la trigonometría en la carrera de Agrimensura). En el caso de aritmética y geometría elemental (P10 y P12), éstas fueron relegadas a la escuela primaria y media. En estas dos praxeologías es donde resulta claro cómo el nivel *sociedad* operó sobre el nivel *escuela*: la proliferación de escuelas primarias y medias a partir del establecimiento de la instrucción primaria obligatoria, gratuita y gradual (ley 1420) y la ley de subvenciones para escuelas (ley 463), juntamente con el denominado *normalismo sarmientino* (Fiorucci, 2014) modificó el perfil del ingresante a las facultades de ingeniería. En la tabla V podemos comparar las condiciones de ingreso para estudiar ingeniería en 1810 y las de 110 años después en la Universidad Nacional del Litoral.

TABLA V
Comparación condiciones de ingreso

"1° Todo individuo concurrente a la Academia deberá antes ser examinado por los jefes de su cuerpo, de su regular destreza y perfección en escribir. *2° Como la conducta y buen manejo de los hombres es proporcionado a su educación y sentimientos, deberán todos los alumnos obtener de sus jefes un informe de honradez, aplicación, celo, aptitud y demás apreciables circunstancias que deben distinguir a un militar; [...]"* (Plan de la escuela de Matemáticas, Boletín Oficial, n° 115, 10 de agosto de 1810)	*"Podrán inscribirse en el primer año de este Ciclo los que hayan aprobado las materias [...] de la Escuela Industrial anexa a esta Facultad, o las de los seis años de las demás Escuelas Industriales de la Nación, los Contramaestres de la Escuela Industrial [...], los que, tengan diplomas de Técnicos, de Maestros Mayores de Obras, o de Maestros de Trabajo Manual, expedidos por esta Facultad; de Profesor Normal en Ciencias[...]; de Contador Público Nacional, o de Bachiller Nacional."* (Plan de Estudios, Universidad Nacional del Litoral, 1920, p.6)

La praxeología fracciones continuas (P4) finalmente deja de estudiarse en las facultades de Ingeniería. Una razón para esto es que las cuestiones relativas al análisis algebraico pasaron a estudiarse en la materia "Análisis Matemático". Por otra parte, la aparición de las calculadoras electrónicas desde la década de 1960 (Massare, 2014) también fueron un motivo que contribuyó a la desaparición de esta praxeología en las facultades de ingeniería de Argentina. Además, las calculadoras fueron agentes modificadores de las praxeologías relativas a ecuaciones (P2, P3 y P9) en cuanto a las técnicas y tareas. Surge así la praxeología resolución numérica de ecuaciones (P24) que se ocupa de ecuaciones tanto algebraicas como trascendentes a través de métodos numéricos. La utilización de calculadoras electrónicas permitió utilizar diferentes técnicas y teoremas para resolver de manera aproximada ecuaciones. Métodos como el método de Newton-Raphson, formulado inicialmente por Newton en 1665 a partir de unos trabajos de Vietè y reformulado por Raphson en 1690 y por Simpson en 1740, son ahora aplicables desde el punto de vista práctico gracias a los dispositivos electrónicos. Del mismo modo ocurre con el método desarrollado en 1837 por Gräffe para encontrar raíces de polinomios, e independientemente por Dandelin en 1826 y Lobachevsky en 1834. Observamos en la Figura 4, que a pesar de que se están aplicando teoremas de más de 150 años de antigüedad para calcular raíces, no es sino hasta la difusión de calculadoras que estos métodos pueden ser utilizados por estudiantes de ingeniería en sus cursos de grado.

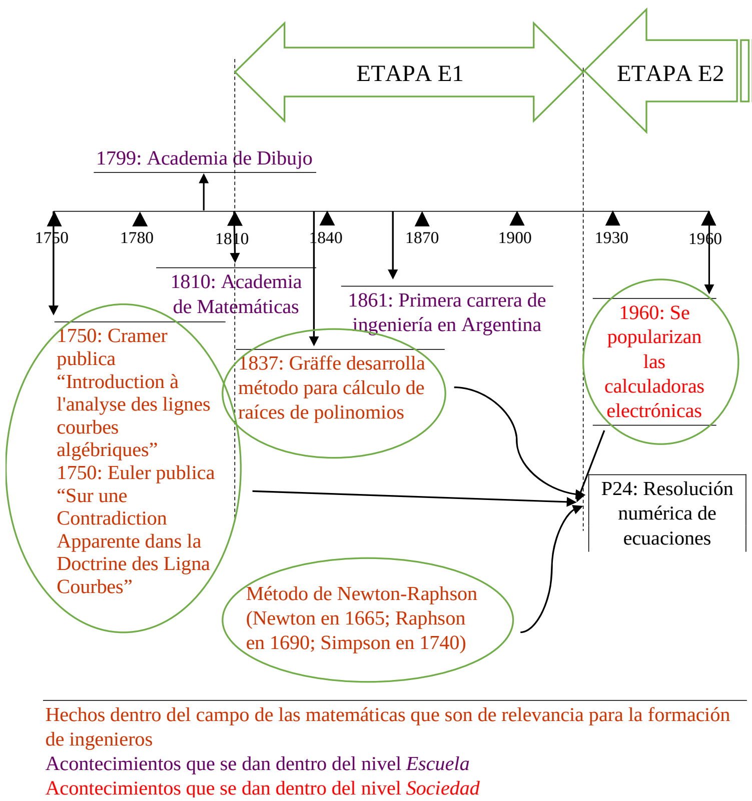


Figura 4. Línea histórica de configuración de la praxeología P24

Con el desarrollo y popularización de las calculadoras, se incorporan al estudio de las ecuaciones dos praxeologías: P27 y P25. La nomografía (P27) por una parte aporta técnicas y tareas de resolución de ecuaciones parametrizadas a partir de interpolar gráficamente en el nomograma; asimismo, P26 profundiza el estudio

