EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 23-2

9 771665 243002 02302

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 23, Núm. 2, julio 2020

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime

Vol. 23, Núm. 2, 2020

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 23, Núm.2, julio, 2020. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2020 Impreso en México

Volumen 23 – Número 2 – 2020

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Volumen 23 Número 2 Julio de 2020

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 23, Número 2, se terminó de imprimir en julio de 2020, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

LA MATEMÁTICA EDUCATIVA EN TIEMPOS DE CRISIS, CAMBIO Y COMPLEJIDAD

MATHEMATICS EDUCATION IN TIMES OF CRISIS, CHANGE AND COMPLEXITY

RICARDO CANTORAL
PIDPDM, Cinvestav-IPN México

Los cambios sociales derivados de la contingencia por CoVID 19, afectan por igual esferas sanitarias, productivas, económicas y educativas por citar algunas de las más relevantes. En este editorial, en virtud de la audiencia especializada que sigue a nuestra revista – *Relime*, planteamos interrogantes para el futuro cercano, éstas relativas a tres perspectivas prioritarias, todo con la esperanza de que una respuesta amplia, aunque no consensada, sea dada en los espacios de reflexión de nuestras propias comunidades.

- *Perspectiva 1.* El estudio de las conexiones matemáticas.
  - Conexiones entre áreas de la misma matemática (temáticas, problemas, teoremas, etc.) y respecto de las matemáticas y su correlato en la vida social (contextos, aplicaciones, modelos, matematizaciones y campos nuevos).
- *Perspectiva 2.* La virtualidad en la enseñanza de las matemáticas.
  - La ampliación de la brecha tecnológica y de la llamada doble brecha (social y tecnológica). El efecto didáctico del software educativo centrado en representaciones que domina en la enseñanza contemporánea de la educación básica carente de análisis sobre sus limitaciones.
- *Perspectiva 3.* La labor editorial durante la contingencia.
  - Las exigencias institucionales, la lejanía del lugar habitual de trabajo, la imposibilidad de "experimentación educativa" en aula, escuela o sistema y el papel de la "ciencia abierta" con "costos cerrados".

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (2): 143-146.
DOI: 10.12802/relime.20.2320

El área de las conexiones matemáticas ha tenido un incremento considerable en la literatura especializada de los últimos años, no sólo desde el punto de vista de la modelación matemática con fines educativos o de los estudios sobre transferencia y transversalidad, inter, multi y transdisciplina, sino de las corrientes teóricas que atienden la diversidad cultural (Socioepistemología, Etnomatemática o Matemática Crítica), así como de corrientes pedagógicas que se orientan hacia la matemática en uso, la matemática en contexto, encuadres socioculturales, la matemática para la vida, matemáticas a lo largo de la vida, matemáticas para todos y así un largo etcétera.

Los trabajos de modelación matemática pretenden explicar, a fin de describir fenómenos para anticipar desenlaces o prescribir estrategias de contención ante contingencias de naturaleza diversa, a partir de estudios propiamente analíticos, estocásticos, fenomenológicos, basados en complejidad y caos con grandes cantidades de datos. Estos esfuerzos, se expresan progresivamente en el área de modelación con fines educativos y consideramos que ampliarán la noción misma de modelación donde los emergentes de la complejidad sean también objetos de estudio.

¿Cómo modificará la contingencia mundial a estos enfoques teórico – metodológicos?

Si bien la enseñanza a distancia tiene ya varias décadas y ha enfrentado diferentes retos a lo largo de su existencia, hoy día vuelven viejas críticas sobre la simultaneidad de la enseñanza con el aprendizaje y el papel de la libre escritura (en papel o pizarrón) tan necesaria en matemáticas. Sin embargo, la expansión de las redes sociales dio a la virtualidad una "carta de ciudadanía" que llevó a considerar una falacia "todos tienen y manejan las redes sociales", pero, ¿es igual en matemáticas?

Dos hechos en particular no se han dirimido del todo, el relativo a la mercantilización del espacio virtual con el eventual riesgo de ampliación de la brecha social como consecuencia colateral de la brecha tecnológica, y respecto del papel de la interacción en los actos de aprendizaje a través de las redes de producción y difusión del conocimiento. Se hace necesario atender la noción de interacción (Montiel, 2005) por sobre incluso de la noción de proximidad física. La virtualidad señala, que más que la presencia simultánea de los actores, lo verdaderamente significativo es la interacción entre alumnos y profesores, dimensión que escapa de la problemática centrada en el saber, aunque bajo las posturas socioculturales, no resulta ajena.

En ese sentido, un aspecto que aparece cada vez con mayor énfasis en estos tiempos es la dimensión afectiva, pues juega un rol fundamental en la construcción de identidades y escenarios propicios para el aprendizaje.

Ha quedado de manifiesto, por otra parte, que el software educativo ha puesto su mayor énfasis en el tratamiento y la conversión de representaciones, lo que a la vez que amplía los recursos didácticos, también limita sus posibilidades en diversas esferas de la creación humana en matemáticas. Cómo escribir ecuaciones, trazos, diseños, bocetos y pruebas en la clase de matemáticas, mediante el empleo de tabletas digitales con el recurso de escritura libre aumenta la inversión financiera y reduce, en términos de urgencia, su posibilidad de uso en grandes sectores poblacionales.

¿Cómo afectará la contingencia a las interacciones con fines de aprendizaje?

En este periodo algunos autores y revisores han debido limitar, así sea temporalmente, el envío de sus contribuciones en la medida en la cual los suministros quedaron bajo el resguardo institucional respectivo (libros, notas, borradores); otros más, han postergado sus envíos ante la ausencia de espacios (escuelas, laboratorios, aula extendida) donde sea posible llevar a cabo las puestas en escena o el trabajo experimental o entrevista in situ. Esto plantea una crisis que redundará no sólo en la publicación científica, sino también afectará en la elaboración de tesis de grado que se quedaron en curso y que se basan fuertemente en un componente experimental.

En esa línea, dentro del contexto editorial, el tema del *acceso abierto*, al que *Relime* se acogió desde su fundación, si bien ha sido un objetivo regional e internacional, también mengua la sustentabilidad financiera de las revistas no comerciales, pues los recursos en todo tiempo provienen de las comunidades de referencia, lo cual en estos momentos esto es mas acucioso debido al periodo latente de crisis económica generalizada. Recientemente se acordó que la ciencia producida por financiamiento público debía difundirse libremente, de ahí que las grandes compañías debían favorecer el acceso libre a la lectura de sus acervos bibliográficos. Sin embargo, también se ha discutido si el costo no será asumido por los lectores, entonces habría de ser financiable por los autores... Brechas y más brechas.

¿Cómo financiar el acceso abierto en tiempos de crisis?

Estas tres preguntas serán temas de discusión en diversos foros y con énfasis diferenciados. El riesgo de no anticipar las consecuencias de esta contingencia debida al CoVID puede afectar sensiblemente el curso de nuestro quehacer.

Referencias bibliográficas

Bossio, J., Cantoral, R., Parra, M. (2020). *La educación a distancia, en particular de la Matemática, durante y post pandemia COVID 19* [Webinar]. Matemática Educativa, los retos de la virtualidad, UPC – CLAME. https://bit.ly/38Nvv9q

Cantoral, R. et al. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Artículo especial*, 1-19

Montiel, G. (2005) Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 219-233.

Fabiane Fischer Figueiredo, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

DESIGN, (RE)FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Design, problem posing and solving with the use of digital technologies in the initial training of mathematics teachers

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de una investigación cualitativa, en la cual el objetivo fue investigar qué conocimiento es producido por futuros maestros de matemáticas, en aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos y sobre el enfoque de temas socialmente relevantes, a través del diseño, (re)formulación y resolución de problemas abiertos y la planificación e implementación de prácticas pedagógicas, en las cuales se proponen dichos problemas. Para lograr esto, tres estudiantes, en un grupo, llevaron a cabo las actividades de un curso de extensión, lo que les permitió adquirir experiencias, y que contribuyó a la producción de conocimientos docentes, relacionados con el diseño de problemas abiertos y que abordan temas de relevancia social, con el uso de tecnologías digitales y sobre la planificación e implementación de prácticas pedagógicas, en las cuales se evidencia la (re)formulación y resolución de estos problemas.

PALABRAS CLAVE:

- *Diseño de problemas abiertos*
- *(Re)formulación y resolución de problemas*
- *Tecnologías digitales*
- *Formación inicial del profesorado*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

This article presents the results of a qualitative investigation, in which the objective was to investigate what knowledge is produced by future mathematics teachers, in mathematical, methodological, technological aspects and about the approach of socially relevant themes, through design, posing and resolution of open problems and the planning and implementation of pedagogical practices, in which such problems are proposed. To achieve this, three students, in a group, carried out the activities of an extension course, which allowed them to acquire experiences, which contributed to the

KEY WORDS:

- *Open problem design*
- *Problem posing and solving*
- *Digital technologies*
- *Initial teacher training*
- *Mathematics*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (2): 147 - 174.
Recepción: Agosto 19, 2019 / Aceptación: Julio 17, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2321

production of teaching knowledge, related to the design of open problems and which address topics of social relevance with the use of digital technologies and about the planning and implementation of pedagogical practices, in which the posing and resolution of these problems are evidenced.

RESUMO

Neste artigo apresentam-se os resultados de uma investigação qualitativa, em que o objetivo foi investigar quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores de Matemática, nos aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, por meio do *design*, da (re)formulação e resolução de problemas abertos e do planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que tais problemas são propostos. Para atingi-lo, três alunas, em grupo, realizaram as atividades de um curso de extensão, que as permitiram a aquisição de experiências, que contribuíram para a produção de conhecimentos docentes, relativos ao *design* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais e acerca do planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que a (re)formulação e resolução desses problemas são evidenciadas.

PALAVRAS CHAVE:

- Design *de problemas abertos*
- (*Re*)*formulação e resolução de problemas*
- *Tecnologias digitais*
- *Formação inicial de professores*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats d'une enquête qualitative, dans laquelle l'objectif était d'étudier quelles connaissances sont produites par les futurs professeurs de mathématiques, dans les aspects mathématiques, méthodologiques, technologiques et sur l'approche de thèmes socialement pertinents, à travers le design, (re)formulation et résolution de problèmes ouverts et planification et mise en œuvre de pratiques pédagogiques, dans lesquelles de tels problèmes sont proposés. Pour y parvenir, trois étudiants, en groupe, ont réalisé les activités d'un cours de vulgarisation, qui leur a permis d'acquérir des expériences, qui ont contribué à la production de connaissances pédagogiques, liées à la conception de problèmes ouverts et qui abordent des sujets d'intérêt social avec l'utilisation des technologies numériques et la planification et la mise en œuvre de pratiques pédagogiques, dans lesquelles la (re)formulation et sur la résolution de ces problèmes sont mises en évidence.

MOTS CLÉS:

- *Conception de problèmes ouverts*
- (*Re*)*formulation et résolution de problèmes*
- *Technologies numériques*
- *Formation initiale des enseignants*
- *Mathématiques*

1. Introdução

A formação de professores de Matemática, de acordo com as necessidades educacionais requeridas para o desempenho profissional, exige do(s) professor(es) formador(es) a proposta de atividades, que permitam aos futuros professores, que, neste momento, são alunos em formação inicial, o estudo, a discussão, a investigação e a reflexão sobre as perspectivas educacionais. Nesse viés, destaca-se o *design* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais, para propiciar as atividades de (re)formulação[1] e resolução de problemas com o uso desses recursos, por ser uma perspectiva metodológica que associa outras, como os problemas do tipo abertos, a (re)formulação, a resolução de problemas e o uso de tecnologias digitais, e possibilita, aos futuros professores, o exercício dos papéis de *designer* e professor, ao proporem tais problemas a alunos da Educação Básica, de modo que essas experiências possam incidir na produção de conhecimentos e no desenvolvimento de competências e habilidades docentes (Figueiredo & Groenwald, 2018).

O estudo teórico-prático sobre a (re)formulação e resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais, quando ocorridos no processo formativo de futuros professores de Matemática, se configuram como meios, tal como afirma Imbernón (2011), para a construção do conhecimento básico especializado. Para o autor, as metodologias utilizadas pelo(s) professor(es) formador(es), com seus alunos em formação inicial, devem fomentar os processos reflexivos acerca da Educação e realidade social, proporcionando-lhes diferentes experiências, que valorizem as formas de cooperação e trabalho em equipe, assim como o desenvolvimento de competências, sendo elas a tomada de decisões e as atitudes investigativas, interativas e dialéticas, que ajudem-nos a configurar e refletir sobre as suas próprias opções pedagógicas.

Devido às potencialidades, que podem emergir a partir dessa perspectiva, entende-se que a incorporação e integração de tais metodologias e o uso desses recursos, no seu planejamento pedagógico, quando vierem a atuar profissionalmente, requer que os alunos, em formação inicial, sejam preparados para a sua utilização, por meio das experiências de *designer* e professor, que contribuam para a formação do perfil de professor de Matemática (Figueiredo, 2017). Com isso, poderão produzir conhecimentos relativos aos aspectos matemáticos,

[1] Tal expressão é escrita em Língua Inglesa como problem posing e apresenta outras denominações em Língua Portuguesa e/ou Espanhola, como por exemplos: apresentação de problemas, criação de problemas, geração de problemas, invenção de problemas, determinação de problemas, reformulação de problemas e formulação de problemas. Entre elas, optou-se por utilizar a "(re)formulação de problemas" ou "(re)formulação e resolução de problemas" (como atividades associadas), por abranger tanto a atividade de reformular como de formular problemas.

metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, que os tornem aptos a realizarem outros *designs* de problemas, conforme as necessidades educacionais, e mediando o processo de ensino e aprendizagem de seus futuros alunos, através da (re)formulação e resolução desses problemas com o uso de tecnologias digitais.

Destaca-se, também, que, entre as competências e habilidades, que podem ser aprimoradas e/ou desenvolvidas, por meio de tais experiências: a criatividade, para propor problemas na prática docente; a inovação e a tomada de decisões pedagógicas, adquirindo confiança na utilização dessas metodologias associadas e dos recursos didáticos; a reflexão sobre as escolhas feitas como docente, que favorecem a produção de conhecimentos matemáticos, por parte dos alunos da Educação Básica; o reforço da competência de resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais; e a integração das tecnologias digitais no planejamento pedagógico (Figueiredo, 2017).

Dessa forma, neste artigo, apresentam-se os aportes teóricos construídos e os resultados obtidos com uma investigação, realizada no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) e do grupo de pesquisa de Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM), na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, no ano de 2019. Participaram, além das pesquisadoras, três alunas, que estavam matriculadas no quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática, do total de oito semestres de formação docente, que o referido curso está composto. A investigação consistiu no *design* de um problema aberto e que abordou um tema de relevância social, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas com o uso das tecnologias digitais. Tal problema foi utilizado pelas futuras professoras, em um planejamento pedagógico, para uma turma de alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, que, na sua execução, em sala de aula, puderam observar os resultados na prática. Essas atividades foram realizadas no decorrer do curso de extensão, intitulado *Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação na Educação Matemática*, ofertado na investigação realizada, na mesma Instituição.

Com a realização da investigação, buscou-se responder à questão diretriz: *Como ocorre o design de problemas abertos e o planejamento e realização de práticas pedagógicas, para proposta de (re)formulação e resolução desses problemas, com o uso de tecnologias digitais, na formação inicial de professores de Matemática?* Ademais, pretendia-se atingir o objetivo geral: investigar quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores de Matemática, nos aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, por meio do *design*, (re)formulação e resolução de problemas abertos e do planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que tais problemas são propostos.

2. Referencial teórico

O *design* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais é, conforme Figueiredo (2017), uma perspectiva metodológica a ser empregada na formação inicial de professores, com os alunos de Licenciatura(s) em Matemática, pois os experimentos de *design* de enunciados e planejamento pedagógico favorecem a criação de novos enunciados de problemas e consonantes com as necessidades educacionais. Para Figueiredo & Groenwald (2018), esses experimentos devem ser realizados a partir do enfoque da (re)formulação e resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais, de modo que possam estudar, discutir, investigar e refletir, no seu processo formativo, sobre como podem ser desenvolvidos os conceitos matemáticos, utilizadas as tecnologias digitais e abordados os temas de relevância social, preparando-os para a sua integração ao seu fazer pedagógico de sala de aula, na disciplina de Matemática.

Para atingir os objetivos de formação inicial, entre eles, a preparação para o desempenho da profissão docente, a produção de conhecimentos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e relativos à abordagem de temas de relevância social e o desenvolvimento de competências e habilidades profissionais, podem ser executadas as etapas propostas por Figueiredo (2017), que foram identificadas a partir das que são mencionadas por Filatro (2008) para o *Design* de Sistemas Instrucionais ou *ISD*[2] (análise da necessidade, projeto, desenvolvimento e implementação da solução e avaliação da mesma): *formação do grupo de trabalho (designers)*; *análise das necessidades*; *projeto / planejamento, desenvolvimento e implementação*; *avaliação da primeira versão do problema*; *discussão e reflexão por parte dos designers*; e *realização de modificações ou do re-design, para obter a segunda versão do problema*. Nesse processo, pode ser utilizado o recurso *storyboard,* "[...] na fase de pré-produção, [...] [que] funciona como uma série de esquetes (cenas) e anotações que mostram visualmente como a sequência (sic) de ações deve se desenrolar" (Filatro, 2008, p. 60).

Ainda, para complementar tais etapas, podem ser acrescentadas outras: *planejamento da prática pedagógica*; *realização da prática pedagógica*; e *discussão e reflexão por parte dos resolvedores e do(s) designer(s)* (Figueiredo, 2017). Ao propor os problemas produzidos a alunos da Educação Básica, em uma prática pedagógica, os futuros professores têm a oportunidade de verificar os resultados e isso ocasionará discussões e reflexões, que os auxiliem no processo de depuração das informações observadas e na (re)construção de suas

2 "Instructional System Design"

concepções quanto à prática, denominada como os processos de *conhecer-na-ação* e de *reflexão-na-ação*, que ocasionam na produção de novos conhecimentos, necessários ao desempenho profissional como educador matemático, ou seja, o *conhecimento-na-ação* (Schön, 2000). Esses processos complementam, simultaneamente, à ação de *design*, com fins instrucionais.

Na formação inicial, essas possibilidades podem proporcionar, tal como preconiza Imbernón (2011, p. 63), a aquisição "[…] de uma bagagem sólida nos âmbitos científico, cultural, contextual, psicopedagógico e pessoal [e][…] capacitá-lo a assumir a tarefa educativa em toda sua complexidade, atuando reflexivamente com a flexibilidade e o rigor necessários […]". Para tanto, devem ter a oportunidade de criar as estratégias e métodos de intervenção, cooperação, análise e reflexão, por meio da observação, debates, reflexões, análise crítica da realidade social e processos de aprendizagem.

Ao realizá-los, o(s) *designer(s)* (aluno(s) de Licenciatura(s) em Matemática, sob as orientações do(s) professor(es) formador(es)), pode(m) levar em consideração as tecnologias digitais que são disponibilizadas pelas instituições de ensino, para que os alunos da Educação Básica aprendam à utilizá-las na solução dos problemas, bem como os seus interesses, conhecimentos prévios e níveis de desenvolvimento cognitivo (Figueiredo, 2017). Entende-se que, a escolha e abordagem de um tema de relevância social, que trate de situações que se assemelham as que vivenciam no seu cotidiano e/ou que possam instigar o seu estudo, podem favorecer tanto o *design* de enunciados, de acordo com tais intencionalidades, como o planejamento pedagógico, em que é previsto o modo como os problemas serão propostos e (re)formulados e resolvidos, a fim de que empreguem ou produzam novos conhecimentos.

Também, no que diz respeito aos temas de relevância social, destaca-se os que podem contextualizar os problemas, que são os "Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)": Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente, Multiculturalismo, Economia, Saúde, Cidadania e Civismo (Brasil, 2019). Esses temas podem contribuir para o desenvolvimento das habilidades de elaboração e resolução de problemas, que são mencionadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a Educação Básica do país (Brasil, 2018).

No que se refere ao Ensino Médio, segunda etapa da Educação Básica, Olgin (2015) menciona que podem ser estudados os temas: Contemporaneidade, Político-Social, Cultura, Meio Ambiente, Conhecimento Tecnológico, Saúde, Temas Locais e os que envolvem os Conhecimentos Intramatemáticos; sendo que a Educação Matemática Financeira pode ser associada a um ou mais deles. Pela proposta do Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF):

> A Educação Financeira nas escolas se apresenta como uma estratégia fundamental para ajudar as pessoas a enfrentar seus desafios cotidianos e a realizar seus sonhos individuais e coletivos. Discentes e docentes financeiramente educados são mais autônomos em relação a suas finanças e menos suscetíveis a dívidas descontroladas, fraudes e situações comprometedoras que prejudiquem não só a própria qualidade de vida como a de outras pessoas (Brasil, 2013, p.1).

Além disso, salienta-se que, no *design* de enunciados, podem ser atribuídos características e aspectos, que, com o uso de tecnologias digitais, são potencializados no processo de resolução dos problemas: a visualização, por meio do uso e da análise de imagens; a simulação, ao serem propostas experiências semelhantes as do cotidiano; a investigação, através da apresentação de frases e questionamentos, que necessitem a busca de informações que as complementem e os respondam; a reflexão crítica, relativa ao tema social abordado a comunicação oral e escrita, nas discussões e reflexões, no registro do processo e na apresentação de uma solução; os aspectos estéticos, referentes às cores, imagens, sons, etc.; entre outros (Figueiredo, 2017). Entre eles, destacam-se as características dos problemas dos abertos e a (re)formulação, devido que o resultado do *design* é um enunciado, que precisa apresentar um ou mais problemas abertos, que propiciem a (re)formulação e resolução dos problemas com o uso de tecnologias digitais.

Os problemas abertos, conforme Allevato (2008), *possibilitam a exploração dos conteúdos matemáticos, oferecem as opções de escolhas e valorizaram a* exposição de ideias. *O* trabalho dos alunos é, em parte, direcionado, visto que "são questões com um enunciado que delimitam um contexto, e o estudante é convidado a explorar aquela situação. O problema aberto [...] o deixa livre para perceber quaisquer relações matemáticas naquele contexto" (Paterlini, 2010, p. 2). Contudo, esses problemas admitem distintos pontos de partida e processos de resolução, que valorizam os conceitos matemáticos e as estratégias mentais, e, até mesmo, as distintas necessidades educacionais que se apresentam, em uma mesma sala de aula (Van de Walle, 2009).

Ademais, Pehkonen, Näveri & Laine (2013) enfatizam que, o desenvolvimento da compreensão e do pensamento matemático, por serem objetivos do ensino da Matemática, esses podem ser atingidos com a proposta ou tarefa de problemas abertos, que são um tipo de abordagem metodológica, baseada na visão construtivista da aprendizagem. Ao propô-los, em sala de aula, o professor pode promover o ensino através de problemas, centrado em ambientes ideais de aprendizado, em que os alunos participam ativamente do processo, aumentando claramente a sua capacidade de comunicação e o entendimento dos princípios e conceitos estudados. Esse tipo de proposta ou tarefa, também é uma oportunidade para serem resolvidos problemas reais, em que os respondem e aprendem em situações naturais, por meio de investigações independentes e da busca de soluções.

No que se refere à (re)formulação, os alunos podem ser os protagonistas e o professor atuar como o mediador do processo, para que ocorra a retomada de conceitos matemáticos e a revisão ou produção de novos conhecimentos matemáticos, tecnológicos e sobre temas de relevância social. Na resolução de problemas, pode contribuir para o emprego de competências e habilidades, como, por exemplos, a interpretação, tomada de decisões e escolha ou elaboração de estratégias, que permitam a obtenção de uma ou mais soluções (Figueiredo, 2017).

Para Silver (1994), a (re)formulação pode ser definida como a elaboração de outros problemas ou a reformulação de um problema proposto, podendo ocorrer antes, durante ou após a resolução. Todavia, quando a (re)formulação se dá durante, há um planejamento de como obter uma nova versão para o problema, em que o aluno o personifica, (re)cria e determina as metas que serão atingidas com a solução.

Kilpatrick (2017), salienta que a (re)formulação exige dos alunos o entendimento das dimensões de um problema, de como são construídos e podem ser resolvidos. Todavia, sugere que sejam propostos aos alunos os *não rotineiros*, que contribuem para o desenvolvimento da criatividade e originalidade, se constituindo como objetivo e um meio para o ensino da Matemática.

Vale, Pimentel & Barbosa (2015), ressaltam que o professor pode utilizar estratégias que encorajem os alunos a (re)formularem problemas nas aulas de Matemática, que aprofundem os conceitos matemáticos e contribuam para que ampliem a compreensão dos processos envolvidos na resolução. No entanto, essas estratégias dependem dos conteúdos matemáticos, do tipo de raciocínio que deverão ser desenvolvidos e do método de avaliação, bem como do nível de conhecimento dos alunos. As autoras, ainda, destacam que a (re)formulação de problemas pode suscitar a criatividade, que favorece o desenvolvimento de outras capacidades, entre elas a percepção dos conhecimentos matemáticos subjacentes, o pensamento crítico e capacidade de expor as ideias envolvidas na resolução do problema. Nesse intuito, é preciso proporcionar:

> Contextos em que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas, usando diferentes estratégias, mas também [de] formular problemas, permite que se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar

padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 47).

Jurado (2017), aponta que a (re)formulação pode favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades de: analisar situações problemáticas, identificar ou criar problemas, resolver problemas, elaborar questionamentos, buscar respostas e de refletir criticamente sobre a realidade. Mas para que tais capacidades se apresentem e/ou sejam desenvolvidas, o autor sugere, também, que as situações propostas devem apresentar um ou mais elementos fundamentais de um problema, ou seja: *as informaçõe*s, que seriam os dados relevantes e/ou quantitativos apresentados no enunciado; *as exigências*, que são as solicitações requeridas, como encontrar, examinar ou concluir a resolução do problema, quantitativa ou qualitativamente (exemplo: gráficos e demonstrações); *o contexto intra* (situação dada ou criada pelo aluno) ou *extra* (situações que ocorrem no dia a dia) matemático; e *o ambiente matemático*, que envolve a estrutura e os conceitos matemáticos que interferem na resolução e solução.

Abramovich (2015) salienta que, nessa atividade, os recursos tecnológicos podem contribuir para a representação das condições e dos dados numéricos ou algébricos de um problema e para a obtenção de uma ou várias soluções e a(s) sua(s) análise(s). Esses recursos, na (re)formulação e na resolução de problemas, podem instigar a reflexão quanto os procedimentos empregados e os conceitos matemáticos envolvidos. Para isso, menciona que os professores precisam ter a oportunidade de discutir e refletir criticamente, para que compreendam didaticamente como os problemas matemáticos, com o uso desses recursos, são propostos e quais resultados podem gerar com o uso desses recursos.

Por outro lado, além do estudo, da discussão, investigação e reflexão sobre o *design* de enunciados de problemas abertos com o uso de tecnologias digitais, na formação inicial de Matemática, se faz necessário, também, a incorporação da (re)formulação na resolução desses problemas. Segundo Crespo (2003), os processos formativos que desafiem e ampliem as ideias docentes, que permitam a escolha de problemas e as experiências de selecionar ou criar problemas e de propô-los, sob tal enfoque, para constar os resultados na prática pedagógica, podem ser estratégias para (re)pensar como os problemas matemáticos são apresentados aos alunos e gerar novos planejamentos, que ocasionem a produção de conhecimentos.