 BY-NC

de la interpolación, mientras que las series numéricas (P25) dan herramientas para la aproximación numérica. Por otra parte, durante la primera etapa de E2, la interpolación provee de la justificación para las técnicas y tareas correspondientes al cálculo de logaritmos y razones trigonométricas. Complementa a este grupo de praxeologías un adecuado estudio del error numérico producido por los métodos empleados en la resolución numérica de ecuaciones, que corresponde a P21 y cuya justificación teórica queda clara a partir P22 (números reales), que se estudian, siguiendo la concepción de la matemática como una estructura de cuerpo.

La praxeología P18 polinomios, que incluye la resolución de ecuaciones algebraicas para los teoremas relativos a la factorización de polinomios, también subyace a la idea del estudio de un anillo. Esta idea de la estructura algebraica subyacente al estudio de entes matemáticos será dominante durante esta etapa E2 y se explica porque ahora la matemática está pensada en términos de estructuras (Zalamea, 2011). El surgimiento en 1935 del grupo Bourbaki, sostenía que

> Ahora puede quedar claro qué debe entenderse, en general, por estructura matemática. El carácter común de los diferentes conceptos designados por este nombre genérico es que pueden aplicarse a conjuntos de elementos cuya naturaleza no se ha especificado; para definir una estructura, se toman como dadas una o varias relaciones, en las que entran estos elementos (...); luego se postula que la relación o relaciones dadas, satisfacen ciertas condiciones (que se enuncian explícitamente y que son los axiomas de la estructura considerada). Establecer la teoría axiomática de una estructura dada, equivale a deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, excluyendo cualquier otra hipótesis sobre los elementos considerados (en particular, cualquier hipótesis sobre su propia naturaleza). (Bourbaki, 1950, p. 225-226)

Esta manera de *pensar* la matemática da lugar a una justificación complementaria para la praxeología P22 (números reales). En la etapa anterior justificamos la introducción de los números complejos (P5) a partir de las sucesivas ampliaciones del concepto de número, en esta etapa la justificación del estudio de números reales y complejos cambia por la del estudio de la estructura algebraica de cuerpo y de este modo, estas praxeologías se estudian a partir de los axiomas que caracterizan la estructura algebraica.

El estudio de las estructuras también explica la razón de las praxeologías P19 y P23, álgebra vectorial y matrices, respectivamente. En ambos casos se presentan los vectores o las matrices y la definición de dos operaciones: la adición y el producto por escalar. De hecho, se introduce el término “escalar” que es propio de los elementos que conforman el cuerpo en el estudio de los espacios vectoriales y son el germen de lo que más adelante se incluye como una praxeología con este nombre. Vinculado al estudio al estudio de lo matricial también se incorpora P20, es decir, las transformaciones lineales; pero esta praxeología permite estudiar temas geométricos a partir de transformaciones algebraicas: transformaciones rígidas del plano (rotaciones, traslaciones, homotecias), cambio de coordenadas, entre otras.

La praxeología P1 (determinantes), en esta etapa se reduce al estudio de algunos determinantes particulares (Vandermonde, triangulares, etc.). Los determinantes se estudian como una característica numérica asociada a una matriz. Asimismo, el rango de una matriz se define a partir del cálculo de determinantes particulares. Los SEL (P8) ya se estudian en términos generales: aparecen las preguntas acerca de la compatibilidad con independencia del tamaño de los sistemas o si son cuadrados. El teorema de Rouché–Frobenius se enuncia en términos de rangos y determinantes asociados a matrices particulares. Respecto de P17 (secciones cónicas), el estudio se restringe y dejan de estudiarse las curvas clásicas (a excepción de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola). Respecto del análisis combinatorio, geometría analítica del plano y del espacio, superficies y sistemas de coordenadas (P11, P14, P15, P16) no tienen modificaciones sustanciales respecto de la etapa E1.

La Figura 5 sintetiza la red praxeológica de la etapa E2. Con verde se indican las praxeologías y las nuevas relaciones que se establecen en esta etapa. Con rojo se indican las que se pierden.