Nesse viés, acredita-se a aquisição das experiências de *designer* e *professor* pode ser melhor compreendida, em termos pedagógicos, a partir das concepções de O'Dell (2001), quando esse se refere à necessidade de desenvolver a criatividade e instigar a inovação no processo de resolução. Embora que apresente exemplos de resolução, em diferentes contextos e áreas, que não o de formação inicial de professores de Matemática, ele destaca os aspectos formativos, no caso o Modelo *4P+F*, em que a criatividade pode implementar a inovação (Figura 1).

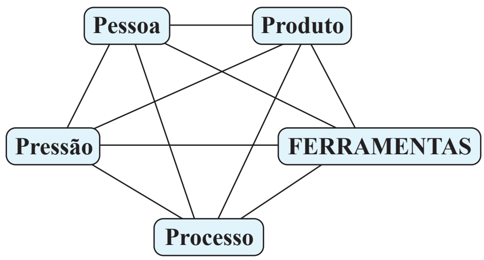


Figura 1. Modelo 4P+F (O'Dell, 2001)

Nesse modelo, os quatro *Ps* representam os atributos, que podem ajudar na descrição desses aspectos. Esses atributos seriam:

- *P de pessoa*, em que a pessoa pode avaliar ou ser avaliado quanto ao seu estilo ou preferência na resolução de problemas, utilizando, para isso, abordagens e teorias;
- *P de processo*, que requer o reconhecimento das etapas de resolução, um plano ou mapa que contribua para a obtenção do resultado esperado e a consideração da cultura organizacional ou do clima que existe no ambiente, para que possa gerar e usar as suas ideias;
- *P de Produto*, em que é obtido um resultado, ou seja, um objeto ou um processo, que possui características que, ao serem identificadas, podem ser exploradas ou alteradas para aprimorá-lo;
- *P de pressão*, que é a cultura organizacional ou clima que age de imediato sob os outros *Ps* e afeta o ambiente e a resolução de problemas.

A letra *F, de ferramentas*, significa que os recursos e métodos são utilizados para associar os quatro *Ps*, sendo essas, capazes de associar as *fases divergentes* (produção de um conjunto de opções) e *convergente* (avaliação e julgamento dessas opções).

Com o propósito de contribuir para resolução criativa de problemas e a tomada de decisões para a inovação, O'Dell (2001) apresenta a ferramenta denominada *Quatro Diamantes*, que pode ocorrer no *P de processo* e envolver as *fases divergentes* e *convergentes*, da seguinte maneira: a análise do problema, a definição do problema, a geração de ideias e o planejamento de ações ou de implementação (Figura 2). Tal ferramenta pode colaborar para o entendimento da diversidade de ideias e perfis de um grupo e do resultado que obtiveram.

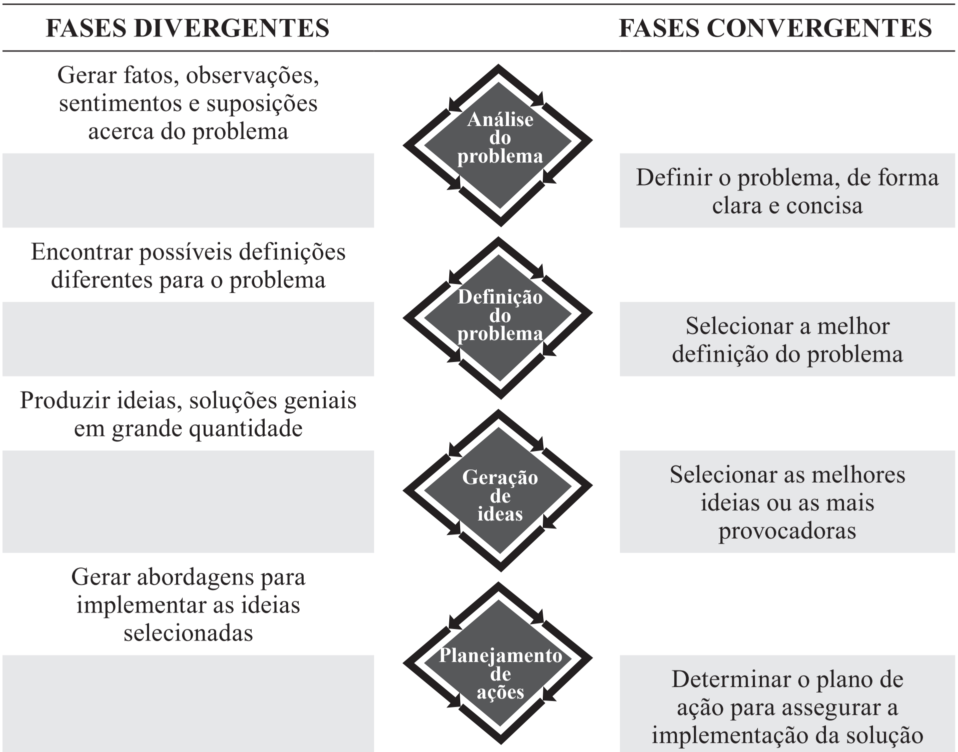


Figura 2. Etapas do processo "Quatro diamantes" (O'Dell, 2001)

Desse modo, compreende-se que o *design* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais, com o objetivo de propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas, utilizando os recursos tecnológicos, é uma perspectiva metodológica que pode possibilitar as experiências de *designer* e professor, aos futuros professores de Matemática, visto que permite que produzam conhecimentos, referentes a aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social (Figueiredo, 2017), que são necessários para a aquisição de conhecimento básico especializado (Imbernón, 2011), e para torná-los, assim, preparados para a realização de novos *designs* e a utilização dos problemas produzidos em seus planejamentos e no decorrer das práticas pedagógicas, em sala de aula, na Educação Básica. Ademais, pode favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades profissionais, como a tomada de decisões pedagógicas, a escolha e o uso de tecnologias digitais, a criatividade e a inovação, a identificação de características e aspectos que devem atribuídos ao *design* para que os problemas ocasionem a (re)formulação o processo de resolução, a discussão, investigação e reflexão quanto às práticas de *design* e pedagógica (Figueiredo, 2017).

3. Percurso metodológico

Com a intencionalidade de atingir o objetivo de investigar quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores de Matemática, nos aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, por meio do *design*, (re)formulação e resolução de problemas abertos e do planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que tais problemas são propostos, determinou-se: os participantes e contextos, os instrumentos de coletar os dados, as atividades propostas e a análise dos resultados.

3.1. *Participantes e contextos*

No desenrolar da investigação, houve a participação, além das pesquisadoras, de 10 alunos, provenientes do curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA, que, no momento da sua realização, estavam cursando o quarto semestre. As atividades planejadas pelas pesquisadoras e propostas, foram realizadas no curso de extensão semipresencial denominado *Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação na Educação Matemática*, que teve 60 horas de duração, sendo essas distribuídas em 5 encontros presenciais (25 horas) e 8 encontros não presenciais, extraclasse (35 horas). No entanto, apresentam-se apenas um recorte dos dados coletados entre o 5º a 13º encontros do curso, que são referentes ao processo formativo de um dos grupos de trabalho, constituído pelas alunas D, E e F, que são nomeadas por letras maiúsculas, para preservar as suas respectivas identidades.

3.2. *Instrumento de coleta de dados*

De acordo com objetivo pretendido, adotou-se a abordagem qualitativa e o método estudo de caso, já que possibilitam a compreensão das concepções (re)construídas pelos participantes, no seu processo formativo (Yin, 2016). Em relação ao método, esse favoreceu o "[...] estudo de um determinado caso [...], descrevendo ou explicando os eventos [...]" (Yin, 2016, p.277), pois optou-se por explicitar e analisar os indícios acerca da ocorrência do processo formativo do grupo de trabalho, formado pelas alunas D, E e F.

Para coletar os dados, utilizou-se os seguintes instrumentos: observações participantes, que foram realizadas pelas pesquisadoras e alunas, sendo registradas em documentos de *word*; gravações de áudio e vídeo, com o uso do *software* *Screencast-O-Matic*[3], que ocorreram nos encontros presenciais; Ambiente Virtual

[3] É um *software* livre, que permite a criação de vídeos a partir da gravação das ações feitas na tela do computador e do áudio das comunicações, enquanto essas ações ocorrem (Screencast-O-Matic, 2018).

de Aprendizagem *Moodle* (ULBRA, 2018), onde as atividades foram propostas e realizadas; e entrevistas semiestruturadas, que ocorreram após a realização da prática pedagógica.

3.3. *As atividades propostas*

Os dados coletados foram obtidos entre o 5º e 13º encontros presenciais e não presenciais do curso de extensão (Quadro 1).

QUADRO 1
Principais atividades propostas e realizadas entre o 5º e o 13º encontros do curso

Encontro(s) / Duração	*ATIVIDADES PROPOSTAS*
5º e 6º encontros presenciais 6 horas	Realização, em dupla ou trio, do *design* de um enunciado com um ou mais problemas abertos, utilizando das tecnologias digitais e abordando um tema de relevância social para obter a primeira versão.
7º e 8º encontros não presenciais 6 horas	Realização de modificações, para obter uma segunda versão e definitiva. Participação no Fórum "Refletindo sobre o design dos problemas com o uso de tecnologias digitais", proposto no Moodle.
9º ao 12º encontro não presenciais 7 horas	Planejamento da prática pedagógica, em que o(s) problema(s) produzido(s) serão propostos e resolvidos por alunos da Educação Básica, dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Realização da prática pedagógica, na Escola e com os alunos escolhidos; Registros, por escrito, das observações realizadas pelo grupo, quanto ao desenrolar da prática pedagógica.
13º encontro presencial 3 horas	Discussão, investigação e reflexão sobre a prática pedagógica realizada, por meio de uma entrevista semiestrutura. Participar no Fórum "Realização da prática pedagógica".

Nesses encontros, as alunas D, E e F realizaram as atividades, que contribuíram para que obtivessem o enunciado do problema e planejassem e realizassem a prática pedagógica, em que esse seria proposto, bem como a posterior discussão, investigação e reflexão sobre os resultados alcançados.

3.4. *Análise dos dados*

Para analisar os dados, considerou-se o problema e objetivo de investigação, o referencial teórico construído e as fases analíticas e suas interações, que são mencionadas Yin (2016): *compilação*, em que são reunidos e organizados os dados coletados; *decomposição*, que esses são fragmentados ou separados em grupos menores; *recomposição*, cujos fragmentos ou elementos são reorganizados, em grupos e sequências diferenciadas da organização original *interpretação*, que seria a utilização dos dados recompostos para produzir narrativas, tabelas e gráficos (se forem necessários), para determinar as interpretações iniciais; e *conclusão*, em que são utilizadas as interpretações da quarta fase e retiradas as conclusões da investigação. Desse forma, entre a primeira e a quarta fases, foram identificadas as categorias de análise: *design* de enunciados de problemas abertos e que abordam temas de relevância social, com o uso de tecnologias digitais, para propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas, com tais recursos; discussão, investigação e reflexão sobre o *design* dos problemas e os resultados da prática pedagógica que planejarem e realizaram, em que a (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais foi realizada pelos alunos do Ensino Médio; conhecimentos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social produzidos e as competências e habilidades profissionais apresentadas e/ou desenvolvidas.

Na análise do recorte do processo formativo das alunas D, E e F considerou-se os resultados: as etapas do *design* e o enunciado do problema que produziram; o plano de aula, que corresponde ao planejamento prévio da prática pedagógica; e as respostas para os questionamentos da entrevista semiestruturada, que ocorreu após a sua realização.

4. Os resultados da investigação

Do quinto ao oitavo encontros do curso de extensão, foram propostas atividades com a finalidade que os alunos, do curso de extensão, realizassem o *design* de problemas abertos, abordando um tema de relevância social e utilizando as tecnologias digitais, para que pudesse ocorrer a (re)formulação e resolução dos problemas, assim como para que discutissem e refletissem sobre a experiência adquirida, como *designers*. Nesses encontros, identificou-se a ocorrência das etapas de *formação do grupo de trabalho (designers)*; *análise das necessidades*; *projeto/planejamento, desenvolvimento e implementação*; *avaliação da primeira versão do problema*; *discussão e reflexão por parte dos designers*; e *realização de modificações ou do re-design*, *para obter a segunda versão do problema* (Figueiredo, 2017).

As alunas D, E e F decidiram formar um grupo de trabalho, para realizar o *design* do problema e propô-lo a alunos de um terceiro ano do Ensino

Médio, em que a aluna E era a sua professora de Matemática. No *storyboard*, realizado em um documento de *Word*, as alunas optaram por abordar um tema que pudesse favorecer a Educação Matemática Financeira (Brasil, 2013), um tema da Contemporaneidade (Olgin, 2015) e ligado à Economia (Brasil, 2019). Elas pretendiam que houvesse, no processo de (re)formulação e resolução, o planejamento da compra fictícia de móveis, para mobiliar a residência do personagem principal de uma história, observando o orçamento e as formas de pagamento para ele determinados. De acordo com as gravações de áudio e vídeo, a aluna E alegou que o tema vinha ao encontro dos possíveis interesses e das expectativas futuras dos seus alunos, que poderiam almejar a sua independência, residindo em uma casa própria. Dessa forma, esse foi escolhido para simular uma situação problemática, sem haver a preocupação se seria realmente do interesse dos alunos escolhidos.

Ademais, o tema favoreceu o reconhecimento, por parte das alunas, que poderiam ser empregados ou aprendidos novos conhecimentos matemáticos na (re)formulação e resolução do problema, relativos as quatro operações com os números racionais, à Matemática Financeira (valores monetários, porcentagem, juros, entre outros), às medidas de comprimento, largura e altura e à Geometria (figuras planas e espaciais e cálculos de áreas). Para escolher os móveis, nas Lojas *online* (que os alunos do terceiro ano teriam acesso), seriam necessários o planejamento financeiro do personagem, para verificar o que esse poderia ou não comprar, o que requer a resolução de cálculos que envolvem as quatro operações com os números racionais, valores monetários, porcentagem, juros, entre outros que possam ser necessários e que não foram destacados pelas alunas, bem como verificar as medidas de comprimento, largura e altura dos móveis.

Em relação ao uso de tecnologias digitais, pesquisaram na *Internet*, as imagens de plantas baixas de residências de um, dois e três dormitórios, com as medidas em metros (Turola, 2018). Essas imagens foram utilizadas para produzir uma história em quadrinhos, no *site Toondoo* (<http://www.toondoo.com>), que seria apresentada na forma de um *book online* e em duas opções (uma com o personagem principal sendo uma mulher e outra um homem), que se diferem apenas pelo personagem. Essas tecnologias, segundo as alunas, poderiam atingir os objetivos e instigar o processo de (re)formulação e resolução, utilizando essas e outras tecnologias digitais, disponibilizadas por elas ou escolhidas pelos alunos.

A primeira versão obtida foi analisada pelas pesquisadoras, que sugeriram o aprimoramento dos aspectos estéticos, a revisão da ortografia e a alteração das imagens das plantas baixas, para que ficassem legíveis. A seguir, pode ser observado o enunciado do problema "Mobiliando a casa - versão feminina" (<http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696308>), nas Figuras 3 e 4.

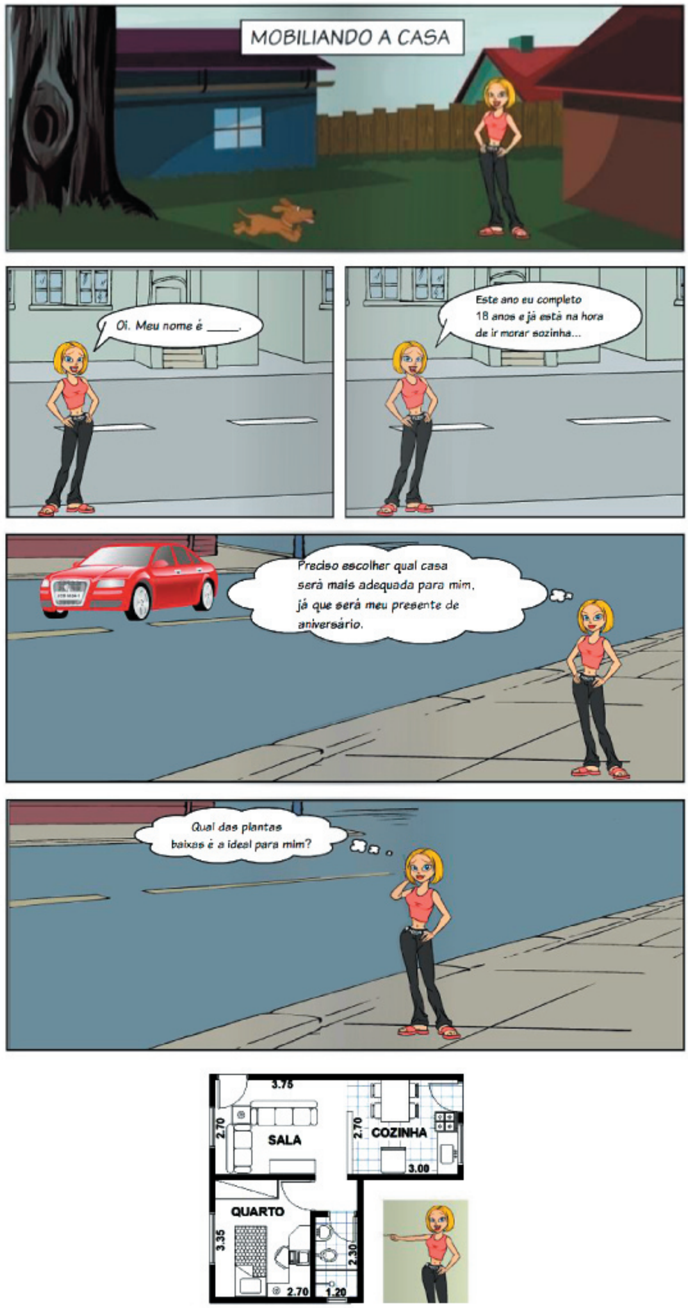


Figura 3. Páginas 1 a 5 do problema "Mobiliando a casa" (feminino)

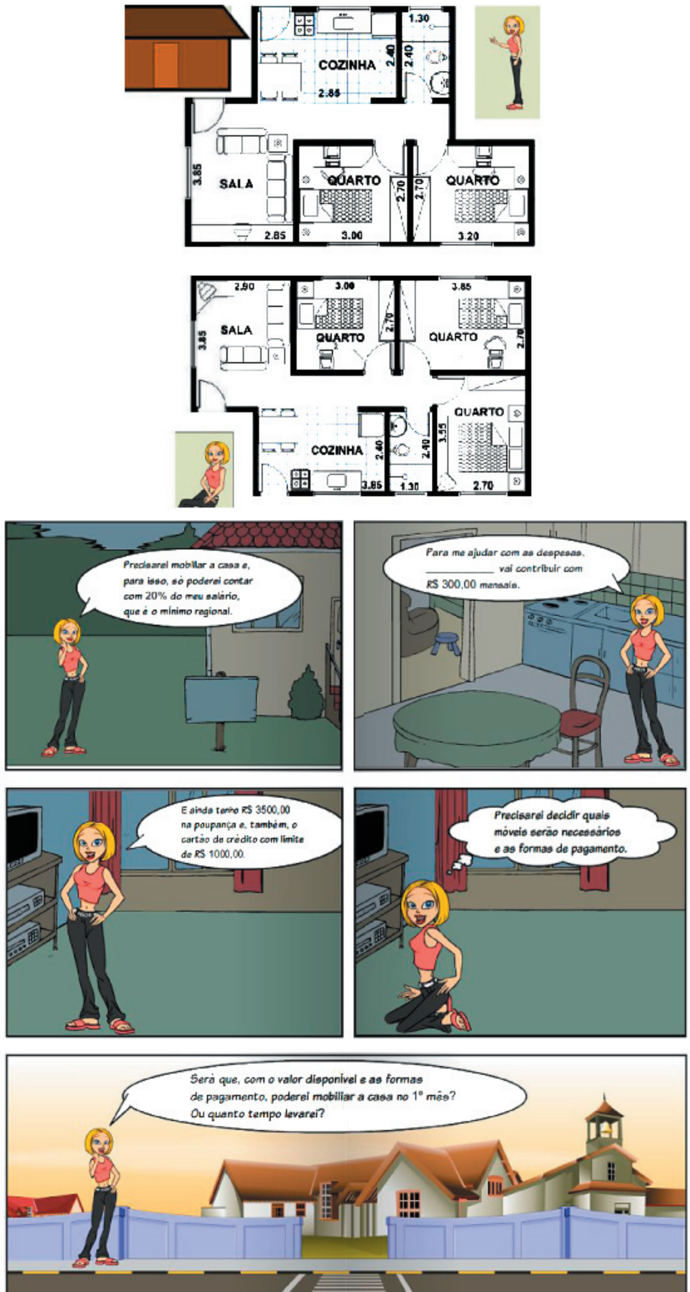


Figura 4. Páginas 6 a 10 do problema “Mobiliando a casa” (feminino)

No enunciado, observa-se que, da página 1 a 4, são expostas informações sobre a personagem, mas é solicitado que seja nomeado o personagem (página 2) e há um questionamento que instiga a escolha de uma das plantas baixas das residências (página 4). Nas páginas 5 a 7, foram utilizadas as imagens das plantas baixas das residências pesquisadas, de um (página 5), dois (página 6) e três (página 7) dormitórios, respectivamente, que representam como os móveis são dispostos nos cômodos, que podem ou não interferir nas decisões dos alunos. Nas páginas 8 e 9, há informações quanto às condições financeiras e de pagamento que o personagem possui e, ainda, pode ser determinado outro personagem e seu nome, que iria ajudá-lo ou não no pagamento dos gastos. Na página 10 e última, são feitos questionamentos que suscitam a busca por uma solução para o problema, já que será necessário responder se o personagem poderá efetuar as compras em um mês ou mais.

No que concerne às características e aspectos atribuídos ao enunciado, que podem ser evidenciados com o uso de tecnologias digitais no processo de resolução e solução, destaca-se que o problema é aberto, podendo ocasionar a (re)formulação, desde que os alunos sejam orientados nessa tarefa. Esses aspectos metodológicos *são capazes de* contribuir para a ocorrência da: *exploração*, na elaboração e/ou no uso de estratégias; *visualização*, na análise das imagens da história em quadrinhos; *investigação*, na pesquisa de informações, na *Internet*, e na avaliação do processo de resolução e da(s) solução(ões); *simulação*, na apresentação de um contexto fictício, que possibilita a reflexão sobre as decisões tomadas; *comunicação oral e escrita*, na solicitação dos registros do processo resolução e de uma ou mais soluções; valorização dos *aspectos estéticos*, história em quadrinhos, cuja leitura e interpretação instigam a busca por uma solução; entre outros (Figueiredo, 2017).

O problema pode ser considerado, tal como destaca Kilpatrick (2017), como *não rotineiro*, já que possui a potencialidade de desenvolver a criatividade e originalidade dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, ao (re)formulá-lo e resolvê-lo. Também, por ser aberto, nota-se que o enunciado delimita um contexto (Paterlini, 2010), que pode promover o ensino da Matemática através da sua resolução, visto que poderá ser um ambiente de aprendizado, para a participarão ativa dos alunos (Pehkonen, Näveri & Laine, 2013), com diferentes pontos de partida (Van de Walle, 2009) e opções de escolhas *(Allevato, 2008), que atenda as necessidades educacionais.*

No Fórum "Refletindo sobre o *design* dos problemas com o uso de tecnologias digitais", cuja pretensão era a discussão, investigação e reflexão sobre o *design* e resultado obtido, ou seja, processo que originou o enunciado do problema, as alunas D e F escreveram que a experiência como *designers* lhes permitiu a aprendizagem de uma perspectiva metodológica diferenciada e enriquecedora, visto que puderam refletir sobre como deve ser produzido o enunciado de um problema para que ocorra a autonomia dos alunos na tomada de decisões e na aprendizagem de conhecimentos matemáticos através da sua (re)formulação e resolução. A aluna D também destacou as características e capacidades que podem ser desenvolvidas através da resolução do problema que produziram: "*[...] tem diferentes caminhos para obter a solução e, ao formulá-lo, fomos capazes de identificarmos como reagiriam os alunos quanto às suas escolhas [...]. Assim o aluno poderá desenvolver as capacidades de tentar, supor, testar e provar o que é proposto [...]*".

A aluna E mencionou que "[...] o *design de problema é uma metodologia [...], que possibilita trabalhar com inúmeras situações com os alunos e, a partir dessas [...], torná-los mais críticos e independentes na tomada de suas decisões".* Pela resposta, a aluna compreendeu que a perspectiva evidenciada pode favorecer a abordagem de temas e viabilizar o desenvolvimento das competências e habilidades de reflexão crítica, tomada de decisões e elaboração e resolução de problemas, tal como destacam Figueiredo (2017), Jurado (2017) e Brasil (2018).

Dessa forma, depreende-se que as alunas D, E e F identificaram as possibilidades, as características e os aspectos que podem ou devem ser atribuídos ao *design* de problemas com o uso de das tecnologias digitais, para a (re)formulação e resolução de problemas, com esses recursos. Também, a experiência adquirida propiciou, tal como apontam Vale, Pimentel & Barbosa (2015), a identificação de que contextos, como o que pode ser proporcionado pelo problema que produziram, são capazes de envolver os alunos no decorrer desse processo.

Do nono ao décimo segundo encontros do curso, foram propostas atividades que pudessem contribuir para a aprendizagem de como planejar e realizar uma prática pedagógica, para propor os problemas produzidos, e para que os alunos da Educação Básica os (re)formulassem e resolvessem com o uso de tecnologias digitais. Também, a aquisição dessa experiência visava a discussão, investigação e reflexão sobre as potencialidades e/ou limitações que podem proporcionar à Educação Matemática. Nesses encontros, ocorreram as demais etapas do *design* de problemas, que são destacadas por Figueiredo (2017): *planejamento da prática pedagógica*; *realização da prática pedagógica*; *e discussão e reflexão por parte dos resolvedores e do(s) designer(s).*

Para realizar a prática pedagógica, em que o problema seria resolvido pelos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, as alunas D, E e F foram orientadas pelas pesquisadoras a elaborarem o plano de aula, pois, segundo Vasconcellos (2007, p. 148), esse facilita o trabalho e "corresponde ao nível de maior detalhamento e objetividade do processo de planejamento didático". Na sua elaboração, escolheram os elementos que são apresentados pelo autor e podem ser verificados na Figura 5.

Assunto: Como mobiliar uma casa e fazer compras à vista e a prazo.

Necessidades: Os alunos demonstram dificuldade em administrar sua vida financeira e de analisar os prós e contras de compras à vista e/ou a prazo.

Objetivo: Proporcionar aos alunos uma atividade que auxilie na reflexão e na tomada de decisões, de maneira consciente, que envolvam a escolha de móveis, o pagamento desses à vista e a prazo de forma fictícia e a organização das condições financeiras do personagem.

Conteúdos: Matemática Financeira: valores monetários, juros e porcentagem; Figuras Geométricas Planas e Espaciais; Medidas de comprimento; Análise de plantas baixas de residências.

Metodologia: Será proposto aos alunos a resolução do problema aberto, que foi elaborado no *site Toondoo* e apresenta uma situação-problema na versão feminina e outra masculina, sobre como mobiliar uma casa. Cada aluno poderá escolher a planta baixa, de acordo com os móveis escolhidos e suas dimensões e as formas de pagamento que forem determinadas para o personagem.

Tempo: de 4 h a 8h.

Recursos: Computador com *Internet*, folha A4 para registros da atividade e o *Microsoft Office Word* para anexar fotos dos móveis escolhidos e fazer os registros da resolução.