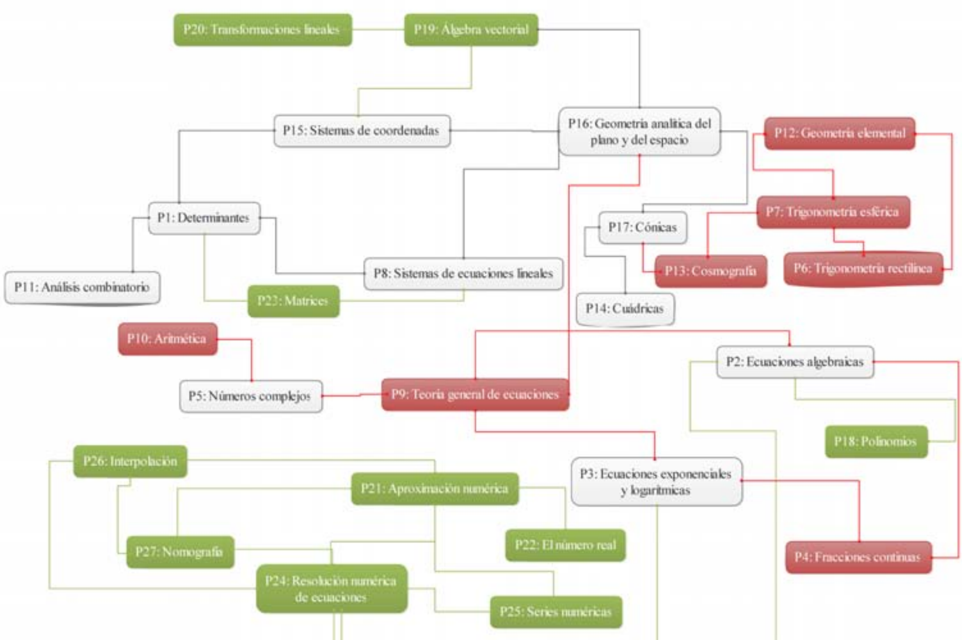


Figura 5. Red praxeológica de la etapa E2

 CC BY-NC

4.3. *Etapa E3: Periodo de desindustrialización nacional (1977-2002)*

En esta etapa se analizan 134 documentos oficiales, que corresponden a 123 planes y 11 programas de estudio. La resolución 68/94 de Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) modifica y homogeniza los saberes a estudiar de AL y GA para todas las especialidades. Dentro de sus considerandos se menciona establecer *"una adecuada formación básica, entendiendo como tal a la formación científica en el estudio de las problemáticas que dan origen a las carreras de ingeniería"* (CS 68/94). Además,

> … los nuevos diseños curriculares de la Universidad Tecnológica están dirigidos hacia una fuerte formación básica para la preparación del ingeniero, es muy importante reconocer y resaltar la parte común a todas las ingenierías y utilizarla no solo para mejorar la eficiencia del proceso de aprendizaje-enseñanza, sino también como un medio de integración a nivel universidad de las disciplinas con la que cada ingeniero deberá interactuar en su vida profesional. (CS 68/94, Anexo I, pág. 1)

El párrafo citado explica la importancia de homogeneizar los planes de estudio de las diferentes ingenierías, y en lo sucesivo, se proyecta que las praxeologías matemáticas incluidas prácticamente no van a sufrir modificaciones. Por otra parte, los saberes que la UTN propone en sus planes de estudio coinciden con los de las otras universidades nacionales para este periodo: en Álgebra ya todas las facultades incorporaron el estudio de los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y diagonalizaciones, además de matrices, determinantes y SEL y dejó de formar parte el estudio de nomogramas. La resolución de ecuaciones fue migrando hacia un estudio desde el análisis y cálculo numérico en otros espacios curriculares. En GA se adopta definitivamente un enfoque vectorial para su estudio y las curvas clásicas y algebraicas dejan de estudiarse (excepto cónicas y superficies de segundo orden que permanecen en los planes de estudio). Resumimos lo anterior en la tabla VI.

La influencia del grupo Bourbaki y la "matemática moderna" justifican la introducción de la praxeología P28 (teoría de conjuntos). Incluso en los cursos propedéuticos o de ingreso a las facultades de ingeniería se enseñaba la teoría elemental de conjuntos. En concordancia con esto también comienzan a estudiarse estructuras algebraicas (P30): grupos, anillos, cuerpos, entre otros. Los espacios vectoriales (P31) sirven tanto como ejemplo de estructura algebraica como para el estudio de las transformaciones lineales que se incorporan en la etapa anterior. Estas praxeologías aportan mayor generalización y nivel de abstracción a los conceptos matemáticos introducidos para estudiar, pero también se alejan de las aplicaciones inmediatas que el estudio del álgebra pueda aportar a los ingenieros. Durante el inicio de la etapa E3, el estudio de las estructuras algebraicas (P30) se justificó a partir de considerar el estudio de los espacios vectoriales como una estructura algebraica *generalizadora* o *abarcadora* de estructuras más simples. Sin embargo, ese enfoque netamente algebraico no es el que se adoptó mayoritariamente en ingeniería, sino que se prefirió un enfoque geométrico-algebraico como se discute en Sabatinelli y Llanos (2022). Como indicadores señalaremos que los espacios vectoriales que se estudian en AyGA son reales, con excepción de algunos casos en que el cuerpo es el de los números complejos; pero casi no hay referencia a espacios vectoriales sobre un cuerpo fuera de estos ni se estudia la estructura del cuerpo para diferenciarla por ejemplo de una estructura de módulo.

TABLA VI
Síntesis de las praxeologías en la etapa E3

Praxeologías que permanecen	*Praxeologías que desaparecen*	*Praxeologías que se incorporan*
(P1) Determinantes (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P11) Análisis Combinatorio (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas (P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P23) Matrices	(P2) Ecuaciones algebraicas (P3) Ecuaciones exponenciales y logarítmicas (P21) Aproximación Numérica (P22) El número Real (P24) Resolución numérica de ecuaciones (P25) Series numéricas (P26) Interpolación (P27) Nomografía	(P28) Teoría de conjuntos (P29) Autovalores y autovectores (P30) Estructuras Algebraicas (P31) Espacios Vectoriales

Durante esta etapa dejan de estudiarse las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones, tales como: P2 ecuaciones algebraicas, P3 ecuaciones exponenciales y logarítmicas, P21 aproximación numérica, El número real (P22), resolución numérica de ecuaciones (P24), series numéricas (P25), interpolación (P26) y nomografía (P27). En el caso de P21, P24 y P26 pasan a formar parte de nuevos espacios curriculares dedicados a los métodos y análisis numéricos que se harán cargo de la resolución numérica de ecuaciones (sobre todo a partir de la creciente influencia de las calculadoras científicas y posteriormente de las computadoras) entre otros nuevos tópicos de interés, y no vinculado al álgebra como ocurría en las etapas anteriores.

Las praxeologías determinantes, números complejos, SEL, análisis combinatorio, cuádricas, geometría analítica del plano y espacio y cónicas (P1, P5, P8, P11, P14, P16 y P17 respectivamente) permanecen en esta etapa. En cuanto a sistemas de coordenadas, (P15), el estudio de los sistemas coordenados corresponde a: cartesianos ortogonales, polares, cilíndricos y esféricos.

 CC BY-NC

Entre las praxeologías que se incorporan, por ejemplo, P29 autovalores y autovectores, aporta una nueva justificación al estudio de polinomios (P18) ya que son requeridos en el cálculo de autovalores y, por otra parte, permite una mayor interacción entre el grupo P29 ↔ P20 ↔ P23, es decir entre autovalores y autovectores, transformaciones lineales y matrices. Además, esta praxeología permite estudiar nuevas propiedades de las transformaciones lineales y algunas aplicaciones a la física y la mecánica. Respecto de matrices (P23), en esta etapa se amplía el estudio de estas incorporando los espacios fundamentales asociados (espacio de columnas, de renglones, nulo).

Destacamos aquí la interacción *escuela* ↔ *disciplina* a partir de la resolución CS 68/94 de la UTN que unifica las praxeologías matemáticas del ciclo común de la formación de los ingenieros. Además, la *disciplina* influye sobre el *área* ya que en este periodo las praxeologías se perfilaron más hacia la resolución de problemas lineales: la teoría de espacios vectoriales y las transformaciones lineales por una parte se aúnan con el estudio vectorial de la geometría lineal del plano y del espacio. Las cónicas y las cuádricas parecen estar de alguna manera descolgadas de esta vinculación entre AL y GA, cosa que cambiará en la etapa que sigue.

La Figura 6 sintetiza la red praxeológica de la etapa E3. Con verde se indican las praxeologías y las relaciones que se agregan y con rojo las que se pierden en esta etapa.

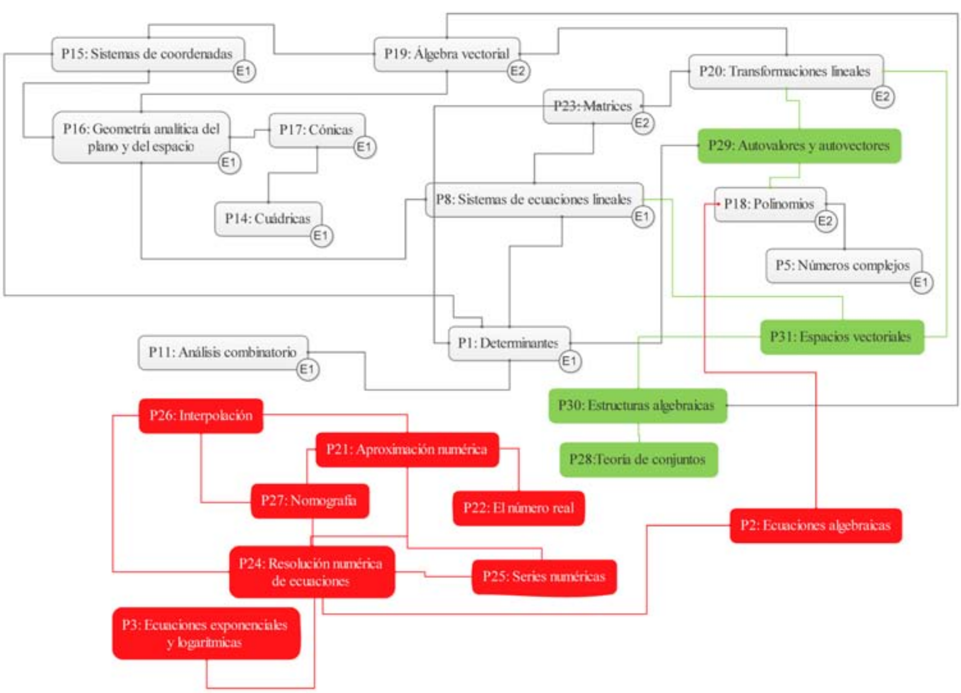


Figura 6. Red praxeológica de la etapa E3

BY-NC

4.4. *Etapa E4: Periodo actual*

En esta etapa se analizan 430 documentos: 320 planes y 110 programas de estudio. En esta etapa ya hay un ciclo básico común de formación de ingenieros, regulada por el CONFEDI y/o la CONEAU para las universidades del país. Las praxeologías que se proponen para AyGA en esta etapa se sintetizan en la tabla VII.

TABLA VII
Síntesis de las praxeologías en la etapa E4

Praxeologías que se mantuvieron	*Praxeologías que desaparecieron*	*Praxeologías que se incorporaron*
(P1) Determinantes (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas (P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P23) Matrices (P29) Autovalores y autovectores (P31) Espacios Vectoriales	(P11) Análisis Combinatorio (P28) Teoría de conjuntos (P30) Estructuras Algebraicas	(P32) Formas bilineales y cuadráticas

Las formas bilineales y cuadráticas (P32) se incorpora como un complemento de las praxeologías cónicas y superficies (P14 y P17) que permite un estudio geométrico - algebraico de las curvas y las superficies. De esta forma, las praxeologías P14 y P17 que antes fueron relativas al área GA únicamente, ahora tienen ya un correlato con el AL. Lo mismo ocurrió en la etapa E3 con el álgebra vectorial, las transformaciones lineales y los espacios vectoriales (P19, P20 y P31, respectivamente). Por otra parte, P32 vincula otras praxeologías de los programas: transformaciones lineales (P20), matrices (P23), autovalores y autovectores (P29) y espacios vectoriales (P31); además de P14 y P17 como hemos mencionado.