Avaliação: Avaliaremos os alunos através do desempenho, as decisões tomadas e as estratégias que elaborarem na resolução do problema, no que se refere aos móveis por eles escolhidos e as suas formas de pagamento.

Figura 5. Plano de aula elaborado pelas alunas D, E e F

No plano de aula, verifica-se que as alunas D, E e F salientaram que o tema seria abordado para proporcionar a sua compreensão e a aprendizagem de novos conhecimentos sobre o mesmo, o que as fez determinarem o objetivo a ser atingido e os conhecimentos matemáticos que seriam trabalhados ou utilizados pelos alunos no processo de resolução. Na metodologia, constata-se que mencionaram que o problema é do tipo aberto e, por isso, os alunos poderão tomar decisões pelo personagem, escolher a planta baixa da residência que fosse mais adequada às necessidades e suas condições financeiras. No que se refere ao tempo previsto para a duração, recursos e avaliação, esses são condizentes aos demais elementos do planejamento.

Ainda, sobre o plano de aula, nota-se que as alunas consideraram os elementos fundamentais para propor um problema, que, em conformidade com

Jurado (2017), são: *as informaçõe*s, apresentadas no enunciado; *as exigências*, que são mencionadas na metodologia do plano de aula; *o contexto intra*, pois produziram o enunciado do problema, e *extra* matemático, visto que trata-se de uma situação problemática que possui um contexto fictício, que se assemelha às situações vivenciadas no cotidiano; e *o ambiente matemático*, ao apontarem as necessidades, o objetivo e os conteúdos que poderiam ser trabalhados, que são consoantes à metodologia que seria ser empregada e aos demais itens detalhados.

Além disso, escreveram que pretendiam promover, também, a Educação Matemática Financeira dos alunos. Nesse sentido, o plano de aula de aula veio ao encontro da proposta de Educação Financeira para o Ensino Médio, do CONEF (Brasil, 2013), no que diz respeito que essa é uma estratégia capaz de ajudar no enfrentamento dos desafios cotidianos, que envolvam o planejamento das finanças e a realização de sonhos pessoais ou familiares e a autonomia nas decisões, requer a observação do orçamento, para não excedê-lo.

Na realização da prática pedagógica, as alunas D, E e F desempenharam a função de professoras, sem que houvesse a participação das pesquisadoras, mas foram orientadas, previamente, quanto ao papel de mediadora que exerceriam e da necessidade de fazer observações e registrá-las, por escrito. Nesses registros, reconheceu-se que a aluna H depreendeu que o tema de relevância social abordado "*contribuiu para a tomada de decisões e reflexões que favoreceram a Educação Financeira, pois alguns alunos utilizaram como estratégia economizar, escolhendo assim, a planta baixa de um ou dois dormitórios e os móveis mais baratos, em sites como o Mercado Livre*". Da mesma forma, verificou-se, tais indícios no excerto a seguir, proveniente da entrevista semiestruturada, em que foram feitos questionamentos, com a pretensão de que discutissem, investigassem e refletissem sobre a prática pedagógica. Entre os questionamentos, citam-se os que uma das pesquisadoras fez quanto se havia ocorrido ou não a (re)formulação:

P: [...]Vocês consideram que ocorreu ou não a reformulação ou a formulação de novos problemas, na tentativa de resolver o problema proposto [...]?

F: Eu acho que o principal foco deles era nossa última pergunta, se eles iriam conseguir comprar tudo em um mês. Todas as estratégias do grupo, que era uma menina e o menino, eram para eles conseguirem mobiliar toda a casa em um mês. O grupo das meninas não.

D: A casa delas era a maior (referindo-se a planta baixa de uma residência de 3 dormitórios).

F: Os meninos escolheram uma casa menor, para escolher menos móveis [...]. O casal e a dupla das meninas escolheram uma casa maior [...], dai tinham que escolher mais móveis.

E: Isso influenciou na quantidade de móveis que eram necessários [...].

P: [...]Houve, então, a escolha de moveis conforme o tamanho da casa [...]. Isso influenciou na determinação do era necessário ou não?

E: Sim, acabou sendo uma reformulação do problema, porque eles tiveram de pensar: "a gente tem que escolher uma casa e tiveram que decidir o tamanho, porque isso determinava na quantidade de peças a mobilar[...]".

Desse modo, conforme os registros das observações e excerto, entende-se que houve a (re)formulação e resolução do problema com o uso de tecnologias digitais, posto que as alunas D, E e F declararam que cada uma das duplas o reformulou, e formularam seus próprios questionamentos, ao tomarem decisões consoantes com a planta baixa da residência que escolheram e para que o personagem conseguisse efetuar o pagamento dos móveis. Também na análise de suas observações, verificou-se que, devido às decisões que os alunos tomaram, os conhecimentos referentes às quatro operações com os números racionais, à Matemática Financeira (principalmente valores monetários, porcentagem e juros, que seriam os conhecimentos básicos a serem trabalhados com um terceiro ano do Ensino Médio) e às medidas de comprimento, que haviam nas plantas baixas, foram os mais evidenciados no processo, do que aqueles relacionados às medidas de largura e altura e às figuras geométricas planas e espaciais e o cálculos de áreas.

Nesses, reconheceu-se que os alunos do terceiro ano demonstraram e/ou desenvolveram as competências e habilidades: a discussão e reflexão, a tomada de decisões, a elaboração de estratégias de resolução e a escolha e o uso de *sites* de venda de móveis (Figueiredo, 2017). Tais resultados vieram ao encontro do que menciona Silver (1994), quanto às potencialidades da (re)formulação no decorrer no processo de resolução do problema, pois os alunos personificaram o problema, determinaram as suas metas e o (re)criaram. Além disso, o contexto do problema proporcionou que os alunos pensassem criticamente, expusessem as suas ideias, identificassem as melhores alternativas e utilizassem os conhecimentos matemáticos, que poderiam contribuir para a solução do problema (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

Outra atividade proposta foi a participação no Fórum "Realização da prática pedagógica", que tinha como propósito que os futuros professores trocassem ideias sobre a experiência adquirida, com a realização da prática pedagógica.

Nele, as alunas D e E, escreveram que a experiência adquirida como professoras lhes possibilitou o reconhecimento de potencialidades, como a apresentação e/ou desenvolvimento das competências e habilidades de discussão, de reflexão e de tomar decisões no processo de (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais, uma vez que cada aluno pode resolver “[...] no seu ritmo, colocando suas preferências na atividade, ou seja, a autonomia dos alunos foi valorizada [...]” (*Aluna E*).

Sobre o papel de professora, a aluna H destacou que *“[...] a mais relevante contribuição é a mediação, onde o professor auxilia [...], provocando o aluno a aprender a partir de seus próprios questionamentos, escolhendo seu próprio caminho para a resolução do problema dado”.* Para ela, a experiência adquirida lhe permitiu a verificação de como deve ser mediado o processo de (re)formulação e resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais e valorizada a formulação de questionamentos e a busca por respostas.

Desse modo, o *design* e a proposta de (re)formulação e resolução do problema com o uso de tecnologias digitais, em uma prática pedagógica, foram, como destaca Crespo (2003), estratégias formativas, que desafiaram e proporcionaram o (re)pensar acerca da maneira como os problemas matemáticos podem ser propostos nas aulas de Matemática. Também, contribuíram para que as alunas D, E e F desenvolvessem a criatividade e a inovação, pois, segundo o *modelo 4P+F* (O’Dell, 2001), compreende-se, pedagogicamente, que puderam avaliaram as suas preferências no *design* do problema e no planejamento da prática pedagógica, de acordo a perspectiva evidenciada no curso (*P de* pessoa); tiveram que planejar e desenvolver, em um *storyboard*, como seria o enunciado e observando as necessidades requeridas, para então implementá-lo e, posteriormente, aprimorá-lo, bem como precisaram elaborar o plano de aula, de modo que o metodologia abrangesse o assunto/tema a ser abordado, as necessidades, o objetivo, os conteúdos, os recursos, o tempo para realizá-la e a avaliação (*P de processo*); realizaram o *design* do problema, se apropriando do planejamento e desenvolvimento elaborados no *storyboard,* para obter as opções definitivas (segunda versão do problema) e para que essa pudesse ser utilizada no planejamento e a realização da prática pedagógica (*P de Produto*) e das alterações requeridas e sugeridas pelas pesquisadoras (*P de pressão*). Dessa forma, o *design* de problemas, sob o enfoque evidenciado, pode ser considerado como um tipo de ferramenta, tal como sugere o autor (*F de ferramentas*), pois, há indícios que houve, também, a ocorrência do processo *Quatro Diamantes* (Quadro 2).

Quadro 2
Compreensão pedagógica do processo formativo das alunas D, E e F, de acordo com a ferramenta "Quatro Diamantes" (O'Dell, 2001)

FASES DIVERGENTES	*PROCESSO*	*FASES CONVERGENTES*
Discussões iniciais sobre as necessidades educacionais, para produzir um enunciado que pudesse ser utilizado em uma prática.	*Análise do problema*	Definição do tema a ser tratado, das tecnologias digitais que seriam usadas, dos conteúdos matemáticos e das características e aspectos que seriam valorizados através do *design*.
Discussões sobre como planejar e desenvolver o enunciado do problema, utilizando, para isso, o *storyboard*.	*Definição do problema*	Decisão de produzir o enunciado do problema, como se fosse uma história em quadrinhos.
Discussão sobre como seria cada parte da história em quadrinhos, do que seria escrito e as imagens essa teria, considerando as necessidades requeridas.	*Geração de ideias*	Definição das informações que seriam apresentadas no enunciado. Pesquisa, na *Internet,* de imagens de plantas baixas de residências para serem utilizadas na história em quadrinhos. Decisões de utilizar o *site Toondoo,* para implementar a história em quadrinhos, e de fazer duas opções (uma feminina e outra masculina).
Discussões acerca de como adequar o planejamento do enunciado, feito no *storyboard*, aos recursos oferecidos pelo *site Toondoo.* Discussão e reflexão, posteriores, ao *design* da primeira versão, para aprimorar o enunciado do problema e obter a segunda versão. Discussão e reflexão quanto a realização da prática pedagógica, em que o problema seria proposto, (re)formulado e resolvido pelos alunos do terceiro ano, com o uso de tecnologias digitais.	*Planejamento de ações* ↓	Planejamento, desenvolvimento e implementação do *design* do problema (primeira versão) e, posteriormente, das modificações para aprimorá-lo (obtenção da segunda versão). Elaboração do plano de aula, em que o problema seria proposto, (re)formulado e resolvido com o uso de tecnologias digitais. Realização da prática pedagógica, de acordo com o plano de aula elaborado.
	Problema produzido e utilizado no plano de aula e na prática pedagógica	

Diante do exposto, depreende-se que as atividades propostas contribuíram para que as alunas D, E e F adquirissem experiências docentes e produzissem o conhecimento básico especializado (Imbernón, 2011). Isso foi possível na medida que puderam trabalhar em equipe e puderam discutir, tomar decisões, planejar, investigar e refletir, ao realizarem o processo que resultaria no enunciado do problema almejado e ao término do mesmo, assim como na elaboração do plano de aula e após a realização da prática pedagógica.

Compreende-se, também, que as alunas D, E e F puderam reconstruir às suas concepções quanto às perspectivas metodológicas de problemas abertos, da (re)formulação, da resolução de problemas e do uso de tecnologias digitais, quando correlacionadas em um design instrucional, através dos processos de conhecer-na-ação e de reflexão-na-ação, que ocasionaram na produção de conhecimentos docentes (o conhecimento-na-ação), que podem ser utilizados no planejamento e na realização de práticas pedagógicas (Schön, 2000), para a Educação Matemática. As suas ações oportunizaram a produção de conhecimentos metodológicos, relativos ao design de enunciados de problemas matemáticos do tipo aberto, em que são abordados temas de relevância social e utilizadas as tecnologias digitais, para que possam ocasionar a (re)formulação e resolução com o uso desses recursos, e atingir os objetivos educacionais no que se refere ao processo de ensino e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, que devem ser identificados a partir do tema evidenciado.

5. Considerações Finais

A investigação realizada possibilitou a obtenção de uma resposta para à questão diretriz: *Como ocorre o design de problemas abertos e o planejamento e realização de práticas pedagógicas, para proposta de (re)formulação e resolução desses problemas, com o uso de tecnologias digitais, na formação inicial de professores de Matemática?* De acordo com os resultados obtidos, as experiências de *designer* e professor, possibilitam a aprendizagem de como realizar o *design* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais, para a (re)formulação e resolução de problemas com o uso desses recursos e como utilizar tais problemas na elaboração do planejamentos e na realização de práticas pedagógicas. Para tanto, os futuros professores precisam ser orientados pelo(s) professor(es) formador(es), para que ocorra a identificação dos conhecimentos matemáticos que podem ser valorizados, empregados e/ou ensinados e aprendidos pelos alunos/resolvedores através da (re)formulação e resolução desses problemas. Também, precisam ser aconselhados para que o tema de relevância social e as tecnologias digitais sejam escolhidas e utilizadas no *design* e em sala de aula, de forma que atendam aos objetivos educacionais, de acordo com o ano e nível de ensino dos alunos e suas particularidades.

Ao levar-se em consideração o objetivo almejado, que era investigar quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores de Matemática, nos aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, por meio do *design*, (re)formulação e resolução de problemas abertos e do planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que tais problemas são propostos, reafirma-se que as atividades de *design* de enunciados de problemas abertos e que abordam temas de relevância social com o uso de tecnologias digitais e de planejamento e realização de práticas pedagógicas, em que esses problemas serão propostos, (re)formulados e resolvidos utilizando esses recursos, pelos alunos da Educação Básica, sobretudo do Ensino Médio, são oportunidades para que os futuros professores de Matemática possam reconhecer as características e aspectos que podem ser atribuídos ao enunciados de problemas, em conformidade com as características de problemas abertos, que são pré-determinados, e da (re)formulação de problemas, que pode ser associada a resolução com o uso de tecnologias digitais: a exploração, visualização, investigação, simulação, comunicação, aspectos estéticos, entre outras.

As etapas propostas por Figueiredo (2017), para o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, na formação inicial de professores de Matemática, contribuem para que os futuros professores não apenas reconheçam as necessidades educacionais, escolham o tema e as tecnologias digitais, como identifiquem os conhecimentos matemáticos que podem ser trabalhados e, até mesmo associados, na criação de meios, em que esses possam ser aprimorados ou aprendidos pelos alunos. Essa experiência se constitui como um espaço para que, em grupo, discutam e reflitam sobre como criar problemas abertos e complexos, procurando inovar, ao produzirem imagens, cenários, questionamentos, frases ou informações incompletas, entre outros meios, que instiguem aos alunos a (re)formularem e a resolverem, utilizando as tecnologias digitais, também, de forma criativa, ao tomar decisões, discutindo, refletindo, elaborando estratégias, questionando e determinando outros problemas que os auxiliem na solução. Além disso, a elaboração de um plano de aula, utilizando o enunciado produzido, possibilita o planejamento docente que analise, de forma aprofundada, as necessidades educacionais e das possibilidades que podem emergir da (re)formulação e resolução de problemas, em que tecnologias digitais são utilizadas.

No entanto, é com a realização da prática pedagógica, planejada previamente, que ocorre o aprofundamento desses entendimentos pelos futuros professores (Crespo, 2003; Imbernón, 2011; Figueiredo, 2017). Nela há o reconhecimento se os objetivos de ensino e aprendizagem foram atingidos, se suas ações e dos alunos foram válidas no decorrer do processo, do que poderia ser aprimorado ou vir a ser alterado ou como outros enunciados podem ser produzidos e daquilo que servirá de base para novas práticas, sob essa perspectiva, e pelos futuros professores. Ademais, podem constatar como os alunos criam a sua própria versão para o problema proposto, como completam as lacunas do enunciado, determinam seus próprios questionamentos e buscam respostas, tomam decisões e utilizam os seus conhecimentos prévios sobre o tema abordado, matemáticos e tecnológicos para (re)formular e resolvê-lo e aprender novos conhecimentos.

Ainda, conforme as concepções de Figueiredo (2017) e O'Dell (2001), as experiências de *designer* e de professor, adquiridas pelos futuros professores, favorecem o aprimoramento e/ou o desenvolvimento das competências e habilidades. Entre elas, menciona-se as que são necessárias ao exercício profissional docente: trabalhar colaborativamente, tomar decisões, utilizar as tecnologias digitais, identificar as necessidades educacionais, planejar, desenvolver e implementar o *design* do problema e avaliá-lo, escolher temas de relevância social para uma Educação Matemática e Financeira, planejar e realizar a prática pedagógica em que o problema seria proposto e discutir, investigar e refletir no decorrer e após as práticas vivenciadas.

Referências

Abramovich, S. (2015). Mathematical problem posing as a link between algorithmic thinking and conceptual knowledge. *The teaching of Mathematics*, *18*(2), 45-60.

Allevato, N. S. G. (2008). *O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas*. Rio Claro, SP: UNESP. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_alevato.pdf.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular:* Educação é a base. Educação Básica. Brasília: MEC.

Brasil. (2013). Ministério da Educação. Comitê Nacional de Educação Financeira. *Educação financeira nas escolas:* ensino médio. Bloco 1. livro do professor. Brasília: CONEF.

Brasil. (2019). Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*. Proposta de Práticas de Implementação. Brasília: MEC.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Figueiredo, F. F. (2017). *Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Brasil.

Figueiredo, F. F. & Groenwald, C. L. O. Problemas abertos com a utilização das Tecnologias Digitais: um processo potencializador na formação do educador matemático. *Debates em Educação*, *10*(20), 174-198.

Filatro, A. C. (2008). *Design instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional:* formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez.

Jurado, U. M. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. *CIVEOS*, *2*, Granada, Espanha.

Kilpatrick, J. (2017). Reformulando: Abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação. In Onuchic, L. De La R., Junior, L. C. L. & Pironel, M. (Org.). *Perspectivas para resolução de Problemas*. São Paulo: Livraria da Física.

O'Dell, D. (2001). *A resolução criativa do problema:* guia para a Criatividade e Inovação na Tomada de Decisões. Epistemologia e Sociedade. Lisboa: Instituto Piaget.

Olgin, C. A. (2015). *Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio.* (Tese de Doutorado), Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

Paterlini, R. R. (2010). *Aplicação da metodologia Resolução de Problemas Abertos no Ensino Superior.* São Carlos: DM-UFSCar. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_metodol_invest.pdf.

Pehkonen, E., Näveri, L. & Laine, A. (2013). On Teaching Problem Solving in School Mathematics. *CEPS Journal, 3*(4), 9-23.

Problema. (2018). *Mobiliando a casa – versão feminina.* http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696308

Schön, D. A. (2000). *Educando o profissional reflexivo:* um novo *design* para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed.

Screencast-O-Matic. (2018). *Site oficial.* Seattle: Screencast-O-Matic. http://www.screencast-o-matic.com/

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, Vancouver, *14*(1), 19-28.

Toondoo. *Site.* (2018). Pleasanton, CA, USA: Jambav. http://www.toondoo.com/

Turola, H. (2018). *Plantas baixas de residências.* https://hamiltonturola.wordpress.com/

Ulbra. (2018). *Ambiente de Aprendizagem Moodle do Curso de Extensão de Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas na Educação Matemática*. Canoas: PPGECIM/ULBRA. http://www.ppgecim.ulbra.br/moodle/user/view.php?id=128&course=40

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39-60.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed.

Vasconcellos, C. S. (2007). *Planejamento:* Projeto de Ensino-Aprendizagem e Projeto Político-Pedagógico. 17.ed. São Paulo: Libertad.

Yin, R. K. (2016). *Pesquisa qualitativa do início ao fim*. Porto Alegre: Penso.

Autoras

Fabiane Fischer Figueiredo. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil.
fabianefischerfigueiredo@gmail.com
ORCID iD http://orcid.org/0000-0003-1236-0890

Claudia Lisete Oliveira Groenwald. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. claudiag@ulbra.br
ORCID iD http://orcid.org/0000-0001-7345-8205

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas, Ana Henriques

O TPACK DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO

Prospective mathematics teachers' TPACK in a context of a teacher education experiment

RESUMEN

El TPACK conceptualiza el conocimiento profesional del profesor para una efectiva integración de la tecnología en la educación y su desenvolvimiento necesita de ser garantizado en la formación inicial de profesores. En este estudio analizamos el TPACK que futuras profesoras de Matemática del 3.º ciclo de la enseñanza básica y secundaria evidencian a lo largo de una Experiência de Formación que visa su desarrollo en las componentes cognitivas que lo caracterizan: concepciones, currículo, aprendizaje y enseñanza. Siguiendo una metodología de Design-Based Research, los resultados del 1.º ciclo de experimentación revelan que el TPACK de las futuras profesoras es un conocimiento complejo, dinámico y flexible, consolidado por la articulación de múltiplos dominios del conocimiento profesional del profesor.

PALABRAS CLAVE:

- *TPACK*
- *Conocimiento profesional del profesor de Matemática*
- *Formación Inicial de profesores de Matemática*
- *Design-Based Research*
- *Tecnología*

ABSTRACT

TPACK conceptualizes the teacher professional knowledge for an effective integration of technology in education and so its development needs to be ensured in pre-service teacher education. This study analyzes the TPACK that prospective middle-school and secondary mathematics teachers, evidence in a teacher education experiment aiming its development regarding the cognitive components that characterizes it: conceptions, curriculum, learning and teaching. Following a Design-Based Research methodology, the results of the 1st cycle of experimentation show that the prospective teachers' TPACK is a complex, dynamic and flexible knowledge, consolidated through the articulation of multiple domains of the teacher professional knowledge.

KEYWORDS:

- *TPACK*
- *Mathematics Teacher Professional Knowledge*
- *Mathematics Pre-service Teacher Education*
- *Design-Based Research*
- *Technology*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (2): 175-202.
Recepción: Septiembre 6, 2019 / Aceptación: Julio 3, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2322

RESUMO

O TPACK conceptualiza o conhecimento profissional do professor para uma efetiva integração da tecnologia na educação e o seu desenvolvimento precisa de ser assegurado na formação inicial de professores. Neste estudo analisamos o TPACK que futuras professoras de Matemática do 3.º ciclo e ensino secundário evidenciam ao longo de uma Experiência de Formação que visa o seu desenvolvimento nas componentes cognitivas que o caracterizam: conceções, currículo, aprendizagem e ensino. Seguindo uma metodologia de Investigação Baseada em Design, os resultados do 1.º ciclo de experimentação evidenciam que o TPACK das futuras professoras é um conhecimento complexo, dinâmico e flexível, consolidado pela articulação de múltiplos domínios do conhecimento profissional do professor.

PALAVRAS CHAVE:
- *TPACK*
- *Conhecimento profissional do professor de Matemática*
- *Formação inicial de professores de Matemática*
- *Investigação Baseada em Design*
- *Tecnologia*

RÉSUMÉ

Le TPACK conceptualise les connaissances professionnelles de l'enseignant en vue d'une intégration efficace de la technologie dans l'éducation et son développement doit être garanti dans la formation initiale de l'enseignant. Dans cette étude, nous analysons le TPACK présenté par les futurs enseignants de mathématiques du collège et secondaire tout au long d'une expérience de formation visant à développer les composantes cognitives qui le caractérisent: conceptions, programme d'études, apprentissage et enseignement. Suivant une méthodologie de Design-Based Research, les résultats du 1er cycle d'expérimentation révèlent que le TPACK des futurs enseignants est une connaissance complexe, dynamique et flexible, consolidée par l'articulation de multiples domaines de la connaissance professionnelle de l'enseignant.

MOTS CLÉS:
- *TPACK*
- *Connaissance professionnelle du professeur de Mathématiques*
- *Formation initiale de professeurs de Mathématiques*
- *Design-Based Research*
- *Technologie*

1. Introdução

A evolução das tecnologias digitais no século XXI e a sua ampla acessibilidade e potencialidade para fins educacionais levanta diversos questionamentos sobre o conhecimento profissional do professor para responder aos desafios e exigências de uma educação significativamente transformada pelo seu uso (Albuquerque, Veloso, Rocha, Santos, Serrazina e Nápoles, 2006; Mishra e Koehler, 2006; Niess, 2012a). O modelo TPACK (*Technological Pedagogical and Content Knowledge*), proposto por Mishra e Koehler (2006), tem-se consolidado na conceptualização do conhecimento que os professores necessitam para uma efetiva integração da tecnologia no ensino, influenciando as recentes investigações sobre o desenvolvimento desse conhecimento.

Na Educação Matemática, em particular, as orientações curriculares recomendam o uso da tecnologia como recurso essencial na aprendizagem dos alunos, apoiando-os a atribuir significado às ideias matemáticas, a raciocinar e a comunicar o seu pensamento (NCTM, 2014). Em resposta a estas exigências, os programas de formação inicial devem ser repensados para assegurar que os futuros professores desenvolvam o seu TPACK, adquirindo conhecimento e experiência para ensinar Matemática com auxílio das tecnologias (AMTE, 2017; Niess, 2012a). Neste sentido, diversos autores (e.g. Mishra e Koehler, 2006; Niess, 2012a) sugerem que os programas de formação inicial de professores de Matemática aumentem o nível de integração da tecnologia nas suas unidades curriculares e que proporcionem oportunidades aos futuros professores para "planear, organizar, criticar e abstrair as ideias de conteúdo específico, as necessidades específicas do aluno e as situações específicas de sala de aula, considerando simultaneamente as possibilidades e limitações das tecnologias digitais" (Niess, 2012a, p. 332). No entanto, apesar do esforço que tem sido feito para integrar a tecnologia na formação inicial de professores, estudos diversos (Niess, 2012a; Niess e Gillow-Wiles, 2017) revelam dificuldades nessa integração, pelo que a preparação de futuros professores para ensinar Matemática com tecnologia é uma área que requer mais investigação (Niess, 2012b), nomeadamente focada em princípios de design a considerar em contextos específicos de formação inicial de professores para promover o TPACK.

Neste contexto, considerámos pertinente realizar uma experiência de formação com futuros professores de Matemática, seguindo uma metodologia de investigação baseada em design (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), visando desenvolver uma teoria local sobre como promover o seu TPACK. Para compreender o potencial desta experiência de formação e a necessidade de realizar alguns ajustes no seu design, neste artigo apresentamos um estudo que visa analisar o TPACK que futuros professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário evidenciam ao longo de uma Experiência de Formação centrada em tarefas que promovem, de modo integrado, a articulação do conhecimento didático e tecnológico.

Este artigo pretende, assim, contribuir para a escassa investigação, particularmente em Portugal, sobre experiências de formação inicial de professores de Matemática que promovam o TPACK dos futuros professores, lançando também novas ideias sobre categorias cognitivas a usar na análise desse conhecimento.

2. O TPACK na formação inicial de professores de Matemática

Os professores de Matemática têm sido encorajados a usar tecnologia nas suas práticas pedagógicas, particularmente a tecnologia educacional, por ser um recurso que influencia a Matemática que é ensinada e o modo como os alunos aprendem, sendo reconhecido o seu potencial para melhorar esses processos (NCTM, 2014; AMTE, 2017). No entanto, como Earle (2002) argumenta, a integração da tecnologia não deve ter como foco a própria tecnologia, mas o propósito de implementar melhores práticas e abordagens aos conteúdos curriculares, visando uma aprendizagem dos alunos mais efetiva.

Esta ênfase na integração da tecnologia no ensino e aprendizagem de tópicos específicos fez emergir a necessidade de desenvolver modelos para representar o conhecimento do professor necessário para efetivar com sucesso essa integração. Mishra e Koehler (2006) propõem um modelo teórico – o TPACK, caraterizado pela integração simultânea e relacional de três domínios do conhecimento profissional do professor: conteúdo, pedagogia e tecnologia (Figura 1).