En cuanto a los determinantes (P1), éstos quedan relegados a ser una característica numérica de una matriz cuadrada y solo se estudian propiedades relacionadas con la inversibilidad de una matriz o con el cálculo de autovalores de matrices y transformaciones lineales. La resolución de los SEL (P8) se enfoca en el escalonamiento de matrices, se reformula el teorema de Rouché–Frobenius en términos de pivotes y variables libres. De esta forma los determinantes (P1) pierden relevancia en el cálculo del rango de una matriz.

 BY-NC

El estudio de los números complejos (P5) vuelve a asociarse al estudio de las ecuaciones polinómicas por ser estas raíces de polinomios característicos; es decir, P5 se estudia porque resuelve completamente el problema de determinar autovalores para matrices con entradas complejas. Por otra parte, la teoría de conjuntos (P28) dejó de formar parte de AyGA para estudiarse en los cursos de Probabilidad y Estadística para ingeniería. La visión estructuralista de la matemática pierde fuerza durante esta etapa. Las consecuencias de esto en los programas de AyGA es que P30 (estructuras algebraicas) pasó a estudiarse casi exclusivamente en el espacio curricular "Matemática Discreta" que corresponde a la carrera de Ingeniería en Sistemas. Por otra parte, la praxeología relativa a combinatoria (P11) en algunos casos pasó a estudiarse en "Probabilidad y Estadística", mientras que en otros en "Matemática Discreta".

El estudio de las cuádricas (P14), se redujo al de la ecuación reducida de la superficie cuádrica en coordenadas cartesianas y la descripción de las curvas que resultan por la intersección con planos paralelos a los planos coordenados. La praxeología autovalores y autovectores (P29), favorece el estudio matricial de las ecuaciones cuádricas. Las secciones cónicas (P17), reducido a hipérbola, elipse, parábola y circunferencia sí tiene registros más difundidos de estudiarse no solo como lugar geométrico, sino que la ecuación completa de segundo grado se estudia matricialmente con ayuda de autovalores y autovectores para rototraslaciones.

El resto de las praxeologías, sistemas de coordenadas (P15), geometría analítica del plano y espacio (P16), polinomios (P18), álgebra vectorial (P19), transformaciones lineales (P20), matrices (P23) y espacios vectoriales (P31), no presentan modificaciones sustantivas respecto de la etapa anterior.

Respecto de las 14 praxeologías que se mantuvieron en la etapa E4, podemos decir que la consolidación de los saberes a estudiar en AL y GA en el ciclo básico para ingenierías parece haber alcanzado un consenso no solamente dentro de Argentina, sino a nivel regional. Esta codeterminación desde el nivel *sociedad* ↔ *escuela* opera de la siguiente manera: los países que conforman el MERCOSUR[1] acordaron una serie de estándares en las carreras universitarias (ARCUSUR[2]) para validar títulos universitarios a nivel regional. Se establecen regulaciones fuertes desde la *noósfera*, adaptando los planes de estudio a estos estándares, que incluyen desde áreas del ciclo básico y superior y la carga horaria mínima, hasta los contenidos mínimos comunes (las praxeologías) a considerar en los programas de las materias.

La Figura 7 sintetiza la red praxeológica de la etapa E4. Con verde se indican las nuevas praxeologías y las relaciones que se establecen en esta etapa, y con rojo las que se pierden.