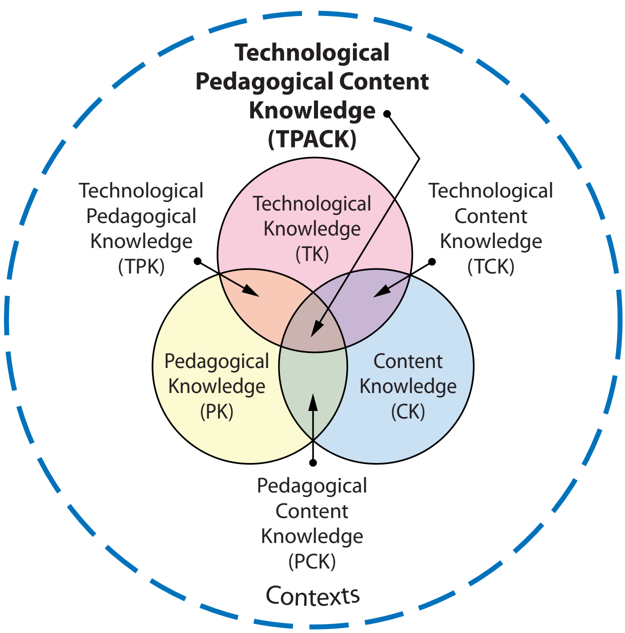


Figura 1. Technological Pedagogical Content Knowledge Model (Mishra & Koehler, 2006). Reproduzido com permissão do editor, © 2012 disponível em tpack.org

Nesta integração são considerados sete tipos de conhecimento (Mishra & Koehler, 2006):

1. *O conhecimento do conteúdo* (CK): conhecimento sobre o conteúdo da disciplina a ensinar.
2. *O conhecimento pedagógico* (PK): conhecimento sobre estratégias, métodos e processos de ensino.
3. *O conhecimento tecnológico* (TK): conhecimento técnico e operacional sobre ferramentas tecnológicas.
4. *O conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK): conhecimento sobre estratégias de ensino e gestão da sala de aula para a aprendizajem de conteúdos específicos.
5. *O conhecimento tecnológico e pedagógico* (TPK): conhecimento sobre as caraterísticas de ferramentas tecnológicas e o potencial de usá-las no ensino.
6. *O conhecimento tecnológico do conteúdo* (TCK): conhecimento operacional de ferramentas tecnológicas para representar e operar conteúdos específicos.
7. *O conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo* (TPACK): conhecimento que combina de forma relacional e integral os conhecimentos anteriores.

Em particular, consideramos os conhecimentos CK, PK e PCK como conhecimentos clássicos que têm sido discutidos por distintos autores desde os anos 80 (Grossman, 1989; Shulman, 1986). Enquanto isso, consideramos o TPK, o TCK e o TPACK como conhecimentos emergentes, uma vez que emergem ao integrar o TK com o CK e o PK.

O modelo TPACK sugere que os professores precisam de ter uma profunda compreensão de cada um dos domínios deste conhecimento para planificar e desenvolver o currículo que visa orientar e promover nos alunos uma aprendizagem com tecnologia. No entanto, o TPACK é mais do que conhecimento de conteúdo, pedagogia e tecnologia, considerados individualmente, envolve uma relação dinâmica entre estes domínios do conhecimento e as habilidades do professor para ensinar conteúdos específicos em níveis escolares específicos (Koehler, Mishra, Kereluik, Shin, e Graham, 2014; Niess, 2012b).

Segundo Ponte (2012), planificar, desenvolver o currículo, promover a aprendizagem e ensinar conteúdos específicos, constituem ações do professor associadas ao seu *conhecimento didático.* Para este autor:

> O conhecimento profissional do professor de Matemática inclui diversos aspetos, dos quais nos interessa sobretudo o que se refere à prática letiva, aquele onde se faz sentir de modo mais forte a especificidade da disciplina de Matemática, e que designamos por conhecimento didático (Ponte, 2012, pp. 86-87).

Nesta perspectiva, posicionamos o TPACK como um conhecimento didático especializado, em particular para este estudo, como o conhecimento didático do professor necessário para integrar efetivamente a tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Sendo necessário especificar a estrutura deste conhecimento, Niess (2012a) desenvolve um quadro conceptual em que define quatro componentes, designadas pela autora como *componentes cognitivas do TPACK*, que enquadram o TPACK na prática profissional do professor de Matemática. Estas componentes, que envolvem as conceções e o conhecimento do professor que constitui a base para as decisões profissionais que toma na sala de aula, são descritas pela autora como:

1. *Conceções abrangentes sobre os propósitos de integrar a tecnologia no ensino da Matemática*. Conceções sobre o que significa ensinar conteúdos matemáticos específicos com tecnologia, as quais direcionam os objetivos de aprendizagem, as estratégias de ensino, a própria implementação do currículo e a avaliação das aprendizagens.
2. *Conhecimento do currículo e materiais curriculares quando se integra a tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática*. Conhecimento sobre a integração da tecnologia e o seu impacto no currículo. O professor deve conhecer tecnologias específicas que fornecem aos alunos oportunidades de fazer conexões entre tópicos curriculares ou representações de um mesmo conceito.
3. *Conhecimento da compreensão, pensamento e aprendizagem da Matemática dos alunos quando usam tecnologia*. Conhecimento sobre os alunos, nomeadamente, sobre a sua compreensão, pensamento e aprendizagem quando usam a tecnologia. Para isso, o professor deve ter conhecimento sobre a utilidade das tecnologias na aprendizagem de conteúdos matemáticos.
4. *Conhecimento de estratégias de ensino da Matemática quando se integra a tecnologia*. Conhecimento associado às estratégias para ensinar conteúdos matemáticos com tecnologia, o que implica a adaptação e incorporação de metodologias adequadas para satisfazer metas específicas de ensino e as necessidades dos diversos alunos na sala de aula.

Estas componentes cognitivas do TPACK definidas por Niess (2012a), por um lado apelam à prática profissional do professor de Matemática e, por outro lado, contribuem para tornar mais compreensível em que consiste a interseção destes conhecimentos (conteúdo, pedagogia e tecnologia), quer para o professor, quer para o formador ou para o investigador.

A formação inicial de professores de Matemática é um processo complexo e influenciado por vários elementos que interagem entre si (Ponte e Chapman, 2008). Um professor de Matemática deverá ter conhecimento sobre: a natureza da Matemática; os conteúdos matemáticos; os objetivos curriculares; o modo como os alunos compreendem e aprendem os conteúdos matemáticos; a forma de apresentar as ideias aos alunos para que sejam aprendidas; e a gestão da sala de aula (Albuquerque et al., 2006). Esta complexidade do conhecimento profissional do professor levanta algumas questões sobre o processo de formação dos futuros professores, nomeadamente como prepará-los para enfrentarem os desafios com que se irão confrontar na futura prática profissional.

Parte destes desafios emergem do constante desenvolvimento tecnológico, sobretudo o *software* educacional, e das recomendações curriculares sobre o seu uso (NCTM, 2014). Será então necessário que a formação inicial de professores promova o desenvolvimento de um conhecimento aprofundado relativo à integração da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática, cumprindo as recomendações da AMTE (2017) sobre o perfil do futuro professor de Matemática que os caracteriza como proficientes em ferramentas tecnológicas, quer para seu próprio uso ao fazerem Matemática como para apoiar a aprendizagem matemática dos alunos.

Nesta perspetiva, Niess (2012a) sugere que os programas de formação sejam planeados para preparar os futuros professores para o ensino da Matemática com tecnologia, sendo esta aprendizagem um processo de aquisição de conhecimento tecnológico e de articulação com o conhecimento didático, considerando como as tecnologias podem ter impacto nas estratégias de ensino, no currículo escolar e no modo como os alunos aprendem os conteúdos. Na literatura têm surgido várias abordagens para desenvolver o TPACK dos futuros professores. Segundo Niess (2012a) e Koehler et al. (2014), num contexto de formação inicial de professores, em vez de se oferecer uma disciplina específica de tecnologia, um possível caminho para promover o TPACK dos futuros professores consiste em integrar sistematicamente a tecnologia nas suas unidades curriculares de metodologia ou didática do campo específico do conteúdo. Esta abordagem promove oportunidades para os futuros professores integrarem a tecnologia em articulação com a Matemática e a sua Didática nas tarefas e atividades propostas nas diferentes disciplinas de metodologia e/ou didática da Matemática, com o qual se pretende que "os professores experimentem por si mesmos, enquanto aprendizes, as potencialidades e limitações de ferramentas digitais na aprendizagem da Matemática, para assim adquirirem conhecimento sobre como os alunos podem aprender Matemática em vários ambientes digitais" (Leung, 2017, p. 6).

Um exemplo de professores como aprendizes de ferramentas digitais teve lugar no estudo de Agyei e Voogt (2015), no qual os autores procuram responder a "como as estratégias aplicadas na disciplina de tecnologia no ensino da Matemática têm um impacto sobre as competências tecnológicas dos futuros professores de matemática?" (p. 5). Através da análise de planos de aula elaborados pelos futuros professores participantes do estudo e da aplicação de questionários, os autores destacam que: (1) a atitude e as conceções dos futuros professores crescem positivamente em relação à tecnologia; (2) dois grupos de professores em formação desenvolveram e aprimoraram as suas competências ao longo da disciplina; (3) os futuros professores relataram que a oportunidade de aprender a usar a tecnologia durante a disciplina de formação era uma estratégia útil no desenvolvimento do seu TPACK; (4) a partilha de experiências entre as futuras professoras favoreceu as oportunidades para explorar e praticar a aplicação da tecnologia; e (5) a principal dificuldade que tiveram os futuros professores foi na integração da tecnologia na planificação de aulas. Contudo, os autores destacam que as "experiências de formação autênticas com tecnologia contribuem para a redução das ansiedades dos futuros professores, aumentando assim o seu entusiasmo em usar a tecnologia no seu ensino" (Agyei & Voogt, 2015, p. 19).

3. Contexto da experiência de formação e participantes

Este estudo decorre de uma experiência de formação com 6 futuras professoras do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário que frequentavam o 1.º ano do curso de Mestrado em Ensino de Matemática, de uma universidade portuguesa. Este curso acredita as habilitações para que os alunos se tornem professores de Matemática em Portugal. Estas futuras professoras, referidas neste texto por nomes fictícios, frequentaram uma licenciatura em Matemática e não tiveram formação prévia complementar na área de tecnologia em geral ou tecnologia em educação. No entanto, assumem ter algum conhecimento tecnológico adquirido autonomamente através da experiência com as tecnologias do seu quotidiano.

A experiência de formação foi realizada numa disciplina de Didática da Matemática do 2.º semestre (DMII) do curso que visa proporcionar aos futuros professores os instrumentos didáticos fundamentais para o ensino da Matemática, abordando temáticas associadas à aprendizagem da Matemática, à gestão curricular, à avaliação das aprendizagens e aos recursos didáticos, incluindo a tecnologia. Uma vez que as futuras professoras eram alunas da disciplina de DMII, a sua participação no estudo foi voluntária através da sua autorização prévia num consentimento informado que lhes foi entregue na primera semana do semestre letivo.

4. Metodologia do estudo

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011), segue uma modalidade de *Investigação Baseada em Design* (IBD) (Cobb et al., 2003) e apoia-se numa Experiência de Formação para desenvolver uma teoria local sobre como promover o TPACK de futuros professores de Matemática. Para o propósito deste texto apresentamos os resultados obtidos no primeiro de dois ciclos de *design* completos (preparação, experimentação e análise retrospetiva da Experiência de Formação) que foram realizados no âmbito deste estudo.

A preparação da Experiência de Formação contemplou duas dimensões principais. Uma dimensão, que referimos como *dimensão prática-pedagógica*, consistiu na definição de uma abordagem que orienta a experimentação da Experiência de Formação na sala de aula. Esta abordagem segue uma *Trajetória de Formação e Aprendizagem* (Figura 2) que envolveu sete tarefas (T1 a T7) e contemplou três fases: (i) experiências iniciais, (ii) experiências de formação e aprendizagem, e (iii) experiências de produção.

Na Fase 1 pretendemos explorar as conceções que os futuros professores têm sobre a integração da tecnologia na Educação Matemática e promover a articulação dessas conceções com o seu conhecimento didático através da participação num fórum online (T1) e da análise de um plano de aula que integra a tecnologia (T2). A Fase 2 tem o objetivo de desenvolver o conhecimento tecnológico dos futuros professores através da exploração do *TinkerPlots*™ (T3) e do *GeoGebra* (T4) e também promover a articulação deste conhecimento com o conhecimento didático quando os futuros professores elaboraram uma tarefa matemática integrando um recurso tecnológico (T5). Finalmente, na Fase 3, procuramos promover a mobilização do TPACK dos futuros professores na planificação de aulas que integrem a tecnologia (T6) e na reflexão sobre situações de aprendizagem (T7).

Figura 2. Trajetória de Formação e Aprendizagem da Experiência de Formação

A segunda dimensão desta preparação é *teórica-investigativa*, que envolveu a elaboração de um conjunto de cinco princípios de *design* que constitui a base da conjetura de formação e aprendizagem que suporta a realização do 1.º ciclo de experimentação da Experiência de Formação:

I. Organizar sequencialmente as tarefas numa trajetória de formação e aprendizagem.
II. Usar tarefas abertas contextualizadas em situações da prática profissional docente.
III. Promover a integração de conteúdo, pedagogia e tecnologia nas tarefas propostas.
IV. Promover o uso de diferentes tecnologias durante a resolução das tarefas.
V. Promover espaços dedicados à reflexão e partilha de conhecimentos.

Define-se como conjetura inicial desta IBD que *uma Experiência de Formação sustentada nestes cinco princípios de design contribui para promover o TPACK dos futuros professores de Matemática*.

A fase de experimentação da IBD contemplou a implementação das tarefas em 11 aulas de DMII. No geral, as aulas seguiram uma abordagem metodológica baseada no ensino exploratório (Canavarro, 2011), contemplando três momentos: (i) apresentação e introdução da tarefa aos futuros professores, onde são dadas instruções para a resolução da tarefa; (ii) resolução autónoma da tarefa pelos futuros professores, trabalhando individualmente (nas T1 e T7) ou em pares (Patrícia e Cristina, Sara e Vitória, Marta e Paula, nas restantes tarefas); e (iii) discussão coletiva, que consistiu um espaço de reflexão e partilha das resoluções.

4.1. *Análise de dados*

Na IBD, cada ciclo de *design* conclui-se com a fase da análise retrospetiva. Nesta fase, analisaram-se os dados recolhidos das resoluções escritas (RT#) das futuras professoras (FP) das sete tarefas propostas na formação, referidas na seção anterior , e dos registos áudio das discussões coletivas (DCT#) destas tarefas na sala de aula, com o propósito de analisar o TPACK das FP e, assim, obter resultados que fundamentem o refinamento dos princípios de *design* da Experiência de Formação e, consequentemente, a reformulação da conjetura de formação e aprendizagem.

A análise dos dados foi feita de forma descritiva e interpretativa. Esta análise envolveu uma primeira fase de codificação dos dados, realizada com apoio do *software NVivo,* com base em quatro categorias definidas a *priori* que correspondem às componentes cognitivas de Niess (2012a): conceções, currículo, aprendizagem e ensino. Formularam-se ainda subcategorias para cada uma das componentes (Figura 3), definidas a *posteriori* a partir dos dados, que permitem uma análise mais aprofundada do TPACK, detalhando e promovendo a compreensão das componentes cognitivas que compõem a sua estrutura.

C1. Conceções

- **C1$_{(1)}$:** Integração da tecnologia na Educação Matemática.
- **C1$_{(2)}$:** O professor na integração da tecnologia na Educação Matemática.

C2. Currículo

- **C2$_{(1)}$:** Formulação de objetivos de aprendizagem quando se integra o uso da tecnologia.
- **C2$_{(2)}$:** Enquadramento da tecnologia no currículo escolar.
- **C2$_{(3)}$:** Gestão dos recursos tecnológicos na sala de aula.
- **C2$_{(4)}$:** Estratégias de avaliação das aprendizagens quando se integra a tecnologia.

C3. Aprendizagem

- **C3$_{(1)}$:** Papel do aluno quando usa a tecnologia na realização de tarefas matemáticas.
- **C3$_{(2)}$:** Potencialidades e desafios da tecnologia na aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos.

C4. Ensino

- **C4$_{(1)}$:** Papel do professor quando usa a tecnologia na sala de aula.
- **C4$_{(2)}$:** Estratégias de ensino para orientar os alunos no uso efetivo de ferramentas tecnológicas na resolução de tarefas.
- **C4$_{(3)}$:** Tarefas quando se integra o uso de recursos tecnológicos na exploração de conteúdos matemáticos.

Figura 3. Categorias e subcategorias de análise do TPACK

5. O TPACK DAS FUTURAS PROFESSORAS

5.1. C1: *Conceções*

5.1.1. $C1_{(1)}$: *Integração da tecnologia na Educação Matemática*

No geral, as intervenções das FP no fórum *online* revelaram conceções favoráveis à integração da tecnologia na Educação Matemática, reconhecendo os benefícios do seu uso na sala de aula para o ensino e aprendizagem da Matemática. Por exemplo, Sara afirma que "a utilização das tecnologias no ensino da Matemática não só é recomendada, mas também fundamental para melhorar os processos de aprendizagem" (RT1) e Vitória considera que o uso de recursos tecnológicos pelos alunos contribui para motivá-los e consolidar as suas aprendizagens de conceitos e processos matemáticos, referindo: "o acesso à tecnologia permite que o aluno explore uma maior variedade de situações e perceba a verdadeira natureza dos processos matemáticos" e "uma aula com tecnologias pode motivar os alunos a realizarem investigações matemáticas, e ao desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à aula de matemática e uma redução da ansiedade e do medo de cometer erros" (RT1).

Na segunda fase da Trajetória de Formação e Aprendizagem (TFA), as conceções manifestadas pelas FP evidenciam estar suportadas no seu TCK ao reconhecerem potencialidades da tecnologia para a resolução de tarefas matemáticas, como é no caso de Vitória que refere "qualquer tarefa utilizando a tecnologia é sempre diferente, com a tecnologia a visualização é totalmente diferente" (DCT4). Segundo as FP, estas diferenças ajudam o professor a criar ambientes de aprendizagem mais dinâmicos, pois "permite ao professor a introdução de um novo conceito de uma forma mais dinâmica e não tão expositiva" (Sara e Vitória, RT5).

Finalmente, nas reflexões individuais elaboradas na terceira fase da TFA, as FP expressaram e justificaram as suas conceções sobre a integração da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática que, em termos gerais, foram muito favoráveis, mostrando grande aceitação e reconhecimento da importância desta integração. Algumas FP confirmaram a ideia de que a integração da tecnologia induz mudanças nas abordagens de ensino pois "uma aula expositiva perde significado, dando-se, agora, primazia à integração tecnológica, de forma a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais apelativo" (Marta, RT7). Também reconheceram alguns benefícios da tecnologia na aprendizagem da Matemática, considerando que "a aula com tecnologia proporciona a construção de novos conceitos e saberes, potencializando o processo de ensino-aprendizagem" (Vitória, RT7).

Os dados também permitiram identificar mudanças nas conceções de algumas FP. Por exemplo, Marta, na sua reflexão põe em evidência que a sua perspetiva e posição sobre o uso de tecnologias em contextos educativos alterou-se após ter participado na Experiência de Formação:

> Primeiramente, no que diz respeito à utilização, e importância, da tecnologia no âmbito da educação. Durante bastante tempo, adotei uma posição contra a utilização de tecnologias em contexto de sala de aula, por considerar que seria um fator de distração muito elevado, afastando os alunos do foco principal da aula. No entanto, posteriormente à realização do trabalho aqui discutido, percebi que a tecnologia pode ser bastante útil, quando bem implementada, oferecendo ferramentas diversas para a exploração de certos contextos, o que, por vezes, se torna difícil de concretizar, em tempo útil, sem a utilização de recursos tecnológicos (RT7).

A mudança positiva das conceções das FP, em termos de aceitar a integração da tecnologia e reconhecer o potencial que a tecnologia tem no ensino e aprendizagem da Matemática, evidencia que o TK promovido ao longo da Experiência de Formação, começa a articular-se com o PCK das FP, favorecendo o desenvolvimento do seu TPACK.

5.1.2. C1: $1_{(2)}$: *O professor na integração da tecnologia na Educação Matemática*

As FP evidenciaram ter conceções sobre os desafios que o professor pode enfrentar na integração da tecnologia nas aulas de Matemática, referindo fatores que, na sua perspetiva, são os que justificam que a tecnologia não esteja a ser utilizada efetivamente nas aulas de Matemática. Para Marta, "é possível que muitos professores não tenham conhecimentos vastos sobre as tecnologias disponíveis, o que pode causar um certo desconforto quanto à utilização das mesmas" (RT1). Para além de um conhecimento limitado de recursos tecnológicos, as FP indicaram também a possível falta de conhecimento sobre como enquadrar curricularmente a tecnologia como um fator que se pode revelar desafiador para os professores e, portanto, "quando a vão aplicar [a tecnologia] em sala de aula, parece que esta surge de pára-quedas e sem um motivo aparente, apenas porque convém que seja utilizada tal como é recomendado pelas orientações metodológicas do atual Programa de Matemática" (Patrícia, RT1).

Em geral, durante esta discussão no fórum, as FP consideraram não estar preparadas para utilizar tecnologia na sala de aula, principalmente pela falta do necessário conhecimento tecnológico, como Paula indicou: "como futura professora, não me sentiria preparada, neste momento, para utilizar ferramentas tecnológicas numa aula, mas isto deve-se ao facto de não ter uma formação muito aprofundada das diferentes tecnologias que poderão ser usadas em aula" (RT1).

Porém, estas conceções mudaram ao longo da Experiência de Formação pois nas suas reflexões individuais, na última fase da TFA, as FP revelaram conceções favoráveis à integração da tecnologia na sua futura prática profissional. Por exemplo, a conceção de Vitória, ao referir que "percebi como a tecnologia tem um papel cada vez mais importante na sala de aula e, como futura professora, pretendo sempre que for possível considerar a utilização da tecnologia nas minhas aulas" (RT7), parece suportar-se no seu PK em articulação com o TK, evidenciando o desenvolvimento do seu TPK que foi mobilizado para conceber a possibilidade de utilizar a tecnologia na sua futura prática profissional.

5.2. C2: *Currículo*

5.2.1. $C2_{(1)}$: *Formulação de objetivos de aprendizagem quando se integra o uso da tecnologia*

Na T5, as FP formularam objetivos de aprendizagem para uma proposta de ensino que estavam a elaborar e que deveria integrar recursos tecnológicos, tendo Patrícia e Cristina proposto como objetivo da tarefa que "os alunos consigam utilizar e explorar o *software* de acordo com as necessidades da tarefa, [para] formular e testar conjeturas" (RT5). Marta e Paula também formularam objetivos enquadrados curricularmente que podem beneficiar do uso da tecnologia: "com o auxílio do *software*, os alunos poderão desenvolver algumas capacidades transversais, tais como o raciocínio indutivo, desenvolvimento da linguagem matemática, o trabalho autónomo e cooperativo" (RT5). Nos planos de aula elaborados por estas FP também se evidenciaram os propósitos de usar a tecnologia para os objetivos de aprendizagem estabelecidos. Enquanto que Marta e Paula se referiram ao apoio que o *software* pode fornecer numa tarefa de natureza específica: "resolver uma tarefa investigativa utilizando o *software TinkerPlots*™" (RT6), Patrícia e Cristina indicam processos que beneficiam desse apoio: "analisar, tratar, representar graficamente e interpretar dados recorrendo ao *TinkerPlots*™" (RT6).

A formulação destes objetivos permitiu que, por um lado, as FP evidenciassem o seu PCK, ao reconhecerem aspetos curricularmente importantes como o raciocínio matemático, a comunicação matemática, a natureza das tarefas a propor e o trabalho colaborativo entre os alunos. Por outro lado, as FP mobilizam o seu TK reconhecendo a utilidade de uma ferramenta tecnológica para atingir as expetativas de aprendizagem. Contudo, a articulação entre estes dois conhecimentos não se evidencia, pois, os objetivos formulados pelas FP não permitem saber como é esperado que os alunos usem a tecnologia para desenvolver as capacidades curriculares indicadas.

5.2.2. $C2_{(2)}$: *Enquadramento da tecnologia no currículo escolar*

O enquadramento de uma ferramenta tecnológica no currículo escolar foi evidenciado quando as FP reconheceram as potencialidades dessa ferramenta (TK) para explorar conteúdos curriculares específicos (CK) e desenvolver, com apoio à tecnologia, capacidades curricularmente importantes (TCK). Por exemplo, depois da resolução da T4 que envolveu a exploração do *GeoGebra*, Cristina indicou que "uma coisa que me impressionou no *software* foi a parte da visualização de curvas e gráficos, a possibilidade de ir variando as coisas, ou seja, perceber que além do visual consegue ver as relações [algébricas]" (DCT4). Na T5, Patrícia e Cristina também justificaram a tecnologia selecionada para resolver a tarefa que tinham elaborado, apoiando-se no enquadramento curricular dos conteúdos de Geometria e de Álgebra e nas potencialidades do *software* (TK), neste caso o *GeoGebra*, para estabelecer conexões entre estes dois temas matemáticos durante a sua resolução. Isso é evidenciado quando referiram que "como se trata de um *software* diversificado, com potencialidades ao nível geométrico e algébrico, o aluno tem a possibilidade de fazer uma exploração completa e rigorosa que o permite fazer comparações e tirar conclusões mais rapidamente" (RT5) e nas questões do enunciado da tarefa que elaboraram (Figura 4).

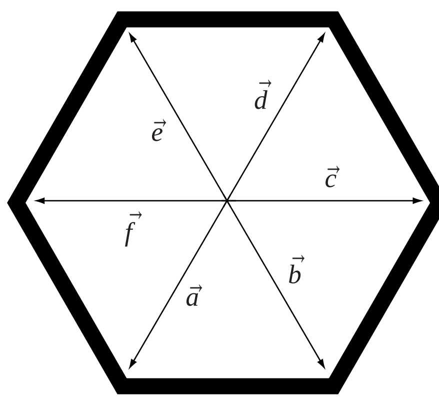
O hexágono ABCDEF representado na figura é regular.

a) Indica o número de eixos de simetria da figura.

b) Descreva as simetrias de rotação que identificas na figura.

c) Constrói a imagem A_1 do ponto A pela translação do vetor $\vec{a}$. Constrói a imagem B_1 do ponto B pela translação do vetor $\vec{b}$ e, assim sucessivamente, constrói os pontos C_1, D_1, E_1, F_1. Qué figura obténs?
   - i Qual é a sua área?
   - ii Qual a relação existente com a área da figura inicial?

d) Investiga o que acontece com:
   - i Retângulo
   - ii Triângulo Equilátero
   - iii Pentágono



e) Qual a razão das relações que encontraste? Verifica-se em qualquer polígono?

Figura 4. Enunciado da tarefa elaborada por Patrícia e Cristina (RT5)

Surpreendentemente, dos três planos de aula elaborados pelas FP, só no plano de aula de Patrícia e Cristina é evidente que as FP conseguiram, tal como já observado na tarefa anterior, mobilizar o seu PCK para enquadrar no currículo escolar o conteúdo a trabalhar na sua proposta de ensino e aprendizagem e em articulação com o seu TK, reconhecendo as opções oferecidas por uma tecnologia específica para abordar esses conteúdos matemáticos segundo as orientações curriculares:

> O trabalho pensado para esta aula segue as propostas feitas ao nível da Organização e Tratamento de Dados, considerando o tópico das Medidas de Localização e o dos Diagramas de Extremos e Quartis. Estes tópicos conseguem ser abordados através do recurso ao *TinkerPlots*™ e de comandos em concreto, como, por exemplo, o comando referente à mediana (RT6).

A articulação entre estes dois conhecimentos evidencia o desenvolvimento e mobilização do TPACK destas FP para enquadrar curricularmente o uso da tecnologia na exploração de conceitos estatísticos.

5.2.3. C2$_{(3)}$: *Gestão dos recursos tecnológicos na sala de aula*

As FP destacaram que a gestão dos recursos tecnológicos na sala de aula é um processo que requer reflexão sobre "quais os momentos em que será mais apropriado utilizar a tecnologia" (Paula, RT1) e que é essencial que o professor seja capaz de responder a algumas perguntas associadas à forma como ele vai gerir a tecnologia na sala de aula, como as que Marta colocou: "pretende-se que os alunos trabalhem a pares? pretende-se que os alunos explorem uma determinada situação ou utilizem a tecnologia como uma ferramenta de pesquisa?" (RT1).

Estes questionamentos sobre a gestão da tecnologia na sala de aula foram atendidos nos planos de aula elaborados pelas FP. Por exemplo, Marta e Paula indicam que "excecionalmente, ao utilizar o *TinkerPlots*™, a turma estará dividida em grupos de dois ou três elementos" (RT6). Noutro plano, foi indicado que "o professor resume todo o trabalho realizado pelos alunos ao longo da resolução da tarefa e reforça a importância da utilização das TIC e os benefícios da utilização do *TinkerPlots*™ na resolução desta tarefa de investigação" (Sara e Vitória, RT6). Já na reflexão individual, Sara destacou que:

> Quando utilizamos a tecnologia na resolução de tarefas, devemos ser capazes de prever um tempo aceitável para a sua concretização e necessitamos de pensar, em cada momento de aula, no uso que iremos dar à tecnologia, de forma a que a mesma seja adequadamente integrada ao longo da toda a aula (RT7).

Estas considerações permitem identificar elementos que evidenciam a mobilização do TPK das FP para reconhecer e definir elementos que o professor precisa de considerar para gerir eficientemente os recursos tecnológicos na sala de aula.

5.2.4. C2$_{(4)}$: *Estratégias de avaliação das aprendizagens quando se integra a tecnologia*

Houve um único episódio na Experiência de Formação, durante a DCT3, focado na forma de avaliar as aprendizagens dos alunos quando resolvem tarefas com recurso à tecnologia. Nesse episódio, as FP destacaram a importância de garantir uma forma para que o professor e os alunos registem o trabalho realizado na resolução da tarefa, que posteriormente será alvo de avaliação. Por exemplo, Cristina indicou que "é possível pedir ao aluno uma espécie de portefólio onde fique registado o seu trabalho, acompanhado com os registos de observação do professor" (DCT3).

A seguir, questionadas sobre o que o professor iria incluir nesses registos de observação, duas FP apresentaram posições diferentes. Patrícia, mais direcionada para a avaliação do produto final, sugere "primeiro se o aluno conseguiu fazer, e segundo se ele conseguiu interpretar, por exemplo, o que é que esse gráfico transmite" (DCT3), e Cristina, focada em avaliar o processo ao longo da resolução da tarefa defende "saber fazer sim, mas também o raciocínio de como fez as coisas, por exemplo, se tentou fazer de outras maneiras, os passos que o levou a dar a resposta" (DCT3).

Embora as FP evidenciem o seu PCK associado à avaliação das aprendizagens, reconhecendo possíveis perspetivas e estratégias de avaliação do trabalho do aluno na sala de aula, não articularam este conhecimento com o TK, pois as estratégias de avaliação referidas não contemplam o uso da tecnologia na própria avaliação das aprendizagens nem explicitam a forma em como será avaliada a exploração e uso da tecnologia por parte dos alunos durante a resolução de tarefas matemáticas.

5.3. C3: *Aprendizagem*

5.3.1. C3$_{(1)}$: *Papel do aluno quando usa a tecnologia na realização de tarefas matemáticas*

O conhecimento das FP sobre os processos de aprendizagem da Matemática foi evidenciado quando concordaram que o uso de recursos tecnológicos deve contribuir para o desenvolvimento da compreensão de conceitos e que para o garantir as aulas devem ser centradas nos alunos. Por exemplo, para Patrícia "é pretendido que estas aulas com as novas tecnologias sejam também centradas no aluno e, portanto, que estes sintam que aquela ferramenta tecnológica os ajudou a compreender a Matemática" (RT1). Vitória, por seu lado, destacou que numa aula que integre tecnologia o aluno deverá ter "um papel ativo na construção do próprio saber, permitindo um maior protagonismo na sua própria aprendizagem" (RT1).

Este papel central do aluno na sua aprendizagem foi concretizado nos planos de aula elaborados pelas FP, pois neles incluem o envolvimento dos alunos numa exploração ativa de conceitos e ideias matemáticas com a ferramenta tecnológica. Por exemplo, no plano de aula de Sara e Vitória sobre o uso do *TinkerPlots*™ no ensino de conceitos estatísticos, as FP indicam que "durante toda a resolução da tarefa, o aluno permanece sentado no computador, trabalha colaborativamente, analisa e interpreta os gráficos. Relaciona os conceitos estatísticos e físicos para fundamentar as possíveis respostas de cada questão" (RT6).

Possíveis Resoluções

- Utiliza o gráfico com os atributos: dia do ano por ano.
- Utiliza o gráfico com os atributos: mês por ano.
- Utiliza o gráfico com os atributos: mês por dia do ano.
- Recorre a uma escala contínua ou por classes.
- Calcula as médias da ocorrência do dia do ano separando os anos por classes.
- Calcula a percentagem de ocorrência de cada mês para cada classe do ano.

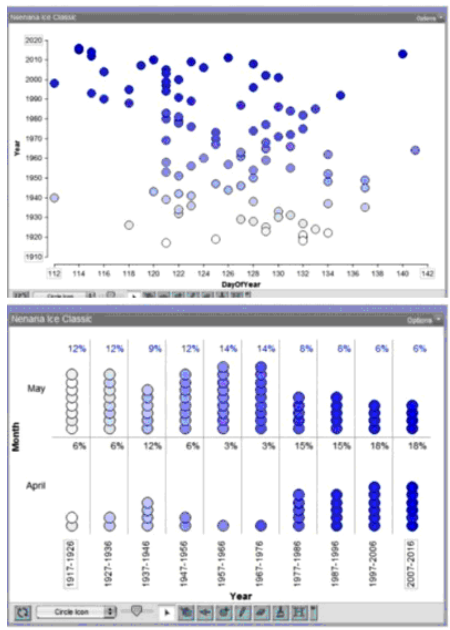


Figura 5. Possíveis soluções de uma tarefa formuladas no plano de aula elaborado por Sara e Vitória (RT6).

Evidencia-se, assim, que as FP mobilizaram o seu PCK em articulação com o TCK para prever e formular as possíveis soluções de uma tarefa em função do papel do aluno quando usa a tecnologia.

5.3.2. C3$_{(2)}$: *Potencialidades e desafios da tecnologia na aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos*

As FP reconheceram que o uso de ferramentas tecnológicas, principalmente o uso de *software* educacional, contribui para o desenvolvimento de processos como a representação, a abstração e a visualização de conceitos, o raciocínio matemático e a intuição, entre outros processos associados à compreensão matemática. Neste sentido, Cristina argumentou que o uso da tecnologia por parte do aluno permite-lhe "um desenvolvimento da sua capacidade de visualização" e que "esta capacidade, para além de ajudar na integração clarificada de muitos resultados, contribui, naturalmente, para o desenvolvimento da sua intuição matemática" (RT1). Para Paula, esta possibilidade que o aluno tem de visualizar os conceitos matemáticos através da tecnologia, ajuda-o a "compreender melhor esta disciplina, desenvolver o seu raciocínio matemático, melhorar as suas aprendizagens, aprender novas formas de pensar e de desenvolver Matemática" (RT1).

Depois de terem explorado o *TinkerPlots*™, as FP reconheceram que a tecnologia enriquece a exploração de conceitos estatísticos pois, como defende Patrícia, "uma tal vantagem é que eles conseguiriam interpretar e visualizar melhor os conceitos" (DCT3). Além disso, as FP discutiram que a tarefa em questão, se fosse resolvida sem uma ferramenta tecnológica, limitaria a aprendizagem dos alunos a um processo mecânico, considerando que sem o uso do *TinkerPlots*™ os alunos "estariam mais empenhados em saber resolver os cálculos do que em interpretar" (Paula, DCT3). Com isto, as FP concluíram que um dos contributos de um uso efetivo desta tecnologia é facilitar a realização de cálculos rotineiros, para dar maior relevância à análise e interpretação das representações e dos resultados obtidos. Em particular, a articulação entre o TK que Vitória adquiriu com a exploração do *TinkerPlots*™ e o seu PCK sobre a aprendizagem da Estatística, levou-a a concluir que este *software* promove a representação de um mesmo conceito de diversas formas, permitindo "ao aluno explorar vários tipos de representações, de forma a encontrar uma mais adequada para a justificação e a fundamentação do que era suposto realizar" (DCT3).

Finalmente, nas reflexões individuais, as FP revelaram consolidação do seu TCK, produto da exploração de ferramentas tecnológicas específicas como o *GeoGebra* e o *TinkerPlots*™, reconhecendo as potencialidades destes *softwares* para promover processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Por exemplo, Vitória indicou que "a tecnologia no ensino da Matemática promove uma melhor visualização e, com isso, faz atenuar a necessidade de abstração e de idealização, tornando as ideias menos complicadas e mais percetíveis" (RT7). Paula, para além de também salientar o potencial deste *software* para a visualização matemática, acrescentou a motivação que, segundo as FP, tem implicações positivas na aprendizagem da Matemática: "o facto de se inserir uma ferramenta tecnológica na qual os alunos trabalham de forma independente, estes estariam mais motivados, pois a própria aula é diferente daquilo que é habitual" (RT7).

Nestes resultados evidencia-se que as FP mobilizaram o seu TPACK, reconhecendo diversas potencialidades que ferramentas tecnológicas específicas tem para promover a exploração de conteúdos matemáticos e os processos de aprendizagem associados.

5.4. C4: *Ensino*

5.4.1. $C4_{(1)}$: *Papel do professor quando usa a tecnologia na sala de aula*

Tal como já referido, as FP reconheceram que a integração da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática exige um professor reflexivo, principalmente quando se dedica à planificação de aulas. As FP argumentam que, nesta planificação, o professor deve refletir sobre as dificuldades de aprendizagem que os alunos podem ter e a forma como eles podem ultrapassar essas dificuldades com apoio da tecnologia. Segundo Paula, "o ideal é ultrapassar essas dificuldades com o uso da tecnologia" (DCT2), pelo que é relevante que os professores "trabalhem mais a tecnologia em si, e mesmo eles [os professores] reflitam sobre as dificuldades que poderiam ocorrer" (DCT2). No mesmo sentido, Sara afirmou que o professor deve fazer "uma boa exploração da tecnologia a utilizar, para que se sinta confortável na explicação da mesma (RT1).

Depois, durante a resolução da T5, as FP concordaram que o professor de Matemática passa a ter um papel de orientador do trabalho dos alunos quando usam ferramentas tecnológicas na sala de aula. Um exemplo desta perspetiva é quando Sara e Vitória indicaram que o professor "deve acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, esclarecer dúvidas que possam surgir na utilização do *GeoGebra* e também na interpretação e compreensão da tarefa. Deve colocar questões de forma a orientar os alunos nas suas explorações" (RT5), pelo que se evidencia que as FP mobilizaram o seu TPK, nomeadamente o conhecimento sobre as adaptações da prática letiva quando se integra a tecnologia.

5.4.2. $C4_{(2)}$: *Estratégias de ensino para orientar os alunos no uso efetivo de ferramentas tecnológicas na resolução de tarefas*

Após a exploração de um recurso tecnológico, as FP refletiram e discutiram sobre possíveis estratégias de ensino para integrar esse *software* na sala de aula, tendo consideração as suas ferramentas e o dinamismo do programa. Este espaço de discussão coletiva promoveu a articulação entre o TK que as FP acabaram de adquirir sobre a ferramenta tecnológica e o PCK associado às estratégias que o professor pode seguir para integrar esta ferramenta tecnológica na sala de aula. No caso do *TinkerPlots*™, por exemplo, Patrícia defendeu que ao integrar o software na sala de aula "é importante explicar e referir para que é que serve cada comando, ou se calhar, explicar o seu significado, também referir que tudo funciona a arrastar" (DCT3).

Apesar de nesta discussão as FP começarem a definir possíveis estratégias de ensino para integrar a tecnologia na sala de aula, durante a discussão da T4, as FP concordaram sobre o desafio que poderiam enfrentar na integração do *GeoGebra* na sala de aula. Particularmente indicaram que teriam dificuldade em orientar o trabalho autónomo dos alunos, no sentido de planear e executar estratégias que acompanhem os alunos de modo que sejam eles os protagonistas na exploração do *software*, como Cristina referiu:

> Seria difícil poder dar apoio no uso efetivo da tecnologia e que acabem por não ter autonomia [os alunos], nós como professores seria difícil dar as dicas ou apoio sem dar a resposta concreta e imediata do que devem de fazer (DCT4).

Neste ponto, evidencia-se alguma dificuldade das FP para articularem o TK com o PK na formulação de estratégias de ensino que promovam uma integração efetiva da tecnologia. Ainda que este desafio não tenha impedido as FP de propor algumas estratégias de ensino para integrar a tecnologia na sala de aula, esta dificuldade foi evidenciada na T5, onde foi solicitado às FP para indicarem uma possível metodologia de aula para implementar a tarefa que estava a ser elaborada por elas.

Nas resoluções das FP há aspetos, embora gerais, associados às estratégias de ensino por elas adotadas. Por exemplo, organizar os alunos em pares ou tríades e a discussão coletiva das resoluções dos alunos foram opções referidas por todas, tal como proposto por Marta e Paula: "a tarefa seria trabalhada pelos alunos a pares. No fim, seria realizada uma breve discussão em grupo turma, com o objetivo de comparar as várias conjeturas desenvolvidas pelos alunos e apresentar o teorema de Pitágoras" (RT5). Já algumas outras opções salientam a forma como o professor deveria apoiar os alunos durante a exploração da tecnologia, neste caso o *GeoGebra*. Por exemplo, Sara e Vitória estabeleceram que o professor "deve acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, esclarecer dúvidas que possam surgir na utilização do *GeoGebra* e também na interpretação e compreensão da tarefa. Deve colocar questões de forma a orientar os alunos nas suas explorações" (RT5). Semelhantemente, Patrícia e Cristina sugeriram que o professor "questione os alunos de forma a orientá-los para o trabalho autónomo, motive e incentive os alunos na sua exploração" (RT5).

Estes resultados evidenciam que as FP recorrem ao seu PK para estabelecerem metodologias de trabalho na sala de aula. Ainda que esclarecer dúvidas e levantar questões sejam possíveis estratégias que o professor pode seguir, será preciso detalhar estas opções, explicitando como o professor abordará essas dúvidas, como pode direcionar o uso da ferramenta tecnológica para orientar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades, quais as questões que pode colocar e se o seu foco é o conhecimento matemático ou a tecnologia ou ambos. Portanto, apesar de se identificar certa articulação do PK com o TK, as estratégias de ensino propostas são muito gerais, pouco diversificadas, e não especificam como o professor poderia orientar os alunos no uso de ferramentas tecnológicas para resolver tarefas matemáticas.

Este resultado verifica-se também nos planos de aula que as FP elaboraram, somente no de Patrícia e Cristina se evidencia o seu TPK, quando na formulação de algumas estratégias de ensino em que acompanham os alunos no uso da tecnologia indicam que "os professores vão circulando pela sala para esclarecerem possíveis dúvidas que surjam relativamente ao *software*, devem ir relembrando que o programa funciona de forma muito simples, bastando para isso arrastar as componentes que se pretendem analisar" (RT6).

Nas reflexões individuais, confirma-se que a formulação de estratégias de ensino específicas, diferenciadas e eficazes para integrar a tecnologia é uma dificuldade para as FP. Por exemplo, para Sara:

> A escolha de estratégias a serem utilizadas pelo professor foi também uma dificuldade encontrada na elaboração do plano de aula. A decisão de como atuar em caso de dificuldades por parte dos alunos, por si só, é complexa, mas no caso da integração da tecnologia, corresponde ainda a um maior grau de dificuldade por parte do professor (RT7).

Marta também se referiu a esta dificuldade indicando que para ela "um dos maiores desafios à integração da tecnologia é responder à questão "*De que forma conseguimos implementar a tecnologia, de maneira eficaz, suscitando o interesse nos alunos e mantendo o foco essencial da aula?*" (RT7, aspas e itálico no original).

Portanto, são evidentes limitações na articulação do TK com o PK das FP na formulação de estratégias de ensino que orientem os alunos no uso efetivo de ferramentas tecnológicas na resolução de tarefas. Além disto, também não se evidenciou que as FP tenham recorrido ao seu PCK considerando estratégias de ensino diversificadas para abordar conteúdos matemáticos específicos. Deste modo não houve mobilização do TPACK das FP nesta componente sobre o conhecimento das estratégias de ensino quando se integra a tecnologia na sala de aula.

5.4.3. $C4_{(3)}$: *Tarefas quando se integra o uso de recursos tecnológicos na exploração de conteúdos matemáticos*

Durante a discussão da T3, as FP argumentaram que as tarefas de investigação são as que podem tirar maior benefício de um *software* dinâmico, como por exemplo o *TinkerPlots*™, tendo Cristina justificado que:

> Permite que os alunos beneficiem das potencialidades do *TinkerPlots*™, porque se fosse uma tarefa mais fechada os alunos limitar-se-iam ao uso dos comandos, mas numa tarefa de investigação os alunos vão explorar mais [os conceitos abordados] e vão tentar perceber o que estão a fazer (DCT3).

Além disso, as FP reconheceram as vantagens de usar recursos tecnológicos na resolução de tarefas matemáticas. Os dados revelam que as FP mobilizaram o seu PK associado à natureza das tarefas em articulação com TK, com o propósito de salientar o uso que se pode dar à tecnologia na resolução de uma tarefa visando cumprir as metas específicas do ensino. Por exemplo, Vitória fundamentou que "as tecnologias contribuem para mudar a própria natureza dos problemas que são importantes na Matemática e os métodos que os matemáticos utilizam" (RT7) e, para Sara, "a integração da tecnologia nas investigações estatísticas assume um papel relevante na medida em que, ao facilitar a interpretação dos dados, permite que os alunos tirem melhores conclusões sobre os mesmos" (RT7).

Além disto, Paula e Marta salientaram o auxílio que o recurso tecnológico oferece para facilitar a resolução da tarefa: "o *TinkerPlots*™ facilita a resolução de uma tarefa, facilitando os cálculos" (Paula, RT7) e "oferece uma vasta gama de ferramentas estatísticas, que permitem analisar dados de diferentes formas, facilitando a resolução da tarefa proposta" (Marta, RT7). Cristina argumentou, igualmente, que sem este software a resolução da tarefa seria mais complexa, indicando que:

> Pelas suas características, [o *software*] facilita muito a resolução da tarefa proposta, permite que realizem a investigação estatística de um conjunto de dados de forma mais acessível, o que, sem o recurso a este *software*, seria um processo muito mais complexo e trabalhoso (RT7).

Estes resultados mostram que as FP articularam o CK, PK e TK, mobilizando assim o seu TPACK, quando especificam como uma ferramenta tecnológica, neste caso o *TinkerPlots*™, potencializa a resolução de uma tarefa de investigação e permite explorar os conteúdos matemáticos envolvidos na tarefa.

6. A CONCLUIR

A análise do trabalho realizado pelas futuras professoras ao longo da Experiência de Formação que serviu de base a este estudo, permitiu identificar elementos importantes sobre o TPACK que desenvolveram, no que respeita às componentes cognitivas do modelo de Niess (2012a).

Os resultados das conceções evidenciam que as futuras professoras valorizam os benefícios da integração da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática e, baseadas nas suas experiências escolares prévias, são capazes de identificar dificuldades e desafios que o professor enfrenta nessa integração. Além disto, os resultados mostram mudanças positivas nas conceções das futuras professores e a sua atitude quanto ao uso da tecnologia, tal como foi identificado no estudo de Agyei e Voogt (2015). Sobre o conhecimento curricular, os resultados evidenciam que o conhecimento de tópicos matemáticos do currículo e a natureza desses conteúdos suportou o enquadramento da ferramenta tecnológica no currículo, como no caso do *TinkerPlots*™ e a Estatística, permitindo concluir que as futuras professoras conseguem integrar a tecnologia em aspetos como a gestão de sala de aula, a avaliação das aprendizagens e as orientações curriculares. Estas ações estão associadas com o seu conhecimento didático (Ponte, 2012) articulado com o conhecimento tecnológico. Nas componentes de aprendizagem e ensino, os resultados evidenciam uma forte articulação entre o conhecimento didático e o conhecimento da ferramenta tecnológica. Esta articulação acontece principalmente nos momentos de reflexão e planeamento de aulas e, tal como verifica Niess (2012a), é nestes momentos que o TPACK das futuras professoras começa a consolidar-se. Não obstante, à semelhança de outros estudos (Agyei & Voogt, 2015) os resultados também indicam que a planificação de estratégias de ensino específicas para garantir uma integração eficiente da tecnologia na sala de aula constitui um desafio para os professores em formação, atendendo à sua pouca experiência na sala de aula nesta fase de formação. Assim, as dimensões associadas ao ensino da Matemática com tecnologia precisam de uma intervenção formativa mais focada, contribuindo para ultrapassar essas dificuldades.

Com base nestes resultados e considerando o TPACK como um conhecimento complexo, dinâmico e flexível (Niess, 2012b; Koehler et al., 2014), concluimos que neste estudo o TPACK é *complexo* no sentido de que os resultados revelaram que a consolidação e desenvolvimento do TPACK dos futuros professores resulta da articulação de múltiplos domínios do conhecimento profissional do professor, os quais permitem capturar a essência do TPACK, como refere Niess (2012b). É um conhecimento *dinâmico*, pois o desenvolvimento do TPACK implicou uma articulação ativa dos vários domínios do conhecimento profissional do professor, tendo em consideração que o seu propósito é integrar eficientemente a tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática. Também é um conhecimento *flexível*, já que o TPACK das futuras professoras foi mobilizado para vários propósitos, como a formulação de objetivos de aprendizagem, o enquadramento curricular de ferramentas tecnológicas, a formulação de estratégias de gestão de sala de aula e de avaliação, a análise e a elaboração de tarefas e/ou planos de aula para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos com recursos tecnológicas.

Refletindo sobre a Experiência de Formação, nomeadamente sobre os seus princípios de design, a análise dos dados recolhidos neste 1.º ciclo de experimentação permitiram refinar os princípios de design que definem a conjetura de formação e aprendizagem (Figura 6).

P1. Organizar sequencialmente as tarefas numa trajetória de formação e aprendizagem de tres fases.	
P2. Usar tarefas abertas contextualizadas em situações da prática profissional docente.	**P2.** Usar tarefas abertas contextualizadas em situações reais ou ficticias da prática profissional docente que envolvam o uso da tecnologia por parte do professor e do aluno.
P3. Promover a integração de conteúdo, pedagogia e tecnologia nas tarefas propostas.	**P3.** Promover a articulação entre o conhecimentos tecnológico e as conceções dos futuros professores sobre a integração da tecnologia na Educação Matemática.
	P4. Promover a articulação entre o conhecimento tecnológico e conhecimento curricular da Matemática.
	P5. Promover a articulação entre o conhecimento tecnológico e conhecimento didático sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.
P4. Promover o uso de diferentes tecnologias durante a resolução das tarefas.	**P6.** Promover o uso de diferentes tecnologias durante a resolução das tarefas que permita consolidar o desenvolvimento do conhecimento tecnológico dos futuros professores de Matemática.
P5. Promover espaços dedicados à reflexão e partilha de conhecimentos.	**P7.** Promover espaços dedicados à reflexão e partilha de conhecimentos dentro e fora da sala de aula.

*Figura 6***.** Refinamento dos princípios de *design* após o 1.º ciclo de experimentação

Em relação ao P2, apesar de se ter procurado que as tarefas contemplassem diferentes contextos da prática profissional do professor, os dados evidenciaram a necessidade dos contextos focarem mais aspetos da realidade da sala de aula onde a tecnologia esteja a ser usada pelo professor e/ou pelos alunos, com a intenção de aproximar ainda mais o conhecimento didático (Ponte, 2012) com o conhecimento tecnológico. O refinamento do P3, que estava definido genericamente, deu lugar a três novos princípios que pretendem especificar em que consiste a integração entre conteúdo, pedagogia e tecnologia, de acordo com as três componentes cognitivas do TPACK (Niess, 2012a). O refinamento do P4 tem a intenção de salientar que a promoção do uso de diferentes tecnologias é para consolidar o desenvolvimento operacional do TK nos futuros professores. Finalmente, a ter em consideração o resultado de Agyei e Voogt (2015) associado à partilha de experiências entre as futuros professores para favorecer a exploração da tecnología, com o refinamento do P5 pretende-se que a Experiência de Formação ofereça oportunidades de reflexão e partilha de conhecimentos não só dentro de sala de aula, mas também fora da sala de aula através do uso de plataformas digitais. A planificação, implementação e análise deste estudo permite-nos concluir que embora as quatro componentes cognitivas do TPACK propostas por Niess (2012a) ajudem a entender a estrutura do TPACK dos professores, resulta necessário definir subcomponentes que apoiem a compreensão da dimensão operacional de cada uma dessas componentes em contextos específicos de formação inicial. Assim, as subcategorías de análise aqui aprensentadas, constituem uma primeira aproximação à definição das subcomponentes cognitivas do TPACK de futuros professores de Matemática.

No geral, salientamos a importância de um curso de formação inicial integrar diversas tecnologias educacionais que estejam acessíveis aos formandos, de modo a que as suas experiências de formação e aprendizagem constituam um ponto de partida para que as comecem a explorar, desenvolvendo uma posição pessoal sobre tais recursos e um sólido conhecimento tecnológico que possam articular com os conhecimentos pedagógico e do conteúdo. Assim, apontamos para que a Experiência de Formação aqui apresentada, tanto a sua estrutura como a metodologia de investigação que a suporta (IBD), constitua uma prática pedagógica inovadora na formação inicial de professores de Matemática, promovendo o conhecimento dos futuros professores no uso da tecnologia para transformar o ensino e a aprendizagem, respondendo às exigências e desafios da educação no século XXI (Niess e Gillow-Wiles, 2017).

Agradecimentos

Trabalho realizado no âmbito do Projeto *Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab* (contrato PTDC/MHC-CED/0588/2014), financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia e de uma bolsa atribuída ao primeiro autor (OAICECAB-11-201-2014), financiada pela Universidade da Costa Rica.