---

1 Mercado Común del Sur (MERCOSUR): https://www.mercosur.int/

2 ARCUSUR: https://www.arcusur.org

(cc) BY-NC

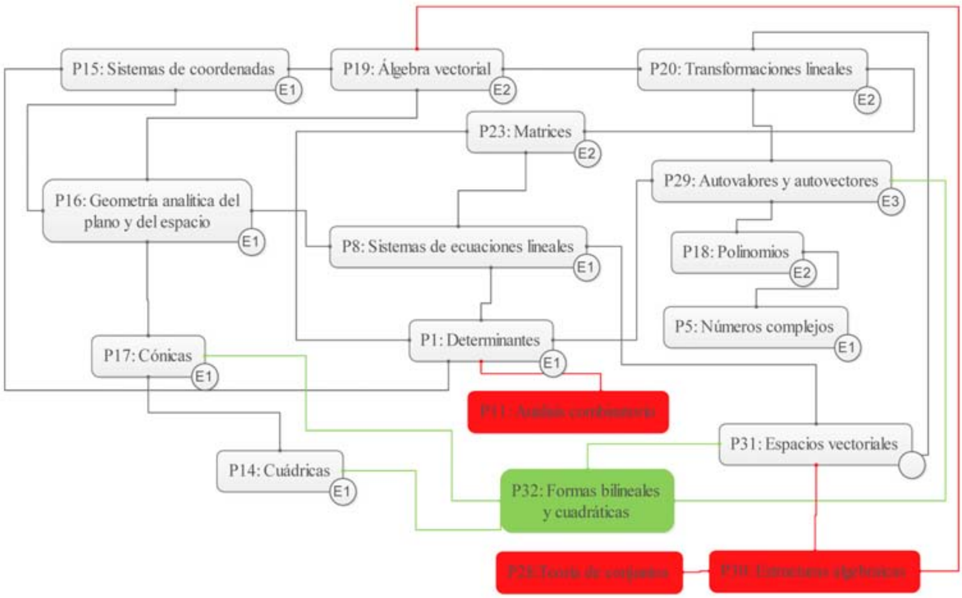


Figura 7. Red praxeológica de la etapa E4

5. Discusión

En una investigación previa, hemos identificado las características de las carreras de ingeniería en Argentina, desde su creación por 1810 y los principales cambios, con base en 504 planes de estudio utilizando la escala de los niveles de codeterminación didáctica (Sabatinelli y Llanos, 2024). En este trabajo, ingresamos en un análisis que es más específico de los niveles inferiores de dicha escala, dado que el análisis aquí se circunscribe a la descripción de las praxeologías que forman parte de 125 programas de estudio de las asignaturas de AyGA. La generación del esquema de redes praxeológicas ha permitido describir las praxeologías en las cuatro etapas de la investigación, a la vez que se puede analizar la evolución de estas, distinguiendo las praxeologías que permanecen entre las etapas, las que dejan de estudiarse y las que se incorporan entre una etapa y la siguiente. Daremos ahora una discusión para justificar los cambios descriptos a través de la escala de niveles de codeterminación didáctica. Inicialmente sintetizamos en la tabla VIII las principales características desde los niveles *sociedad* hasta *área* en las cuatro etapas, indicando con (+) lo que se agrega respecto de la etapa anterior.

 CC BY-NC

TABLA VIII
Características de algunos niveles de la escala por etapa

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Etapa E1</th><th>Etapa E2</th><th>Etapa E3</th><th colspan="2">Etapa E4</th></tr>
<tr><td>Sociedad</td><td>S_1: Sociedad colonial (dependencia española).</td><td>S_2: Sociedad Argentina independiente.</td><td>S_3: Cambio de modelo de agroexportador a sustitución de importaciones.</td><td>S_4: Modelo neoliberal.</td><td colspan="2">S_5: Desarrollo industrial en el país: la formación de ingenieros paso a ser política de estado.</td></tr>
<tr><td>Escuela</td><td>E_1: Academias militares, de Náutica y de Dibujo.</td><td>E_2: Universidades Nacionales argentinas.</td><td>E_3: Universidad obrera (posteriormente UTN).</td><td>E_2 y E_3.</td><td colspan="2">E_2 y E_3, con más de 30 facultades de ingeniería cada una.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pedagogía</td><td>Temas de formación básica (matemática, física y mecánica) y temas de formación militar.</td><td colspan="3">División entre un “ciclo básico” (matemática, física y química) y un “ciclo profesional” o “de especialización” según la carrera. Los contenidos mínimos para el ciclo básico no coinciden entre las universidades.</td><td colspan="2">Establecimiento del Ciclo básico común y superior. Unificación de los planes de estudio y propuesta de contenidos mínimos.</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="2">Acreditación de las materias: examen final único.
Se admite la posibilidad de rendir como “libre”</td><td>Se admite examen “libre”</td><td>No se admite examen “libre”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se incorpora la tesina de grado como trabajo final</td></tr>
<tr><td colspan="2">Turno matutino</td><td>Turno matutino y nocturno (adaptado al trabajador de la universidad obrera)</td><td colspan="3">Turno matutino, vespertino y nocturno</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Disciplina</td><td rowspan="2">D_1: Matemática elemental. Resolución de problemas concretos utilizando aritmética o geometría</td><td colspan="2">D_2: Impacto del desarrollo del álgebra: mayor nivel de abstracción y generalización.</td><td>D_3: Entrada a los espacios vectoriales. Vinculación AL y GA</td><td colspan="2">D_5: (+) Transformaciones lineales y bilineales.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Matemática vinculada a la física. Interés por abordar problemas propios de la ingeniería.</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>Aritmética, Geometría (euclideana), Aritmética superior (álgebra)</td><td>Geometría analítica, Álgebra, Cálculo infinitesimal</td><td>(+) Métodos numéricos</td><td colspan="3">(+) Matemática Discreta</td></tr>
</table>

En la tabla se sintetizan los cambios de los niveles superiores de la escala, que, junto con los desarrollos propios de la Matemática, determinan los *temas* de AyGA. Hemos analizado en el trabajo la permanencia o no de las praxeologías incluidas en dichos programas en el tiempo, y bajo qué forma.

Como hemos analizado, sólo algunas praxeologías (*tema* en la escala) estuvieron presentes desde la etapa E1 y permanecen, aunque con modificaciones, y otras se agregaron en las etapas sucesivas, como se mencionó en la tabla anterior. Describimos los cambios en las praxeologías que actualmente corresponde estudiar, y cómo éstas fueron incorporadas en cada etapa:

- Los determinantes (P1) con un lugar preponderante en la primera etapa (E1) quedaron relegados en importancia debido a que computacionalmente es más eficiente el cálculo de rangos a partir del escalonamiento de matrices; de ahí que los determinantes permanecen, pero como una característica numérica asociada a una matriz cuadrada y para el cálculo de autovalores y autovectores.
- Los cambios en los números complejos (P5), están vinculados con las reformas introducidas por las “matemáticas modernas”. Antes y después de dicha reforma (E1 y E4), P5 se limitó a la ampliación del campo numérico, mientras que en la E2 se propicia un enfoque conjuntista, por tal motivo P5 adopta estructura de cuerpo.
- Las modificaciones en los SEL (P8) identificadas, no son relativas tanto a los métodos de resolución sino a la vinculación e interpretación que éstos pudieran tener con los espacios vectoriales (P31). En muchos casos dentro del AL resulta de mayor importancia las preguntas acerca de la compatibilidad o la existencia de soluciones no triviales de ciertos SEL que la obtención del conjunto solución en sí.
- Las cuádricas y las cónicas (P14 y P17) tuvieron un aspecto geométrico permanente, pero no fue hasta la incorporación de las formas bilineales y cuadráticas (P32) durante la etapa E4 que tuvieron un correlato algebraico. Los sistemas de coordenadas también tuvieron una justificación algebraica a partir de la incorporación de las transformaciones lineales y matrices (P20 y P23). Idéntico caso ocurre con la geometría analítica del plano y del espacio (P16) y la incorporación de los espacios vectoriales (P31).

Las demás praxeologías que actualmente conforman E4 complementaron (mayoritariamente desde el punto de vista algebraico) a las que tuvieron un origen geométrico. A saber:

 BY-NC

- El Álgebra vectorial (P19) complementa a la Geometría analítica del plano y del espacio (P16) pero también sirve como agente vinculador con el estudio de los espacios vectoriales (P31).
- Las transformaciones lineales y las matrices (P20 y P23) generalizan desde el álgebra a los sistemas de coordenadas.
- El estudio de los autovalores y autovectores (P29) complementa lo anterior y da lugar a los polinomios (P18), ya no desde un punto de vista de la estructura de anillos, sino desde la búsqueda de las raíces de ciertas ecuaciones polinómicas.

Como mencionamos, otras praxeologías ya no están presentes en E4, es decir, en alguna etapa formaron parte de AyGA pero identificamos que algunas migraron a otras materias y otras dejaron de estudiarse en las facultades de ingeniería.

Entre las que migraron, se encuentran:

- las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones: algebraicas (P2), exponenciales y logarítmicas (P3) y resolución numérica de ecuaciones (P24). Estas praxeologías "migraron" a materias de métodos numéricos y esto se explica porque inicialmente el álgebra consistía en la resolución de ecuaciones, y además en E3 el uso de la calculadora se masificó y en consecuencia las técnicas numéricas predominaron por sobre las algebraicas.
- las praxeologías que estudiaban números y sus aproximaciones, ya sea para la resolución de ecuaciones, para el tratamiento de cantidades aproximadas y la propagación de errores: fracciones continuas (P4), aproximación numérica (P21), el número real (P22) y series numéricas (P25) "migran" a diferentes áreas. Entre ellas, aproximación numérica (P21) e interpolación (P26) pasan a métodos numéricos; el número real (P22) y series numéricas (P25) a Cálculo o Análisis Matemático; análisis combinatorio (P11), teoría de conjuntos (P28) y estructuras algebraicas (P30) a Matemática Discreta.

Entre praxeologías que se eliminaron de los programas de AyGA identificamos que:

- algunas fueron absorbidas por la escuela media: trigonometría rectilínea (P6), trigonometría esférica (P7) aritmética (P10), geometría elemental (P12) y cosmografía (P13), producto de la proliferación de la enseñanza media en Argentina, desde mediados de 1860; y, en consecuencia, la transformación en el perfil del ingresante a la facultad de ingeniería.

– la incorporación de la calculadora y otros medios electrónicos de cálculo volvió obsoleto al estudio nomográfico (P27).
– la teoría general de ecuaciones (P9) pierde sentido con la concepción del álgebra vinculada al estudio de estructuras (E2). Si bien P9 es un tema del álgebra, no lo es para AyGA en el ciclo básico de los ingenieros.

Como hemos enfatizado, los cambios en el nivel disciplina están vinculados con las transformaciones de los niveles superiores de la escala: *sociedad*, *escuela* y *pedagogía*. En particular en la etapa E4, identificamos un ciclo básico común que está definido por agentes de la noósfera como el CONFEDI, y que luego está ratificado por la misma noósfera a través de organismos de control y certificación (CONEAU, ARCUSUR). Por otra parte, existe otro agente dentro de la noósfera que también afecta a los niveles de *pedagogía*, *disciplina*, *área* y *sector*; se trata de las corrientes filosóficas que perfilan las formas de *pensar* la matemática en la comunidad productora del saber en un determinado momento. El caso paradigmático (aunque en esta investigación identificamos otros además de este) es el de la llamada *matemática moderna* (Smithies, 1963; Font, 2003). Todos estos condicionantes operan en niveles en donde el profesor prácticamente no tiene injerencia. Consideramos, sin embargo, que al profesor le concierne la propuesta de un estudio conjunto de estas praxeologías y no tratarlas como “islas” dentro de AyGA como ocurre. Además, le corresponde evaluar la importancia de la utilidad de lo que se propone en nombre de un estudio con sentido para lo que sería la práctica profesional de un ingeniero.

6. Conclusiones

La red praxeológica propia de cada etapa expuesta en esta investigación da cuenta de que la permanencia, modificación, eliminación o incorporación de ciertas praxeologías en los programas de las materias de AyGA se explica por necesidades de orden superior, que afectan a la matemática a enseñar; y por supuesto por los cambios que se han dado al interior de la matemática. La *escala de los niveles de codeterminación didáctica*, se constituye como una herramienta idónea para poder identificar estos cambios que afectan a la *disciplina* (matemática), al *área* (AL y GA) y a los *temas*, es decir las praxeologías incluidas en los programas.