Referências

Agyei, D. D., & Voogt, J. M. (2015). Pre-service teachers' TPACK competencies for spreadsheet integration: Insights from a mathematics-specific instructional technology course. *Technology, Pedagogy and Education, 24*(5), 605–625. DOI: https://doi.org/10.1080/1475939X.2015.1096822

Albuquerque, C., Veloso, C., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L. e Nápoles, S. (2006). *A matemática na formação inicial de professores.* Lisboa: APM e Secção de Educação e Matemática da SPCE. Recuperado de http://www.apm.pt/files/_90-95_lq_45d9e33dcb34b.pdf

Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE) (2017). *AMTE Standards for Preparing Teachers of Mathematics.* Recuperado de http://www.amte.net/publications

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17. Recuperado de http://www.apm.pt/portal/index.php?id=195438&rid=185366

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R. e Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/3699928

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas, Teoria e Prátic*a. Coimbra: Edições Almedina. ISBN: 9789724051376

Earle, R. S. (2002). The integration of instructional technology into public education: Promises and challenges. *ET Magazine, 42*(1), 5-13. Recuperado de http://asianvu.com/digital-library/educational_technology/earle.pdf

Howey, K. R., & Grossman, P. L. (1989). A study in contrast: Sources of pedagogical content knowledge for secondary English. *Journal of Teacher Education*, *40*(5), 24–31. DOI: https://doi.org/10.1177/002248718904000504

Koehler, M. J., Mishra, P., Kereluik, K., Shin, T. S. e Graham, C. R. (2014). The technological pedagogical content knowledge framework. Em J. Spector, M. Merrill, J. Elen e M. Bishop (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 101-111). New York, NY: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5_9

Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. Em A. Leung e A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. 3–16). Cham: Springer. ISBN 978-3-319-43423-0

Mishra, P. e Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Niess, M. L. (2012a). Rethinking pre-service mathematics teachers' preparation: technological, pedagogical and content knowledge (TPACK). Em D. Polly, C. Mims e K. Persichitte (Eds.), *Developing technology-rich, teacher education programs: Key issues* (pp. 316–336). Hershey, PA: IGI Global. DOI: http://doi:10.4018/978-1-4666-0014-0.ch021

Niess, M. L. (2012b). Teacher Knowledge for Teaching with Technology: A TPACK lens. Em R. Ronau, C. Rakes e M. Niess (Eds.), *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact: A research handbook on frameworks and approaches* (pp. 1-15). Hershey, PA: IGI Global. ISBN 978-1-60960-751-7

Niess, M. e Gillow-Wiles, H. (2017). Expanding teachers' technological pedagogical reasoning with a systems pedagogical approach. *Australasian Journal of Educational Technology, 33*(3), 77-95. DOI: https://doi.org/10.14742/ajet.3473

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática, 41,* 83-98. Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/29194

Ponte, J. P. e Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. Em L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York, NY: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Autores

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Costa Rica. fgutierrez92@gmail.com

Ana Henriques. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. achenriques@ie.ulisboa.pt

Özkan Ergene, Ahmet Şükrü Özdemir

A STUDY ON THE PRE-SERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS' KNOWLEDGE ON THE CONVERGENCE AND DIVERGENCE OF SERIES IN THE CONTEXT OF THEORY AND APPLICATION

RESUMEN

El foco de esta investigación es el examen del conocimiento teórico y práctico sobre la convergencia y la divergencia de la serie. En línea con el enfoque de investigación, los maestros pre-servicio de matemática sobre la convergencia y divergencia de la serie con la ayuda del problema de la vida real en el contexto de la teoría y la aplicación utilizando el concepto de series armónicas. La investigación se guió de un método cualitativo, estudio de caso. Los datos de la investigación han consistido en dos preguntas escritas y un problema y cuatro preguntas de entrevista que fueron formadas por los investigadores y se aseguró su validez y confiabilidad. El estudio llegó a la conclusión de que maestros de pre-servicio matemática tienen conocimientos teoríco sobre la convergencia de series y series armónicas, su percepción de las series, las series armónicas, los conceptos de convergencia y divergencia cambiaron en el proceso de solicitud y adoptaron diferentes enfoques en la resolución de problemas.

PALABRAS CLAVE:

- *Enseñanza del cálculo*
- *Series armónicas*
- *Convergencia y divergencia*
- *Teoría y aplicación*

ABSTRACT

The focus of this research is the examination of the theoretical and practical knowledge regarding the convergence and divergence of the series. In line with the research focus, it is aimed to reveal the approaches of pre-service elementary mathematics teachers on the convergence and divergence of the series with the help of the real-life problem in the context of theory and application by using the concept of harmonic series. The research carried out the qualitative research method is designed according to the case study. The data of the research have consisted of two written questions and one problem and four interview questions which were formed by the researchers and their validity and reliability were ensured. The study concluded that pre-service teachers have theoretical knowledge on the convergence of series and harmonic series. Also, their perception of series, harmonic series, convergence and divergence concepts changed in the application process and they performed different approaches in problem-solving.

KEYWORDS:

- *Calculus Teaching*
- *Harmonic Series*
- *Convergence and Divergence*
- *Theoretical and Application*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (2): 203-232.
Recepción: Diciembre 9, 2019 / Aceptación: Julio 12, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2323

RESUMO

O foco desta investigação é a análise do conhecimento teórico / prático sobre a convergência e divergência de uma série. Em consonância com o foco da pesquisa, pretende-se analisar as abordagens dos professores estagiários de matemática sobre a convergência e divergência da série com a ajuda de problemas da vida real no contexto da teoria e da aplicação utilizando-se o conceito de série harmónica. A pesquisa foi realizada usando o método de pesquisa qualitativa e foi projetada de acordo com o estudo de caso. Os dados da pesquisa consistiram em duas questões escritas e um problema, e uma entrevista com quatro perguntas formadas pelos investigadores, sendo que a sua validade e fiabilidade foram garantidas. A investigação concluiu que os professores estagiários têm conhecimento suficiente sobre a convergência de séries e séries harmónicas. Além disso, a sua percepção de séries e séries harmônicas, conceitos de convergência e divergência mudaram durante o processo de aplicação, realizando diferentes abordagens na resolução dos problemas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensino de Cálculo*
- *Série Harmônica*
- *Convergência e Divergência*
- *Teórica e Aplicação*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche consiste à étudier les connaissances théoriques et pratiques relatives à la convergence et à la divergence des séries. Conformément à cet objectif, l'étude vise à révéler les approches des futurs enseignants de mathématiques au secondaire liées à la convergence et à la divergence de la série harmonique en théorie et en pratique à l'aide d'un problème de la vie réelle. La méthode de recherche adoptée relève d'une démarche qualitative dans le cadre d'une étude de cas. Les données de la recherche comprennent d'une part, deux questions et un problème écrit et d'autre part, quatre questions d'entretien dont la validité et la fiabilité sont assurées par le chercheur lui-même. Les résultats de l'étude montrent que les futurs enseignants atteignent un niveau de connaissances théoriques sur les séries et sur la convergence des séries harmoniques. Par ailleurs, l'étude révèle aussi que les futurs enseignants se diffèrent quant à l'attribution de sens aux concepts de série, de série harmonique, de divergence et d'infini, ainsi qu'à l'approche de la résolution de problèmes.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement de l'Analyse*
- *Série Harmonique*
- *Convergence et Divergence*
- *Théorique et Pratique*

1. Introduction

The concept of series is closely related to the teaching of concepts in mathematics such as sequences, limits, derivatives and integrals. Indeed, series are utilized in the calculation of Riemann integral, which is used to calculate definite integrals, in the calculation of differential equations, in the conversion of repeating decimals, and in the expansion of functions (Taylor Series). In addition to mathematics, series are used in science, specifically in biology, in the creation of population distribution models, and in economy to calculate interest rates of bank accounts. Thus, series do not only contribute to the improvement of Calculus courses, but they also figure in the application of various disciplines of science and mathematics. Moreover, they are incorporated in the high school curriculum and university level mathematics and Calculus courses in many countries (González-Martín, 2013a).

The teaching of series firstly includes finding the rules of number patterns and sequences, creating formulae that correspond to the discovered rules, and finding the general term of the sequences. Then, the sums of the series, whose general terms are known, are calculated. The aim of the calculation is to determine the sum of the series. That is, if the sum of the series exists as a real number, it is called a convergent series and if the sum does not exist as a real number, it is called a divergent series. Indeed, these calculations are valid for series that are defined within the set of real number. On the other hand, calculations for series that are defined within the set of complex numbers are much different.

There are two principle methods to determine the convergence or the divergence (character) of a series. The first method is to define the convergence of a_n sequence of partial sums comprising the first n term of the series. The second method is determining convergence by using various criteria such as d'Alembert's ratio test, Cauchy's Root Test and Raabe's Test. Both methods to define the character of a series consist several mathematical concepts, including function, sequence, limit, integral and infinity. For instance, the concepts of limit and integral are used in the application of a certain solution or a test to define the character of the series and the calculations are based on these concepts. On the other hand, there are also special forms of series such as the Taylor series produced by the patterns of derivatives of a function (Martin, 2012).

Another special form of series is the harmonic series denoted by $(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Harmonic series is among the generic examples for series whose general terms tend to zero, while the series itself diverges. Harmonic series which are also utilised in music theory (Aliyev & Dil, 2012) as well as in mathematical disciplines such as calculus and number theory are closely followed by mathematicians and has been studied for almost 400 years since the era of Euler. The research has produced multiple proofs of divergence of harmonic series. One of the reasons of why harmonic series is followed closely includes the scenarios where the $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ Riemann series defined for $p>0$ becomes a special case if $p=1$, and where the $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ proposition with continuously decreasing sum diverges to infinity.

Series is considered to have a complex structure (González-Martín, Nardi & Biza, 2011) and a difficult nature (Cornu, 1991; González-Martín, 2013b) because it is related to many subjects of calculus, it contains interesting elements such as harmonic series and it is utilised in various disciplines, including science. Literature review on mathematics education shows that the number of research studies focused on series is less than the number of research studies on derivative, limit and other such concepts of calculus. The small number of studies on series in the literature is striking.

Gonzàlez-Martin, Nardi and Biza (2011) indicated that the studies in literature which focus on series were examined in three groups consisting of the definition of the concept, student experiences in the learning of the concept, and the suggestions on the teaching of the concept. Additionally, there exist studies which examined series together with related concepts such as integral (Bezuidenhout & Olivier, 2000), derivative and sequences, as well as other studies which examined its relations with its inherent concepts such as convergence (Boschet, 1983; Robert, 1982) and infinity (Fischbein, 1987). There are also studies focused on special forms of series that include Taylor Series (Martin, 2012) and Power Series (Kung & Speer, 2010). Participants in the conducted studies varied from high school and undergraduate students to teachers and lecturers.

Boschet (1983) and Robert (1982) highlighted the lack of practice and the little use of graphic representations in the teaching of series. It is asserted that in addition to use of graphic representations in the teaching of series, using visual reasoning could also improve the conceptual understanding of students (Alcock & Simpson, 2004; Bagni, 2000; Alcock & Simpson, 2004; Bagni; 2000; Fisher, 2016). Furthermore, it is acknowledged that the traditional teaching of series disregards the procedural and conceptual distinction.

In the structuring the idea of infinity in series, the fact that infinite terms cannot be perceived as a whole (Fischbein, 1987) and the perception that infinite terms imply infinite sum (Bagni, 2000; 2008) lead to difficulties in student understanding of the concept of series (Bagni, 2005). Furthermore, it is underlined that students think that symbolic representations of series are different (Kidron, 2002). Similarly, Mamona (1990) emphasised confusion of students regarding sequences and their incapacity to consider series as functions.

According to literature review, it is evident that students experience various difficulties in the comprehension of series. One of the main reasons of these difficulties is students' lack of conceptual understanding of series (Fisher, 2016; Alcock & Simpson, 2004). The constructivist approach adopted in recent years emphasizes that students should be able to apply their academic knowledge to real-life and should comprehend concepts on a more functional level. Thus, it is necessary to elaborate on the fields of application of various mathematical concepts and to evaluate theoretical knowledge of students along with their knowledge of application (Bransford, Brown & Cocking, 2000). It is within this context that series should be associated with real-life situations and problems and real-life situations should be used in teaching and evaluation processes of series.

In the light of these situations, the focus of this study consists of "examination of the knowledge of pre-service elementary mathematics teachers' on the convergence and the divergence of series in the context of theoretical knowledge and practical knowledge". In accordance with the study focus, the purpose is to investigate the approach of pre-service teachers to the convergence and the divergence of series using the concept of harmonic series in the context of theoretical knowledge and practical knowledge with the support of a real-life problem. For this purpose, following research questions were formulated:

i. What is the theoretical knowledge of pre-service elementary mathematics teachers on the convergence and the divergence of series?
ii. What is the theoretical knowledge of pre-service elementary mathematics teachers on the convergence and the divergence of harmonic series?
iii. How do the pre-service elementary mathematics teachers apply their knowledge on the convergence and the divergence of series to the process of solving a real-life problem?

1.1. *Conceptual Framework and Significance of the Study*

The Calculus course comprises abstract, complex and hierarchical concepts (Nesbit, 1996). Therefore, students encounter with difficulties in the learning and teaching of these concepts (Ergene & Özdemir, 2020; Cetin, Dane & Bekdemir, 2012). Particularly, series is an important concept in order to understand other concepts of Calculus and it is strongly related to sequences. Research studies which were conducted about the convergence of sequences mostly focused on developing methods to teach the concept but there are limited number of studies that examine pre-service teachers' content knowledge about this concept (Alcock & Simpson, 2004). Similarly, Kung and Speer (2013) emphasized that even though series is an important part of calculus courses, little is known about how students think about this concept. In addition, not only students from all levels but also teachers have a difficulty in understanding the concept of series (Lindaman & Gay, 2012). Thus, it was suggested that using specially designed problems and questions about this concept enable students to improve their content knowledge (Przenioslo, 2005).

Contextualized mathematical problems can be used in order to promote application of mathematical knowledge flexibly and adaptively. Research have shown that presenting mathematical tasks enriched with real life contexts that are meaningful for students can help them internalize problem solving experiences (Stillman, 2000) because students shape meaningful tasks themselves by establishing relations with them (Busse, 2005). Using real contexts not only enable students to use different strategies but also facilitate their comprehension by activating knowledge structures (Ceci & Roazzi, 1993). Therefore, there is a need to make explicit connection between theory and practice, i.e. between mathematical content and the real world in order to make the mathematical content relevant to students.

A framework helps conceptualize and design research studies by providing a structure. Particularly, a research framework shapes formulation of the research questions for which the answers are sought and how the research concepts, constructs and processes are defined (Lester, 2005). In the present study, knowledge on the convergence and divergence of series were examined in terms of both theoretical and practical knowledge as a conceptual framework. The knowledge that can be obtained from textbooks consisting of series, harmonic series, mathematical definitions and notations was considered as theoretical knowledge. On the other hand, the use of this knowledge in solving real-life problems has been determined as practical knowledge. That is, "theoretical knowledge" refers to the knowledge in the textbooks, while practical knowledge refers to the "use" of the theoretical in a "contextual" situation."

The present study was designed, therefore, to investigate the transition between knowledge and context on students' interpretation of series. The findings may have both theoretical and practical implications. From a theoretical perspective, investigating the role of real-life problem context on understanding series is likely to allow inference about the nature of knowledge. In addition, from a practical perspective, understanding how pre-service teachers function in the given context may contribute to the design and manipulation of instructional conditions. Since there are limited number of studies which are conducted about series especially harmonic series, we believe that the findings of the study will contribute to mathematics education literature. Furthermore, the findings of the study may also point the relationship between series and infinity / limit concepts. Moreover, the findings of the study can enlighten teacher educators about teacher education programs and the content of the mathematics courses especially Calculus courses.

2. Methodology

The qualitative research method was adopted in this study in order to reveal pre-service teachers' approaches to the convergence and divergence of series in the context of theoretical and practical knowledge using the concept of harmonic series.

2.1. *Research Design*

In this study, case study was utilized which is one of the qualitative research methods. In a case study, it is required to clearly define the subject matter of the study (Yin, 1994). Theoretical and practical knowledge of pre-service teachers on series have been considered as individual cases to be studied within the scope of the study.

2.2. *Participants*

The participants of this study consist of 50 pre-service teachers who were studying at the Elementary Mathematics Education program of one of the public universities located in Marmara Region of Turkey and who all have completed Calculus I-II-III courses successfully at the time of the study. The participants of this study have been selected by using purposive sampling method (Patton, 1990) among the non-random sampling methods.

2.3. *Context of the Study*

The context for this study was an Elementary Mathematics Education program at one of the public universities in Turkey. This program is four-year undergraduate program designed in order to train pre-service elementary mathematics teachers to teach mathematics at grade levels 5 to 8 (ages 10–14). Calculus I and Calculus II courses are offered in the second year of the program while Calculus III course is offered in the third year of the program. In addition to Calculus courses, other mathematics content courses such as Statistics, Probability, Algebra are offered. In the last two years of the program, pre-service teachers take courses related to methods of teaching mathematics and teaching practice.

In the present study, all pre-service teachers selected as participants studied sequences, series and harmonic series in Calculus III course and sequences in Calculus I course and completed all these courses successfully. They studied series for 24 class hours in 8 weeks in Calculus III course and studied sequences for a total of 18 class hours, of which 12 class hours in 2 weeks were allocated for Calculus I course and 6 class hours in 2 weeks were allocated for Calculus III course.

2.4. *Data Collection Tools*

In this study, questionnaire and semi-structured interview protocol were used as data collection tools. In the questionnaire, two open ended questions (Q_1 and Q_2) and one real-life problem (P_1) were presented to pre-service teachers in order to examine their knowledge on harmonic series and to reveal the discrepancies between theoretical and practical aspects of their knowledge (see Appendix I). In addition, semi-structured interviews were conducted with four pre-service teachers. During the interviews, four questions (I_1, I_2, I_3 and I_4) were asked pre-service teachers in order to further explore their responses to the questions and problem in the questionnaire to fully understand the reasons of their given responses (Table I).

TABLE I

Questions and the problem addressed in the study and their purposes

Code	*Question*	*Purpose*
Q_1	What does it mean when a series is convergent or divergent? Please explain.	To examine theoretical knowledge of pre-service teachers on convergence and divergence
Q_2	Examine the convergence of $(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonic series. (Aliyev & Dil, 2012)	To examine theoretical knowledge of pre-service teachers on convergence and divergence of harmonic series

P_1	A water tank of 38 m^3 capacity is to be filled up; – $1\,m^3$ on the first day, – $\frac{1}{2}m^3$ on the second day, – $\frac{1}{3}m^3$ on the third day, – $\frac{1}{n}m^3$ on the n^{th} day … Can the water tank be completely filled up in this manner? Please explain your answer.	To reveal application of pre-service teachers' knowledge on convergence and divergence to real-life situations
I_1	What are the differences between the convergence and the divergence of a series?	To obtain further information on the concepts of convergence and divergence
I_2	How much water do you estimate will be collected in the water tank? Can you express the amount of collected water in terms of quantitative data (mathematical expressions)?	To examine the concept of infinity and the ability to associate real numbers with the concept of infinity
I_3	Could you please repeat your solution to the presented question?	To obtain detailed information on the utilised representations
I_4	A water tank of 38 m^3 capacity is to be filled up; – $\frac{1}{2}m^3$ on the first day, – $\frac{1}{4}m^3$ on the second day, – $\frac{1}{8}m^3$ on the third day, – $\frac{1}{2^n}m^3$ on the n^{th} day … Can the water tank be completely filled up in this manner? Please explain your answer.	To reveal ability of pre-service teachers to find the solution of a convergent series; and the ability of them to apply to a real-life situation; and to compare the answer with the answers given to P_1

Following the literature review, questions Q_1 and Q_2 addressed in the study were developed by the researchers in order to explore the theoretical knowledge of pre-service teachers on the convergence and the divergence of series. Similarly, problem P_1 and the interview question I_4 presented in the study were also developed by the researchers in order to explore the practical knowledge of pre-service teachers on the concepts of convergence and divergence by using the series. The studies of Yalçınkaya (2015) and González-Martín, (2013b) inspired the researchers in the design of problem P_1. Likewise, all the other questions presented in the interviews were also developed by the researchers. To take expert opinion, three mathematics education researchers were consulted for the questions after the purpose of the study and research questions were presented to them. These researchers have conducted research studies on the concepts of Calculus and they were instructors of Calculus courses in different universities at the time of the study. According to the expert opinions, the question I_3 was included in the study and revisions such as the statement “Please explain your answer” were made. After the revisions and additions, the questions and the problem were considered as appropriate to present.

2.5. *Data Analysis*

Data in this study were analysed by descriptive analysis method (Robson, 1993) in accordance with purpose of the study and research questions. The analysis of questions and answers have been completed through the descriptive analysis method in three phases consisting convergence and divergence of series, convergence and divergence of harmonic series, and evaluation of the real-life problem. During data analysis process, one mathematics education expert has also been consulted.

2.6. *The Role of the Researchers*

As qualitative research is inherently based on observation and interpretation, the role of researchers is essential in this process. The observations and experience of researchers were influential on the selection of the participants of the study. The study is structured on the experiences of the first researcher during his undergraduate education and on his belief that he felt inadequate in application of the concepts of series and harmonic series to real-life during his undergraduate education as well as the second researchers’ experiences, opinions and guidance on the matter. Moreover, the time spent together with the participants in the courses and extracurricular environments and the various comments on series during natural and short conversations made us think that various approaches about the series can be evaluated.

2.7. *Validity and Reliability of the Study*

In qualitative research, "credibility" is used for internal validity and "transferability" is used for external validity (Lincoln & Guba, 1985). In order to ensure credibility in the study, data triangulation and investigator triangulation were preferred during the development of data collection tools and the data analysis process. For data triangulation, multiple sources of data consisting of written questions (Q_1 and Q_2) and the problem (P_1) and the interview questions (I_1, I_2, I_3 and I_4) were used. For investigator triangulation, more than one researcher involved in the data collection and data analysis processes. Participants' responses were analysed by the researchers individually and discrepancies were discussed and resolved. Since this is a qualitative study, it does not hold concern for generalization, but the findings can be transferred to similar contexts or settings. For this reason, the case addressed in the study was defined in detail for its transferability to similar contexts or settings. For dependability, audit trail was used. That is, the research steps taken from the start of the research to the development and reporting of the findings were described transparently. The fact that the study method and the process have been reported in detail, that the interview questions have been formulated in accordance with data obtained from the questions and problem addressed in the study, and that opinions of mathematics education experts have been consulted during the study process are evidences to the dependability of the study.

3. Findings

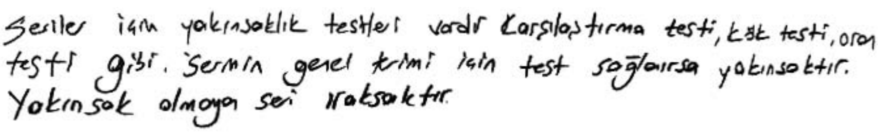
The findings of the study will be presented in the context of convergence and divergence of the series, convergence and divergence of harmonic series and the real-life problem, and they will be supported with the findings of interviews. In the tables, abbreviations were used for both answers of questions (see Appendix 1) and interviewed pre-service teachers. For the first question (Q_1) six different answers (A_{11}, A_{12}, …, A_{16}), for the second question (Q_2) five different answers (A_{21}, A_{22}, …, A_{25}) and for the real-life problem (P_1) three different categories (P_{11}, P_{12}, P_{33}) given by the pre-service teachers were determined. Also, interviewed pre-service teachers were coded as PST_1, PST_2, PST_3 and PST_4 according to their responses to Q_1, Q_2 and P_1 (Table II). For instance, the pre-service teacher who asserted that the harmonic series is convergent and that the water tank can be completely filled up was coded as PST_1. On the other hand, the pre-service teacher who stated that harmonic series is divergent and did not specify on the filling of the water tank was coded as PST_4.

TABLE II
Characteristics of interviewed pre-service teachers

Code	*Harmonic Series*		*Water Tank*		
	Convergent	*Divergent*	*Fillable*	*Unfillable*	*Not Specified*
PST_1	✓		✓		
PST_2	✓			✓	
PST_3		✓		✓	
PST_4		✓			✓

3.1. *Findings on Convergence and Divergence of the Series*

While almost all pre-service teachers (n=48) explained "the convergence of the series" as definition and expression, none of them explained "the divergence of the series". They referred to the divergence of the series as an opposite of the concept of convergence; that is, they used it conversely as "a series which is not convergent, is divergent", or "a series which is convergent, is not divergent" (Figure 1).



Translation of handwriting – "There are convergence tests for series. For instance, comparison test, root test, and ratio test. If the test is ensured for the general term of the series, then the series is convergent. A series that is not convergent, is divergent."

Figure 1. A response about convergence and divergence of the series

Pre-service teachers explained convergence of a series in various ways including the sequence of partial sums (n=15), Cauchy's Convergence Criterion (n=5), convergence criteria (n=4), verbal expressions (n=8), and phrases such as "the sum of the series tends to infinity" and "it is continuously increasing" (n=7) (Table III).

TABLE III
Frequency distribution of answers of the
pre-service teachers who explained convergence of a series

	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
n	15	5	4	8	7	11

Some of the pre-service teachers, on the other hand, explained the convergence of sequences rather than the convergence of series (Figure 2).

Monoton artan ve üstten sınırlı diziler yakınsaktır.
(Monoton azalan ve alttan sınırlı da olabilir.)

Translation of handwriting – "If a sequence is monotonically increasing and bounded from above, it is convergent (It may be monotonically decreasing and bounded from below as well)

Figure 2. A response about convergence of sequences rather than convergence of series

During the interviews, the pre-service teachers attempted to explain the differences between convergence and divergence of a series by providing definitions. Following excerpt illustrates this situation:

I (researcher): What are the differences between convergence of a series and divergence of a series?

PST_2: Convergence of a series means that each of almost all terms of the series tends to a number, while we could say that the divergence of a series means that none of the terms tends to a number.

I: So, is tending to the number significant for being convergence / divergence?

PST_2: Of course. But this number needs to be a real number. Besides, there are some criteria that we discussed in the course, such as the ratio test and the Raabe test. If it meets these criteria, then it is convergent. If it does not, then it is divergent.

All of the interviewed pre-service teachers claimed that the limit of a convergent series needs to be equal to a real number.

PST_4: For a series to be convergent, the limit of its general term must be equal to a real number. Although this is necessary, it is not sufficient. It also needs to satisfy at least one of the convergence criteria, for instance…

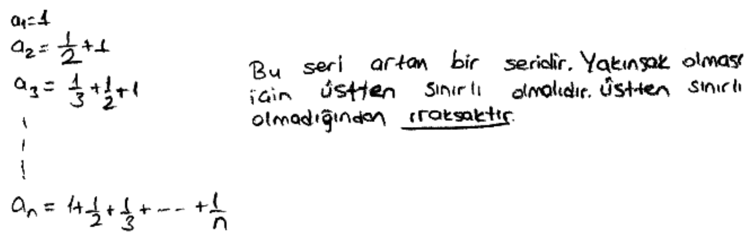
3.2. *Findings on Convergence and Divergence of Harmonic Series*

While most of the pre-service teachers (n=38) asserted that harmonic series is divergent, others (n=11) claimed that the harmonic series is convergent. A very small number of the pre-service teachers (n = 2) stated nothing about the divergence or the convergence of the harmonic series (Table IV).

TABLE IV
Frequency distribution of answers of pre-service teachers to the convergence / divergence of series

To the convergence / divergence of harmonic series	*Reasons*	*n*	*Total*
Harmonic Series is Divergent	A_{21}	19	38
	A_{22}	19	
Harmonic Series is Convergent	A_{23}	9	10
	A_{24}	1	
Not Specified	A_{25}	2	2

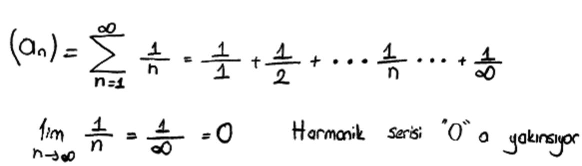
While half of the pre-service teachers asserted that harmonic series is divergent (n=19) and supported their assertions with mathematical expressions, the other half (n=19) explained their opinions with verbal expressions (Figure 3).



Translation of handwriting – "This series is an increasing series. For it to be convergent, it needs to be bounded from above. Since it is not bounded from above, it is divergent.

Figure 3. A response about divergence of harmonic series

Almost all the pre-service teachers asserted that harmonic series is convergent (n=9) and showed that the general term of the series is zero (Figure 4), while the rest (n=1) explained with verbal expressions.



Translation of the handwriting – "Harmonic series converges to 0."

Figure 4. A response about the convergence of the harmonic series

Similar situations emerged in the discussions on the convergence of the harmonic series, and the pre-service teachers verbally explained that the limit is zero as it is presented below. Following excerpt illustrates this situation:

PST_3: Since the limit of the general term of the harmonic series is zero, it is convergent.

I: So, could we say that for the general term of a series having a limit is both a necessary and a sufficient condition for convergence?

PST_3: Yes, we could …

PST_4: For a series to be convergent, the limit of its general term must absolutely be 0. However, that is not sufficient on its own. The limit of harmonic series equals to 0 and yet, the harmonic series is not convergent …

3.3. *Findings on Convergence and Divergence of Series in the Context of a Real-life Problem*

The answers given to the real-life problem will be reported in two sections. Firstly, answers of the pre-service teachers to whether the water tank can be filled or not will be presented. Then, the pre-service teachers' use of mathematical symbols / expressions / concepts in the problem-solving process will be presented. Likewise, the answers to the interview questions will be explained in the same way.

3.3.1. *Examination of the responses for fillable / unfillable water tank*

Approximately one fourth (n=13) of the pre-service teachers claimed that the water tank can be filled up (Figure 5).

1. $1\ m^3$
2. $\frac{1}{2}\ m^3$
3. $\frac{1}{3}\ m^3$

$\vdots$

n. $\frac{1}{n}\ m^3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 38$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 38$$

↳ Doldurcebiliriz, her bir adımda su miktarı düşsede depoya su koymaktayız Böylelikle su doldurma işlemi devam etmek olup belli bir adım sonra 38 m^3 lük de olar

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak bir seridir.

Iraksak serilerin toplamı sonsuzdur. Yani bu su deposu tamamen doldurulabilir.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ şeklinde sürekli üstüne ekleyerek gittiği için su deposu tamamen doldurulabilir.

Translation of handwriting – Above: *"We can fill it up. Although the water level decreases in each step, we are still adding water to the tank. And so, the action of filling continues and after a certain number of steps, the volume of 38m³ will be filled up"*. Below: *"...The harmonic series is a divergent series. The sum of divergent series equals to infinity. Thus, this water tank can be filled up completely. As the series* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ *constantly increases, the water tank can be filled up completely"*.

Figure 5. Responses of the pre-service teachers explaining that the water tank can be filled

Those who claimed that the tank can be filled up explained that the sum of harmonic series reaches infinity and thus the water tank can be filled up under any condition and that as the action of filling the water tank continues infinitely, the water tank can be filled up.

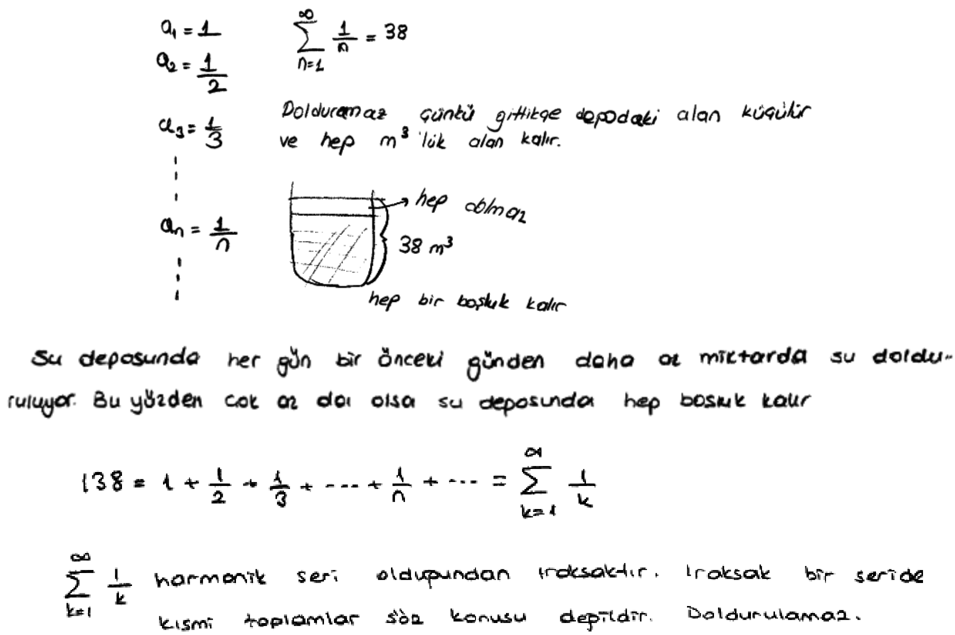
TABLE V

Frequency distribution of answers of pre-service teachers to the water tank problem

Water Tank	*Reasons*	*n*	*Total*
The water tank can be filled	Harmonic series is infinite	5	13
	It continues infinitely	8	
The water tank cannot be filled	Harmonic series is divergent	12	25
	A small amount will always remain empty	10	
	There will not be a sum.	3	
Not specified	The result cannot be determined, it reaches to infinity	12	12

Half of the pre-service teachers (n=25) asserted that the water tank cannot be filled up (Figure 6). Those who asserted that the water tank cannot be filled up explained that "harmonic series is divergent, and so the tank cannot be filled", "the water tank will almost be filled but can never be entirely filled" and "there will always be a small portion left" (Table V). The remaining pre-service teachers either claimed that “there cannot be a sum”, “the series will diverge to 1 (as there will not be a limit) and so the tank will not be filled up” or they did not specify any conclusions at all.

Almost one fourth of the pre-service teachers (n=12) did not specify any conclusions regarding whether the water tank can be filled or not. They noted that “the resulting sum cannot be determined with certainty”, “as it reaches infinity, whatever happens in infinity cannot be discovered”, and that “this situation could be considered as a paradox”.



Translation of handwriting – Above: *“It cannot be filled because the volume in the tank will gradually decrease and there will always be m^3 area left.”* Next to the tank figure: *“It will not constantly fill up. There will always be a space left. 38m^3 in total.”* Middle: *“The amount of water added to the tank decreases each day compared to the day before. And therefore, there will always be a space left in the water tank, no matter how small.”* Below: *“[The formula] is divergent as it is a harmonic series. Partial sums are not possible in divergent series. It cannot be filled.”*

Figure 6. Responses of the pre-service teachers explaining that the water tank cannot be filled

The pre-service teachers who participated in the interviews qualified the amount of water in the water tank as infinite. Following excerpt illustrates this situation:

I: What can you say about the amount of water collected in the water tank?

PST_1: The water continues to flow, but it flows in smaller amounts. It is infinite situation.

I: Can you please further explain what you think about the infinite situation?

PST_1: The action of filling water will continue infinitely, it still continues even if in smaller amounts.

I: So, can the tank be filled up?

PST_1: It will continue infinitely, it must fill it up eventually.

I: And what if the water flowing to the water tank was expressed as $\frac{1}{2}m^3$, $\frac{1}{4}m^3$, $\frac{1}{8}m^3$, ... , $\frac{1}{2^n}m^3$, ... ? Could the tank then be filled up?

PST_1: Yes, it could still be filled up, it still reaches infinity...

I: Do you think there may be other criteria beside to this for the water tank to be filled up?

PST_1: No, not actually. It can be filled if it is filled infinitely.

I: What can you say about the amount of water collected in the water tank?

PST_3: When I examine the amount of water flow, I conclude that there is a constant, yet slow flow of water.

I: So, can the water tank be filled up?

PST_3: No, it cannot be filled up because there will always be a space left.

I: Why will there be a space left?

PST_3: Even though we will continuously fill the tank, the amount of added water will decrease constantly, and so, there will always be a space left. Also, it will never be entirely empty…

When the amount of water flowing into the water tank was expressed as a geometric series, only PS_4 stated that whether the water tank can be filled or not will change as the speed of water flowing to the water tank changes, while other pre-service teachers maintained their previous opinions. Following excerpt illustrates this situation:

I: If the action of filling was expressed as $\frac{1}{2}m^3$, $\frac{1}{4}m^3$, $\frac{1}{8}m^3$, ... , $\frac{1}{2^n}m^3$, ... , could the water tank then be filled?

PST_3: No, the same logic still applies. There will still be a small space left. There will always be an empty space left in the water tank regardless of the amount of water like this…

PST_2: This series is not a harmonic series. I need to think this over. Hmm… (makes some calculations) This is a convergent series. So, if we calculate the result…It cannot be filled because the result equals to 1. So, there will only be 1m^3 water collected in the water tank.

I: So, why the water tank cannot be filled when the series is harmonic?

PST_2: I mean, when I think it over now, I think it should be filled then. Because it is a harmonic series.

I: Could you please further explain your opinion?

PST_2: Well, I think I miscalculated on paper. Because the water tank can indeed be filled when it is a harmonic series as it is greater than a real number. When it is a geometric series, the sum equals to 1.

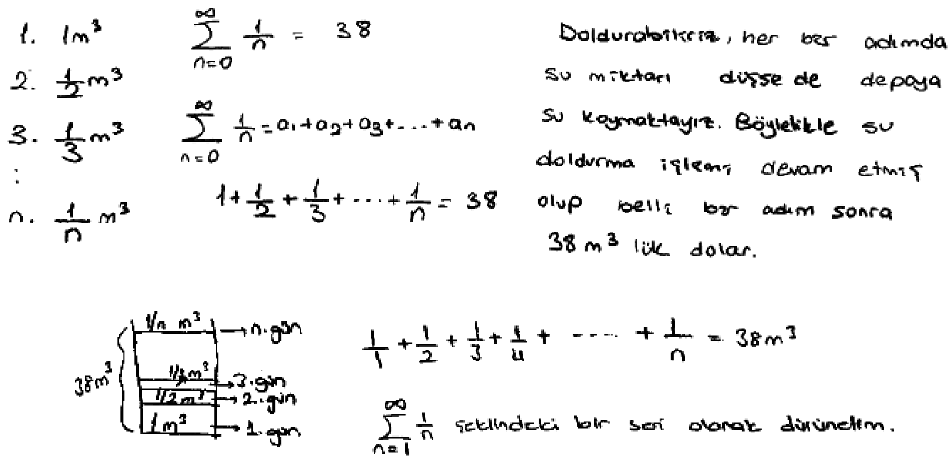
3.3.2. *Examination of responses in terms of mathematical symbol / expression / concepts.*

Almost half of the pre-service teachers (n=24) noted that the expression $1\frac{m^{3,1}}{2}\ \frac{m^{3,1}}{3}$ m^3, ..., $\frac{1}{n}$ m^3, ... provided in P_1 is a harmonic series. More than two thirds of the pre-service teachers who affirmed it to be a harmonic series (n=17) claimed that it is a divergent series, while a minority (n=3) claimed that the harmonic series is convergent (Table VI).

TABLE VI
Frequency distribution of answers of the pre-service teachers to the water tank problem on the basis of harmonic series

The sum of the expression	*Reasons*	*n*	*Total*
It is a Harmonic Series	It is Divergent	17	24
	It is Convergent	3	
	Not Specified	4	
Not Specified	It is Divergent	6	26
	Not Specified	20	

More than half of the pre-service teachers (n=26) claimed that the sum of the expression in P_1 is infinite, and while they expressed various concepts of series and sequences, they did not specify any conclusions regarding whether it is a harmonic series. Almost one fourth of pre-service teachers (n=6), on the other hand, claimed that it is a divergent series.



Translation of handwriting – Above: *"We can fill it up; while the water level decreases in each step, we are still adding water to the tank. And so, the action of filling continues and after a certain number of steps, the volume of 38m³ will be filled up."* Below: *"[in the figure] 1st day, 2nd day, 3rd day, nth day"; "let's consider it as a series expressed in [formula]".)*

Figure 7. Responses of the pre-service teachers by using representation in the water tank problem

All the pre-service teachers used ten different representations referring to the series and sequences (Table VII) once or more than once while solving P_1 (Figure 7). Therefore, the number of representations referring to the concepts was calculated as "n=69" in Table VII. As can be observed in Table VII, in the solution of water tank problem, the pre-service teachers used various representations such as series, series equalling to a number or infinity, write or not writing subscripts and superscripts of series, finite expression of series, sequences, and sequence of partial sums.

TABLE VII

Representations used by the pre-service teachers in the solution of water tank problem

Code	*Expression / Representation*	*n*	*Explanation*
C_1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ... = \infty$	5	The sum of series equals to infinity
C_2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ... = ?138\, m^3$	4	Explicit formula of series and using the sum of the series in the problem

C_3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = {}_?138\ m^3$	6	Using of the sum of the series in the problem
C_4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	9	Expression of series with its indices
C_5	$\sum \frac{1}{n}$	7	Expression of series without its indices
C_6	$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = 138\ m^3$	5	Consideration of the terms of series as finite and using in the problem
C_7	$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$	7	Expression of series as finite
C_8	$a_1 = 1\ \ a_2 = \frac{1}{2}\ \ldots\ \ a_n = \frac{1}{n}$	17	Definition of the first n term of the series
C_9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$	7	Expression of the series with its indices, and only as the sum of the n term
C_{10}	$\sum a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$	2	Expression of the series without its indices, and only as the sum of the n term

The series was represented as an infinite sum expressed in C_1 or C_2 only by a minority of pre-service teachers. On the other hand, the pre-service teachers generally expressed that when the water tank is filled, either an infinite calculation takes place as C_8 or that the sum of series as C_9 is finite.

One of the pre-service teachers confused the concepts of series and sequences when she was asked to explain the solution of the problem in the interview. The pre-service teacher used property of sequences while expressing series. That is, she stated that $\frac{1}{n}$ is the last term of a series but actually it is the last term of a sequence. Following excerpt illustrates this situation:

I: Can you repeat the solution of the given question?
PST_4: [Starts to do the calculations]
I: Can you please further explain this representation? (indices are shown)
PST_4: It means this. So, from one to infinity.
I: Then, why did not you specify this in your solution?
PST_4: I do not really care that. I think it makes little difference whether I write it.
I: So, can you explain what you mean here? (the first n term of the series is shown)
PST_4: I expanded the series. It continues as the first term, second term, third, fourth and the n^{th} term.

I: I see. Then, what is the n^{th} term in this expansion?
PST_4: As the n^{th} term is the last term, then it is $a_n = \frac{1}{n}$.
I: So, the last term is $a_n = \frac{1}{n}$?
PST_4: Yes.

Others were more careful in their use of the indices of series. Two of the pre-service teachers considered the series to be finite.

4. Discussion, conclusion and suggestions

In this study, the knowledge of pre-service elementary mathematics teachers on convergence and divergence of series and how they apply this knowledge to the problem enriched with real-life context were examined. Findings have revealed that pre-service teachers performed better in explaining theoretical aspect of the convergence of series than in explaining the divergence of series. One of the reasons for this situation may be the fact that the concepts such as theorems, results and criteria that the pre-service teachers have learned are mostly built on the concept of "convergence" in textbooks (Thomas, Weir, Hass & Heil, 2014). The fact that the convergence and divergence concepts are used as opposite may arise from the fact that these two are dichotomous concepts (Sfard, 1991).

The fact that the pre-service teachers' explanations on the convergence of series focus on the sequence of partial sums and on the Cauchy sequence implies that they associate the concept of sequences with series. In fact, the pre-service teachers explained the convergence of sequence instead of the convergence of series (Mamona, 1990); thus, it can be said that series and sequences are seen by the pre-service teachers as concepts that are considered together due to their nature. In this study, the pre-service teachers misused the concepts of series and sequences in each other's place and these findings were consistent with the findings of the studies conducted by Alcock and Simpson (2004). The misuse of the series and sequence concepts could be related to mislearning or concept confusions as well as pre-service teachers' lack of knowledge about limit, infinity concepts and their carelessness in the use of representations and mathematical language. Pre-service teachers had a difficulty when they were exposed to a challenging real-life problem because the problem involved both limit concept and infinity of series. Therefore, they gave intuitive responses based on their imaginations of infinite series (Barahmand, 2020), limit and sequence. Another indicator of pre-service teachers' confusion of series and sequence is that they expressed the amount of water flow into the water tank by using sequence representations or that they expressed series as finite while they are solving the problem because of the limited understanding of limit.

Most pre-service teachers accurately determined the character of harmonic series and they correctly supported their conclusions with mathematical expressions and verbal expressions. Those who claimed that harmonic series is convergent reasoned that the limit of the general term of $a_n=\frac{1}{n}$ equals to zero. This could originate from the fact that "harmonic series are among the most popular series whose general term converges to zero, but the series itself diverges" (Aliyev & Dil, 2012). Even the statement in textbooks and courses that harmonic series is divergent despite having a limit did not change the belief of pre-service teachers. It could be suggested that this belief stems from the perception that the opposite of the "*If a series is convergent, then its general term equals to zero*" proposition must also be true. In addition to their perception of divergence as an opposite of convergence, the pre-service teachers supported their claims that harmonic series is divergent with mathematical and verbal expressions which could be interpreted as accurate theoretical knowledge. However, the pre-service teachers interpreted differently their theoretical knowledge in the water tank problem. The fact that the divergence of harmonic series was interpreted in two distinct aspects in the water tank problem may indicate that the concept is not fully comprehended by the pre-service teachers.

The pre-service teachers who claimed that the water tank can be filled because the harmonic series is divergent adopted a correct approach in application of their theoretical knowledge on the divergence of harmonic series to practice. This approach may stem from the belief that the sum of harmonic series equals to infinity. This may suggest that similar to the studies of Bagni (2000) and Fiscbein, (1987), the pre-service teachers could associate the concept of infinity with the amount of water flow. On the other hand, the pre-service teachers who claimed that the water tank cannot be filled because harmonic series is divergent did not adopt a correct approach in application of their theoretical knowledge on the divergence of harmonic series to practice. This approach may stem from divergence of harmonic series and the sum of divergent series not being equal to a real number and instead, being equal to infinity.

Various inferences of the pre-service teachers regarding the water tank problem and the various bases for their explanations and their solutions are related to the differences in their application of their theoretical knowledge to the practice. Even though some of the pre-service teachers modelled the solution of the problem by using some drawings, notations or symbols related to the amount of water flow with harmonic series, they claimed that the water tank cannot be filled completely because that harmonic series is divergent underlines the necessity to focus primarily on the concept of "divergence". Thus, it can be said that they could not make a transition from theoretical knowledge to practice.

The fact that the pre-service teachers do not consider the amount of water flowing into the water tank as "infinite" may cause challenges in interpreting the flowing water (Fischbein, 1987). Another significant problem the pre-service teachers faced in the comprehension of the infinity concept stems from the perception that "infinite terms imply infinite sum" (Bagni, 2000; 2005; 2008). While the amount of water flowing into the water tank was modelled as a geometric series in the interviews, the pre-service teachers claimed that "the water tank will be filled as the amount of water flowing from the tap continues infinitely". This leads pre-service teachers to have difficulties in building the idea of infinity of series. Pre-service teachers who perceived the amount of water flowing into the water tank as infinite and claimed that the tank can be filled accurately solved the real-life problem with this approach. Specifying the amount of water as infinite and that the tank can be filled in the problem solving process can be considered as a correct approach in the application of theoretical knowledge to practice.

Incorrect use of expressions / representations, lack of indices, or not using equations in the problem-solving process may be related to the pre-service teachers' prior knowledge while reflecting their opinions on the paper and not pondering properly on their writing processes. The misuse of various mathematical expressions / representations, confusion of series and sequence concepts as well as the expression of infinity with the infinity symbol in the solution of the water tank problem were the other findings that emerged in the present study. Besides, while some of the pre-service teachers were able to notice and correct their errors during the interviews, others did not correctly use representations / expressions during the interviews and they were careless in the use of mathematical language. Therefore, importance should be given to the correct use of mathematical language (Raiker, 2002) in the process of teaching series. Furthermore, the attention of the pre-service teachers on their use of indices while they are repeating the solution of the problem in interviews suggests that the pre-service teachers are careless while they are writing series and sequences.

In conclusion, this study aimed to examine the knowledge of pre-service teachers on the convergence and the divergence of series within the context of theory and practice. The concept of series is considered as a complex structure (González-Martín, Nardi & Biza, 2011) and is seemed as difficult (Cornu, 1991; González-Martín, 2013b; Lindaman & Gay, 2012). The fact that the harmonic series is a divergent series despite its limit being zero was a challenging point for pre-service teachers. Therefore, in the teaching process of harmonic series it can be suggested to highlight the relationship between limit and divergence of harmonic series. The limited expression of pre-service teachers about series, determining only the first n term of the series while expressing the series, and explaining the convergence of sequence instead of convergence of series reveal that they confuse the concepts of series and sequences (Schwarzenberger & Tall, 1978). Thus, it might be suggested to underline the relationship between series and other concepts of Calculus such as sequences in the teaching of this concept.

In the application of theoretical knowledge to practice, the water tank problem raised issues such as the convergence and divergence of harmonic series, whether the water tank can be filled or not and the different interpretations of the amount of collected water in the tank. It could be suggested that problems become clearer when they are considered within the context of their solutions (Ergene, 2014). Therefore, in identifying the amount of water flow by the pre-service teachers, various meanings of series, harmonic series, divergence and infinity (Bagni 2008; 2000; Fischbein,1987) were influential on the different interpretations of the water tank problem. This might stem from difficulty in making abstract concepts of mathematics such as divergence and infinity concrete and in associating them with real-life problems in the teaching process (Ergene, 2019). Therefore, using real-life problems such as the turtle paradox (Duran, Doruk & Kaplan, 2016) and the water tank problem that was used in this study in the teaching process of series may help pre-service teachers apply theoretical knowledge on divergence and infinity and other abstract concepts to practical knowledge. This case also underlines the need to focus on limit and infinity while teaching the divergence of series in order to eliminate the difficulties in the interpretation of the limit and infinity concepts (Fischbein, 2001; Tall, 1980; Tsamir & Tirosh, 1999). Thus, it is recommended that activities related to sequences and series enriched with real-life problems based on the concepts of divergence and infinity can be integrated to Calculus courses. In addition, similar studies can be conducted with pre-service secondary and in-service mathematics teachers in order to compare and contrast the findings. Finally, conducting research studies which focus on the harmonic series might also be suggested when the studies related to Taylor Series (Tokgöz, 2019; Martin, 2012) and Power Series (Kung & Speer, 2010) were taken into account.

References

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 1–32. DOI: https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92.

Aliyev, Ý., & Dil, A. (2012). Harmonik serinin ýraksaklýðý [Divergence of the harmonic series]. *Matematik Dünyasý*, *1*(1), 31-38.

Bagni, G. (2000). *Difficulties with series in history and in the classroom, in History in Mathematics Education*: The ICMI Study, In J. F. J. Maanen, (Ed.), Kluwer Academic Publishers, (pp. 82–86), Dordrecht, The Netherlands.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 1473-0111. Retrieved from http://www.cimt.org.uk/journal/bagni.pdf

Bagni, G. T. (2008). A theorem and its different proofs: History, mathematics education and "the semiotic–cultural perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(3), 217–232. DOI: https://doi.org/10.1080/14926150802169297

Barahmand, A. (2020). Exploring students' consistency in their notions: The case of comparing infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736350

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the IGPME* (pp. 73–80). Hiroshima, Japan. Retrived from http://sigmaa.maa.org/rume/crume2016/Papers/RUME_19_paper_113.pdf

Boschet, F. (1983). Les suites nume´riques comme objet d'enseignement (Premier cycle de l'enseignement supe´rieur franc¸ ais). *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *4*(2), 141–163. Retrived from https://revue-rdm.com/1983/les-suites-numeriques-comme-obiet/

Bransford, J. D., Brown A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How people learn*. Washington, D.C: National Academy Press.

Busse, A. (2005). Individual ways of dealing with the context of realistic tasks: First steps towards a typology. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(5), 354-360. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-005-0023-3

Ceci, S. J., & Roazzi, A. (1993). The effects of context on cognition: Postcards from Brazil. In R. J. Steinberg & R. K. Wagner (Eds.), *Mind in context: Interactionist perspectives on human intelligence* (pp. 74–101). USA: Cambridge University Press.

Cetin, O. F., Dane, A., & Bekdemir, M. (2012). A concept of "accumulation point" and its usage. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(2), 217-233. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/balikesirnef/issue/3375/46586

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Duran, M., Doruk, M., & Kaplan, A. (2016). Matematik öðretmeni adaylarýnýn matematiksel modelleme süreçleri: Kaplumbaða paradoksu örneði [Mathematical modeling processes of mathematics teacher candidates: The example of tortoise paradox]. *Cumhuriyet International Journal of Education-CIJE*, *5*(4), 55 – 71. DOI: 10.30703/cije.321415

Ergene, Ö. (2014). *Ýntegral hacim problemleri çözüm sürecindeki bireysel iliþkilerin uygulama topluluðu baðlamýnda incelenmesi*. [Investigation of personal relationship in integral volume problems solving process within communities of practices] (Unpublished Master Thesis). Marmara University, Turkey.

Ergene, Ö. (2019). *Matematik öðretmeni adaylarýnýn Riemann toplamlarýný kullanarak modelleme yoluyla belirli integrali anlama durumlarýnýn incelenmesi* [Investigation of pre-service mathematics teachers' understanding of definite integral through modelling by using riemann sums] (Unpublished Doctoral Thesis). Marmara University, Turkey.

Ergene, Ö, & Özdemi̇r, A. (2020). Investigating pre-service elementary mathematics teachers' perception of integral. *Marmara University Atatürk Education Faculty Journal of Educational Sciences, 51*(51), 155-176. DOI: 10.15285/maruaebd.622149

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Reidel, Dordrecht, The Netherlands. Retrieved from https://link.springer.com/book/10.1007%2F0-306-47237-6

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309- 329. Retrieved from http://www.jstor.com/stable/3483030

Fisher, B. (2016) Student-created definitions of sequence convergence: A case study. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 26*(8), 770-787. DOI: https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1172688

González-Martín, A. S. (2013a). Students' personal relationship with the convergence of series of real numbers as a consequence of teaching practices. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 361–368. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288592

González-Martín, A. S. (2013b). Students' personal relationship with series of real numbers as a consequence of teaching practices. *Proceedings of the 8th Congress of the European Society or Research in Mathematics Education* (CERME8). Antalya, Turkey. Retrieved form https://eric.ed.gov/?id=ED599802

González-Martín, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(5), 565-589. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.562310

Kidron, I., (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME*) (pp. 209–216). Norwich, UK. Retrieved from http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/

Kung, D., & Speer, N. (2013). Do they Really Get It? Evaluating evidence of Student understanding of power series. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 23*(5), 419–433. DOI: https://doi.org/10.1080/10511970.2012.736122

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM, 37*(6), 457-467. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02655854

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, Calif: Sage Publications.