Del análisis relativo a las praxeologías de cada etapa, destacamos que, en los programas de estudio, no se identificaron praxeologías aisladas; es decir, la propuesta es estudiarlas juntas, cosa que habitualmente no ocurre. Los planes y

 BY-NC

programas de estudio y la red praxeológica que de ellos hemos reconstruido nos permite dar cuenta de que los saberes propuestos para estudiar en AyGA no deben ser escindidos o tratados separadamente. Por tal motivo, nos proponemos conocer también la vinculación entre AL y GA propuesta en los libros de texto que es otra de las referencias privilegiadas del profesor, y concluir en consecuencia, si la escisión es responsabilidad de éste, o está en el libro.

Declaración de contribución y autoría

Pablo Agustín, Sabatinelli: Investigación, Análisis de datos, Redacción en borrador original, Revisión y Edición.

Viviana Carolina, Llanos: Investigación, Marco Teórico, Análisis formal, Supervisión, Revisión y Edición.

Referencias

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *57*(4), 221-232. https://doi.org/10.2307/2305937

Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. *Advances in Mathematics Education* (p. 67-83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Boyer, C. B. (1944). Analytic geometry: The discovery of Fermat and Descartes. *The Mathematics Teacher*, *37*(3), 99-105. https://doi.org/10.5951/MT.37.3.0099

Carlson, D, Johnson, C. R., Lay, D. C. y Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973504

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. En *XVI Jornadas de Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Zaragoza. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

BY-NC

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education, 12*, 71-114. https://doi.org/10.24529/hjme.1205

Cristal, Y. (2020). *150 años de ingeniería argentina*. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina.

Dorier, J-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica, 22*(3), 227-261. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024

Euler, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 4*, 219-223.

Euler, L. (1802). *Vollständige Anleitungzur Algebra: Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen* (Vol. 2). Kaiserlichen Akademieder Wissenschaften.

Fiorucci, F. (2014). Maestros para el sistema de educación pública. La fundación de escuelas normales en Argentina (1890-1930). *Revista Mexicana de Historia de la Educación, 2*(3), 25-46. https://doi.org/10.29351/rmhe.v2i3.34

Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 249-279.

Español González, L., Martínez García, M., Álvarez Polo, Y. y Vela, C. (2010). Julio Rey Pastor y el análisis algebraico: de los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto (1917-1925). *Zubía, 28*, 139-166.

Katz, V, y Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201. https://www.jstor.org/stable/27822699

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático. De la antigüedad hasta nuestros días.* Alianza Editorial.

Massare, B. (2014). De los neumáticos a los chips: el rol de la I+D en el desarrollo de calculadoras y computadoras en la División Electrónica de FATE (1969-1982). En *Memorias del III Simposio de Historia de la Informática de América Latina y el Caribe (SHIALC)* (p. 78-91). Universidad de la República, Universidad Católica del Uruguay, Universidad ORT Uruguay, Universidad de Montevideo y Universidad de la Empresa. https://clei.org/site/wp-content/uploads/2022/11/proceedingsSHIALC2014.pdf

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. http://hdl.handle.net/11336/163090

Padilla y Arcos, P. (1753). *Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la guerra, para el uso de la Real Academia establecida en el Quartel de Guardias de Corps.* Antonio Marin. http://hdl.handle.net/2117/173258

Plan de Estudios de 1920 [Ministerio de Justicia e Instrucción Pública]. Se establece el plan de estudios para las carreras de la de la Facultad de Ciencias Matemáticas Físico-Químicas y Naturales aplicadas a la industria y Escuela Industrial anexa de la Universidad Nacional del Litoral. 22 de julio de 1920.

Resolución 68 de 1994 [Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional]. Se establece la parte homogénea del diseño curricular de las carreras de la Universidad Tecnológica Nacional. 22 de febrero de 1994.

Resolución 115 de 1810 [Propuesto por el Director y aprobado por la Junta]. Plan de la Escuela de Matemáticas. 10 de agosto de 1810.

 BY-NC

Sabatinelli, P., Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2021). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica, 26*, 21-51. https://doi.org/10.37261/26_alea/2

Sabatinelli, P. y Llanos, V. C. (2022). La escisión de la geometría analítica y el álgebra lineal en la enseñanza universitaria: ¿problema epistemológico o didáctico? *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática, 3*, e022002-e022002. https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/revin/article/view/638

Sabatinelli, P., y Llanos, V. C. (2024). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en la formación de ingenieros en Argentina desde 1810 a la actualidad: análisis macrodidáctico. *Revista Educación Matemática*, *36*(1), 121-156. https://doi.org/10.24844/EM3601.05

Smithies, F. (1963). What Is Modern Mathematics? *The Mathematical Gazette*, *47*(362), 278-298. https://doi.org/10.2307/3614069

Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., McDonald, J., Strong, D., y Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations, *Notices of American Mathematical Society, 69*(5), 813-819. https://dx.doi.org/10.1090/noti2479

Zalamea, F. (2011). Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. III. La matemática de las estructuras 1940-1970. *Boletín de Matemáticas, 18*(2), 143-156. https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/40837

Autores

Pablo Agustin Sabatinelli. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Tandil, Argentina. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina. pablosabatinelli@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-9686-3780

Viviana Carolina Llanos. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Tandil, Argentina. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

https://orcid.org/0000-0003-0433-2654

BY-NC

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame),* asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

- Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
- Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
- Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
- Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
- Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

- *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

 CC BY-NC

– *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
– *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
– *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Los manuscritos se envían a través del gestor editorial de la Relime, durante los periodos indicados en la página web, y deben seguir las Normas de publicación de la revista.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

 CC BY-NC

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 27, Número 2

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Julio de 2024
Impresión bajo demanda