Lindaman, B., & Gay, A. S. (2012). Improving the instruction of infinite series. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 22*(5), 373–385. DOI: https://doi.org/10.1080/10511970.2011.576747

Mamona, J. (1990). Sequences and series-sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 333–337. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739900210222

Martin, J. (2012). Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical structure of Taylor series convergence. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 267–283. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9425-7

Nesbit, T. (1996). What counts? Mathematics education for adults. *Adult Basic Education, 6(1)*, 69-83. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=EJ533620

Patton, M. Q. (1990). *How to use qualitative methods in evaluation*. London: Sagem Publications.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 60(1)*, 71-93. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-005-5325-4

Raiker, A. (2002). Spoken language and mathematics. *Cambridge Journal of Education, 32*(1), 45-60. DOI: https://doi.org/10.1080/03057640220116427

Robert, A. (1982). L'Acquisition de la notion de convergence des suites nume´riques dans l'Enseignement Supe´rieur. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 3*(3*)*, 307–341. Retrieved from https://revue-rdm.com/2005/l-acquisition-de-la-notion-de/

Robson, C. (1993). *Real world research: A resource for social scientists and practitioners' researchers* (1st edition). Oxford: Blackwell.

Schwarzenberger, R.L.E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *8*(2), 44–49. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1978c-with-rolph.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00302715

Stillman, G. (2000). Impact of prior knowledge of task context on approaches to applications tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(3), 333-361. DOI: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00049-3

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 271-284. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00697740

Thomas, G., Weir, M., Hass, J., & Heil. C. (2014). *Thomas' Calculus*, 13th Edition. Boston, MA: Pearson.

Tokgoz, E., (2019), Board 95: STEM majors' ability to calculate taylor series' derivative & integral. Paper presented at *2019 ASEE Annual Conference & Exposition*, Tampa, Florida. Retrieved from https://peer.asee.org/32468.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 213-220. DOI: https://doi.org/10.2307/749611

Yalçýnkaya, Ý. (2015). *Analiz III (Diziler ve Seriler) [Calculuc III (Sequnces and Series)]*. Konya: Dizgi Ofset Matbaacýlýk.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and method*s. Second Thousand Oaks, CA: Sage.

Authors

Özkan Ergene. Sakarya University, Faculty of Education, Turkey, ozkanergene@sakarya.edu.tr

Ahmet Şükrü Özdemir. Marmara University, Atatürk Faculty of Education, Turkey, ahmet.ozdemir@marmara.edu.tr

Appendix I

Q_1, Q_2, P_1 which are used in the research process and their answers.

Code	*Question and Answer*
Q_1	What does it mean for a series to be convergent or divergent? Please explain.
A_{11}	$(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sequence of partial total. $S_1=a_1$, $S_2=S_1+a_2=a_1+a_2$ $S_3=S_2+a_3=a_1+a_2+a_3$ $\dots$ $S_n=S_{n-1}+a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ $\dots$ The $(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ series is convergent too if the $(S_n)=(S_1, S_2, ..., S_n, ...)$ sequence of partial sums converged by the S_n partial sum
A_{12}	The necessary and sufficient condition for the convergence of the $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ series is that there is a $n(\varepsilon)\in N$ natural number as $\left\lvert \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\rvert < \varepsilon$ when $n(\varepsilon)<m<n$ corresponding to each number of $\varepsilon\in R^{+}$
A_{13}	The necessary and sufficient condition for the $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ series to be convergent is that the (S_n) sequence of sums is a Cauchy sequence.
A_{14}	Criteria of Comparison - D'alembert Ratio Test - Cauchy Root Test - Raabe Test - Alterne Convergency Test
A_{15}	Verbal expressions
A_{16}	Other Answers
Q_2	Examine the convergence of the $(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonic series. (Aliyev & Dil, 2012)

A_{21}	Harmonic series is divergent, representation with mathematical expressions.
A_{22}	Harmonic series is divergent, with verbal expressions.
A_{23}	Harmonic series is convergent, with mathematical expressions.
A_{24}	Harmonic series is convergent, with verbal expressions.
A_{25}	Other Answers
P_1	A water tank with 38 m^3 capacity is required to be filled as follows; - First day $1m^3$, - Second day $\frac{1}{2}m^3$, - Third day $\frac{1}{3}m^3$, ... , - n^{th} day $\frac{1}{n}m^3$, ... Can water tank completely can be filled in this way? Explain your answer with the reasons.
P_{11}	Water tank can be filled / cannot be filled.
P_{12}	Specifying/not specifying that it is a harmonic series and convergence / divergence of the harmonic series.
P_{13}	Examination of answers in the context of mathematical symbol / expression / concepts.

Víctor Castillo Riquelme

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL MEDIANTE UNA APLICACIÓN MÓVIL

Teaching Inferential Statistic with an móvil aplication

RESUMEN

La enseñanza de la Estadística en cursos universitarios ha presentado mayores desafíos en las disciplinas de las Ciencias Sociales. En esta investigación se diseñó una aplicación para dispositivos smartphones con el objetivo de apoyar el aprendizaje de la Estadística Inferencial en una muestra de estudiantes de las carreras de Psicología y Trabajo Social en una universidad chilena. Las funciones de la aplicación incluyen una trivia, un glosario, un modo de asesoría para decidir por cuál prueba de hipótesis aplicar y una guía tutorial para ejecutar procedimientos estadísticos en SPSS. Los resultados develan que los estudiantes legitiman el uso de la aplicación móvil como material de estudio, constatándose altas calificaciones, tanto en la evaluación global de la aplicación como en la valoración de cada función.

PALABRAS CLAVE:
- *Educación universitaria*
- *Enseñanza de la Estadística*
- *Enseñanza programada*
- *Análisis de datos*
- *Software de código abierto*

ABSTRACT

Teaching Statistics in university courses has presented major challenges in the disciplines of Social Sciences. In this research an application for smartphones devices was designed with the aim of supporting the learning of the Inferential Statistic in a sample of psychology and social work students. The functions of this application include a knowledge test, a glossary, an advisory mode to decide which hypothesis test to apply and a tutorial guide to execute statistical procedures in SPSS. The results reveal that the students legitimize the use of the mobile application as study material, observing high qualifications, both in the global evaluation of the application and in the evaluation of the characteristics of each function.

KEY WORDS:
- *University education*
- *Statistics education*
- *Programmed instruction*
- *Data analysis*
- *Open source software*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (2): 233 - 258.
Recepción: Octubre 8, 2019 / Aceptación: Julio 17, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2324

RESUMO

O ensino de Estatística em cursos universitários tem apresentado maiores desafios nas disciplinas de Ciências Sociais. Nesta pesquisa um aplicativo para dispositivos de smartphones foi projetado com o objetivo de apoiar a aprendizagem de Estatística Inferencial em uma amostra de estudantes de Psicologia e Serviço Social em uma universidade chilena. As funções do aplicativo incluem um test, um glossário, um modo consultivo para decidir qual teste de hipótese aplicar e um guia tutorial para executar procedimentos estatísticos no SPSS. Os resultados revelam que os estudantes legitimam o uso da aplicação móvel como material de estudo, confirmando altos índices, tanto na avaliação global da aplicação quanto na avaliação de cada função.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação universitária*
- *Educação Estatística*
- *Educação programada*
- *Análise de dados*
- *Software de código aberto*

RÉSUMÉ

L'enseignement de la statistique dans les cours universitaires a présenté de plus grands défis dans les disciplines des sciences sociales. Dans cette recherche, une application pour smartphones a été conçue dans le but de soutenir l'apprentissage de la statistique inférentielle chez un échantillon d'étudiants en psychologie et en travail social dans une université chilienne. Les fonctions de l'application incluent un questionnaire, un glossaire, un mode conseil pour décider du test d'hypothèse à appliquer et un guide pédagogique pour l'exécution de procédures statistiques dans SPSS. Les résultats révèlent que les étudiants légitiment l'utilisation de l'application mobile en tant que matériel d'étude, confirmant ainsi les notes élevées, à la fois dans l'évaluation globale de l'application et dans l'évaluation de chaque fonction.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement universitaire*
- *Enseignement de la statistique*
- *Enseignement programmé*
- *Analyse des données*
- *Logiciel open source*

1. Introducción

La enseñanza de la estadística en cursos universitarios ha presentado tradicionalmente mayores desafíos en las disciplinas más alejadas de la matemática. En carreras como Trabajo Social y Psicología se ha reportado mayor ansiedad y resistencia por parte de los alumnos frente a los contenidos de la estadística descriptiva e inferencial (Calderwood, 2012), asignaturas que son percibidas como discordantes con los valores disciplinarios y desconectadas de la práctica social (Eudave, 2014).

En el caso de los estudiantes de las ciencias sociales se ha reportado aversión a las asignaturas cuantitativas y los niveles de reprobación tienden a ser más altos en comparación con el resto de las asignaturas (Sesé, Jiménez, Montaño y Palmer, 2015). En estudiantes de Psicología se han observado conductas de rechazo hacia la Estadístcia y la Metodología de la Investigación, tales como faltar a clases, prestar poca atención y mal rendimiento en las evaluaciones (Domínguez, Calderón, Alarcón y Navarro, 2017). Esta aversión también se ha reportado en otras carreras, donde los estudiantes exhiben falta de entusiasmo y perciben a las asignaturas de estadística como un obstáculo en sus trayectorias universitarias (Paez, Burne, Mosconi y Montenegro, 2017).

Las características de los alumnos que ingresan a estudiar Psicología y Trabajo Social en ocasiones dificultan el desarrollo de competencias cuantitativas. Muchos de los postulantes optan por estudiar una disciplina de las Ciencias Sociales precisamente debido a los bajos requerimientos en habilidad matemática. Según el modelo teorizado por Sesé, Jiménez, Montaño y Palmer (2015) el bagaje matemático estaría directamente relacionado con las actitudes de los estudiantes hacia la estadística, las cuales constituyen el principal predictor del rendimiento en la asignatura.

Frente a este escenario se ha incentivado la adopción de diversas estrategias para hacer de los cursos de estadísticas materias más agradables al alumnado. Marson (2007) sugiere retroalimentar las preguntas después de cada examen, retornando información que ayude a los estudiantes a comprender y superar sus errores, así como emplear bases de datos originales con las cuales los estudiantes se sientan más familiarizados, permitiéndoles solucionar problemas reales y adecuados al contexto profesional. Por otra parte, Smith y Martínez (2012) plantean incorporar a la clase un amplio abanico de técnicas de enseñanza para adaptarse a una mayor variedad de estilos de aprendizajes. A destacar se encuentran las aplicaciones del mundo real (Forte, 1995), el aprendizaje basado en problemas (Wong y Lam, 2007) y el uso de viñetas y recursos humorísticos (Schacht y Stewart, 1990).

En este artículo se presenta una evaluación de una aplicación para dispositivos móviles programada específicamente para apoyar la enseñanza de la estadística inferencial en una muestra de estudiantes universitarios de las carreras de Psicología y Trabajo Social en una universidad privada de Chile. La premisa central de esta investigación se basa en afirmar que el uso de aplicaciones móviles como recurso didáctico supone capitalizar cierta afinidad natural de los jóvenes hacía la tecnología. En particular, en esta investigación se evaluaron las actitudes de los estudiantes expuestos a la aplicación por medio de un cuestionario y mediante ítems de diferencial semántico. Luego estos resultados fueron correlacionados con el rendimiento manifestado por los estudiantes utilizando un examen global de estadística inferencial.

2. Antecedentes

En la población universitaria se ha reportado un mayor acceso a dispositivos móviles y a su vez una mayor diversificación de sus usos. En el contexto académico, por ejemplo, los estudiantes utilizan sus dispositivos móviles para buscar información relativa a las clases, grabar o tomar fotos para estudiar, compartir apuntes entre compañeros y comunicarse con los docentes (Merino, Cabello y Merino, 2017).

Las aplicaciones para smartphones ponen al servicio de los usuarios objetos multimedia como secuencias animadas, videos, audios y textos interactivos, todo ello en el marco del advenimiento de la sociedad de la información y del conocimiento. Si bien las aplicaciones para smartphones ofrecen funciones que igualmente pueden ser desarrolladas por computador, el hecho de estar instaladas en dispositivos fácilmente trasladables hace que estas tengan un uso más extendido y versátil.

La efectividad del uso de las aplicaciones móviles ha sido tema de reciente interés para investigadores de múltiples tópicos de la enseñanza STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) y el desarrollo de estas aplicaciones ha estado focalizado desde estudiantes prescolares (Aronin y Floyd, 2013) hasta estudiantes de nivel universitario (Angel, Loch, Daradoumis y Ventura, 2017).

Aunque en Latinoamérica se evidencia cierto rezago en la producción de investigaciones que evalúen aplicaciones para apoyar el aprendizaje en asignaturas STEM, existen algunas experiencias recientes que han contribuido a dar mayor visibilidad a la temática. En Colombia un estudio cuasiexperimental evaluó un método de enseñanza de ecuaciones diferenciales en estudiantes de ingeniería mediante aplicaciones móviles que emulan las características de las calculadoras científicas. Los investigadores reportaron un mejor rendimiento académico, una mejor actitud hacia las ecuaciones diferenciales, un autoconcepto más positivo y puntajes más bajos en ansiedad académica dentro del grupo que accedió a las aplicaciones (Vergel, Martínez y Zafra, 2015). En Perú se desarrolló una aplicación móvil gamificada para la enseñanza de la Matemática llamada "*Oráculo Matemágico*", la cual permite a los estudiantes resolver problemas de aritmética, geometría, estadística y álgebra. En esta aplicación los estudiantes reciben recompensas cada vez que resuelven un ejercicio matemático. La evaluación de esta aplicación se realizó a través de una metodología cualitativa que describió las percepciones de los docentes, quienes reconocieron la utilidad de la aplicación como una herramienta para motivar y lograr mejores aprendizajes en sus alumnos (Navarro, Vega, Chiroque y Rivero, 2018).

En lo que respecta a la enseñanza de la estadística las investigaciones que han evaluado la efectividad de innovaciones tecnológicas son relativamente recientes. Al no existir lucro en el uso de estas herramientas, son menos los programadores dispuestos a colaborar con su creación, no obstante, el esfuerzo de los académicos por desarrollar innovaciones tecnológicas ha conducido a un crecimiento significativo en esta área, por ejemplo, De Paolo (2010) sistematizó cerca de 600 applets para cursos introductorios de estadística. Por otra parte, pesar de que las aplicaciones educativas componen una gran proporción de las aplicaciones que se liberan al mercado, en su mayoría no están reguladas y probadas debido a que los investigadores no disponen de los recursos y el tiempo para evaluarlas, de modo que la evaluación de estas innovaciones es, en muchos casos, desplazada por la inercia y las buenas intenciones de sus ejecutores. Aun así, existe cierta evidencia que apoya la idea de emplear herramientas basadas en dispositivos móviles como estrategia para mejorar el rendimiento en las asignaturas de estadística y facilitar el compromiso de los estudiantes con dichas materias (Rock, Coventry, Morgan y Loi, 2016).

En Indonesia recientemente se evaluó una aplicación móvil denominada STATISTIKA, la cual fue desarrollada a través de la plataforma de App Inventor como recurso de apoyo para el aprendizaje de contenidos estadísticos en la enseñanza secundaria (Prabowo, Rahmawati, & Anggoro, 2019). Esta aplicación permitió alojar materiales de estudio relacionados con medidas de tendencia central, cuartiles y medidas de variabilidad, así como también integró un pequeño banco de diez preguntas para medir las competencias en torno a los contenidos. Además, la aplicación permite su integración con WhatsApp, permitíendoles a los alumnos enviar las respuestas de sus pruebas directamente al docente, con la ventaja de que la corrección y calificación se realiza automáticamente por el sistema. Los autores destacaron que al emplear una aplicación móvil como material de estudio se les concede a los estudiantes la posibilidad de acceder a ella en cualquier momento y lugar.

Una aplicación llamada *n4Studies* fue diseñada para facilitar el cálculo de tamaños muestrales. Se trata de una aplicación amigable, de fácil descarga, con funcionamiento offline, gratuita y disponible tanto para sistema operativo Android como IOS. Esta aplicación ha sido evaluada en dos estudios; primero realizando una comparación de las funcionalidades de esta aplicación con otros softwares computacionales y aplicaciones móviles disponibles en el mercado, y, segundo, evaluando experimentalmente el impacto de la aplicación sobre el aprendizaje de los estudiantes universitarios. Según los autores, las fórmulas para calcular los tamaños muestrales son a menudo difíciles de recordar, por lo que en la práctica se suelen usar softwares computacionales para facilitar esta tarea, aunque estos softwares pueden no estar disponibles de forma gratuita. Al comparar *n4Studies* con otras aplicaciones gratuitas y de pago los autores concluyen que esta aplicación supera las limitaciones que tienen otras aplicaciones móviles y entrega resultados similares a los ofrecidos por softwares para computador (Ngamjarus, Chongsuvivatwong y McNeil, 2016). Por otra parte, en la evaluación experimental de *n4Studies* el grupo control recibió solamente material de lectura, mientras que el grupo de intervención recibió en forma combinada lecturas y la aplicación móvil. Los resultados mostraron que el grupo de intervención puntuó más alto en la evaluación de conocimientos que el grupo control y además la mayoría de los participantes tuvo una actitud positiva hacia el uso de la aplicación. Los investigadores concluyen que el uso de esta aplicación es particularmente útil en estudiantes que tienen un pobre cúmulo de conocimientos matemáticos, estadísticos, metodológicos y epidemiológicos (Ngamjarus, Chongsuvivatwong, McNeil y Holling, 2017).

Otro estudio evaluó el impacto de una aplicación móvil llamada *LearnStatistics* sobre la capacidad de los alumnos de ingeniería para aprender conocimiento nuevo (Harnish, Ling y Shehab, 2012). Esta aplicación permite al usuario observar los cambios en las distribuciones al ingresar los valores de los parámetros de media y desviación estándar y permite desplazar una barra que indica la probabilidad a través de regiones sombreadas. Haciendo uso de una metodología experimental los investigadores encontraron que el grupo expuesto a la aplicación obtuvo 16 puntos porcentuales más que el grupo de control en el porcentaje de respuestas correctas en un cuestionario de comprensión estadística, además hallaron que el grupo experimental obtuvo un mayor porcentaje de aciertos en todas las preguntas del quiz.

El estudio de Doi, Potter, Wong, Alcaraz y Chi (2016) muestra una revisión de dieciocho aplicaciones web – incluyendo algunas que funcionan para smartphones – creadas con el propósito de ilustrar conceptos estadísticos fundamentales. De acuerdo con estos autores es más razonable utilizar un computador para realizar demostraciones en clases en vez de las formas tradicionales que tienden a consumir más tiempo. Los investigadores emplearon el paquete *Shiny* del programa R para crear herramientas de simulación en torno a los tópicos de inferencia, probabilidad y aleatoriedad, teoría de la distribución y estimación, regresión y otros. A pesar de presentar estas aplicaciones, describir sus usos en aula e incluir apéndices con los códigos para replicar la programación en R, los investigadores no realizaron una evaluación empírica de la efectividad o de las percepciones de los estudiantes. Las conclusiones están basadas en información anecdótica que consideran las experiencias e impresiones positivas de los instructores de las cátedras, quienes avalan el uso de las aplicaciones web para realizar demostraciones en clases y realizar ejercicios en los laboratorios y trabajos.

Siguiendo la misma línea que el trabajo anterior, también se han desarrollado investigaciones cualitativas que han encontrado que las aplicaciones programadas a través de R tienden a ser valoradas positivamente por los estudiantes (González, López, Cobo y Cortés, 2018). De esta forma, el uso del programa R ha permitido a los docentes incorporar simulaciones en múltiples formatos para ejemplificar y demostrar ideas, teorías y métodos estadísticos aplicados a diferentes áreas (Xie, 2013). Por ejemplo, mediante el paquete *Shiny* se han creado aplicaciones basadas en la implementación de gráficos interactivos para facilitar la comprensión de los intervalos de confianza (Williams & Williams, 2018), ilustrar el concepto de función de densidad de probabilidad (Miranda, 2019) y enseñar el concepto de potencia estadística en el contexto de un contraste de hipótesis (Arnholt, 2019).

Finalmente, otro ejemplo de innovación se encuentra en *StatHand*, una aplicación para dispositivos móviles desarrollada para ayudar a los estudiantes a identificar los test o procedimientos estadísticos adecuados para diferentes circunstancias (Allen et al, 2016). *StatHand* es una aplicación gratuita multiplataforma, disponible para dispositivos móviles con sistema operativo IOS y también a través de la web en el sitio https://stathand.net/.

El funcionamiento de *StatHand* es análogo a los árboles de decisión, donde es posible llegar a una solución a partir de una secuencia de preguntas que permiten precisar los análisis adecuados en función de los objetivos de la investigación, la naturaleza de los datos y los tipos de variables. Al iniciar la aplicación se muestra la pregunta “¿Qué quieres hacer?” y se ofrecen alternativas como describir una muestra, analizar la relación entre variables, examinar la estructura subyacente de una escala, examinar la confiabilidad de un test. Con base en la respuesta escogida se van formulando nuevas preguntas ad hoc que finalmente conducen a una o más técnicas de análisis adecuadas para el escenario planteado. Adicionalmente, las secuencias conducen a videos tutoriales que ejemplifican el uso de la técnica recomendada en el software SPSS.

Esta herramienta ha sido evaluada favorablemente a partir de análisis cualitativos basados en focus-group y a través de metodología cuantitativa de carácter experimental (Roberts, Van Rooy, Rock y Loxton, 2017). Entre los hallazgos de los focus group se destaca que los estudiantes reportaron sentirse más seguros al momento de tomar una decisión para una prueba de hipótesis gracias a la secuencia paso a paso de la aplicación, valoraron la facilidad de su uso y además mostraron una preferencia por *StatHand* por sobre otras modalidades como artículos científicos y árboles de decisión en forma de diagramas. Las opiniones de los participantes, todos estudiantes universitarios de la carrera de psicología, fue útil además para que los autores identificaran algunas posibles mejoras por implementar, entre ellas cabe mencionar una mayor cantidad de ayudas visuales, más interactividad como, por ejemplo, incluir enlaces a videos de YouTube y agregar quiz para la preparación de los exámenes, así como también incorporar terminología alternativa que esté más alineada con la simbología usada por SPSS. Un panel de expertos también aportó con sugerencias, entre ellas incluir hipervínculos a otros recursos y más representaciones gráficas (Allen, Dorozenko y Roberts, 2016). Los hallazgos del estudio experimental por su parte encontraron que los estudiantes del grupo expuesto a la aplicación *StatHand* demostraron una mayor performance en la precisión con las que escogían los estadísticos y pruebas de hipótesis en distintos escenarios en comparación con los grupos de estudiantes que estaban expuestos a otros materiales de apoyo como árboles de decisión, materiales de texto o una combinación de textos y árboles de decisión. El tamaño del efecto para estas diferencias entre los grupos es descrito por los autores como relativamente fuertes, oscilando entre un rango de 0,5 a 0,68. También evidenciaron que los usuarios de *StatHand* experimentan una menor carga cognitiva, una mayor confianza y satisfacción. Con base en los resultados los investigadores concluyen que existe fuerte evidencia que apoya la eficiencia de *StatHand* como una material instructivo (Allen, Roberts y Baughman, 2019).

En consecuencia, el estudio en torno a los efectos de las aplicaciones móviles constituye un tema de creciente interés dado su potencial en entornos educativos. La necesidad de evaluar aplicaciones para la enseñanza de la estadística en muestras de estudiantes de educación superior latinoamericanos constituye un desafío del cual esta investigación pretende hacerse cargo.

3. Método

3.1. *Diseño de la investigación*

Se condujo una investigación cuantitativa de tipo no experimental y de alcance correlacional, no obstante, también incluye elementos típicos de los alcances exploratorio y descriptivo. De acuerdo con criterios temporales esta investigación se ajusta a la categoría transversal, pues la recolección de los datos se realizó en una sola ocasión, permitiendo cuantificar las características de estudio en un momento específico del tiempo. Según su finalidad, esta investigación corresponde a una investigación social aplicada, cuyo valor reside en la generación de conocimiento para la resolución de problemas concretos que afectan a un determinado grupo social.

3.2. *Participantes*

La muestra consistió en un grupo de 74 estudiantes inscritos en el curso de Estadística Inferencial en una universidad privada de la región del Bío-Bío, Chile, grupo que estuvo distribuido homogéneamente entre las carreras de Psicología (50%) y Trabajo Social (50%). La edad de los participantes osciló en el rango de 20 a 29 años y la edad media fue de 21,89 ± 2,03 años. El 85,1% de la muestra fueron mujeres.

El único criterio de exclusión considerado fue el encontrarse eximido de la rendición del examen final de la asignatura, condición lograda solo por quienes obtuvieron una nota de presentación superior al 5,5 dentro del rango de calificaciones chileno de 1,0 a 7,0. Este criterio se justifica en el supuesto de que quienes no están obligados a rendir el examen carecen de un incentivo para utilizar la aplicación móvil de la misma forma como normalmente lo harían, por lo que la inclusión de este subgrupo hubiese inducido una subestimación de las valoraciones del software como material de estudio.

3.3. *Instrumentos*

Se elaboró un cuestionario de tipo sociológico, el cual estuvo estructurado en dos secciones. En la primera sección, se incorporaron 24 preguntas de caracterización socioeducativa junto con preguntas para medir el acceso a distintos recursos tecnológicos y preguntas para medir las valoraciones generales hacia la implementación de la aplicación móvil. La segunda sección incluyó cinco baterías de diferencial semántico, estas últimas construidas sobre la base de 15 pares de adjetivos separados en siete intervalos, cuyas respuestas fueron codificadas en un rango de -3 a +3 puntos. Cabe advertir que los atributos evaluados por estas baterías de ítems no constituyen una escala en su conjunto, sino que cada ítem funciona como un indicador independiente, razón por la cual se descartó el cálculo de un coeficiente de fiabilidad. La elección de los adjetivos empleados en el diferencial semántico estuvo basada en escalas utilizadas en investigaciones relativamente similares. Si bien no se encontró en la literatura escalas de diferencial semántico para evaluar aplicaciones móviles, sí fue posible encontrar escalas para la evaluación de productos tecnológicos de distinta naturaleza (Huang, 2005; Madrid, 2008). En efecto, el diferencial semántico ha sido ampliamente utilizado en el diseño de productos centrados en los usuarios, debido a que logra captar las reacciones afectivas de los participantes hacia el objeto de actitud (Mindak, 1961).

Para la redacción de los reactivos se siguieron las indicaciones propuestas por Morales (2011) y Sierra-Bravo (1997). Estas indicaciones se resumen en que la formulación de las preguntas sea equilibrada, no se ejerza influencia a una determinada respuesta, que se redacten en sentido personal, se excluyan preguntas afirmativas y negativas, que el lenguaje de redacción sea claro e inequívoco y que las categorías de respuesta sean exhaustivas y mutuamente excluyentes. Para dar cuenta de la validez de contenido del instrumento y asegurar que las preguntas satisfacieran las consideraciones de redacción y pertinencia se recurrió a una revisión por parte de dos académicos externos al proyecto, uno con grado de doctor en Multimedia Educativa y otro con grado de magister en Psicología y docente en asignaturas de construcción de pruebas psicológicas. Una vez atendida las observaciones de inclusión, modificación o exclusión de preguntas en el cuestionario se procedió a una segunda revisión por parte de los expertos, quienes dieron el visto bueno a la versión final. No se realizó una prueba piloto del instrumento debido a la ausencia de otra población en la que se haya promovido el uso de la aplicación móvil.

Las respuestas al cuestionario no fueron anónimas debido a que se utilizó la identificación del estudiante para poder cruzar la información recogida con las variables de rendimiento académico. Dada la naturaleza de las preguntas, no se considera que la identificación de los encuestados ponga en riesgo la sinceridad de sus respuestas.

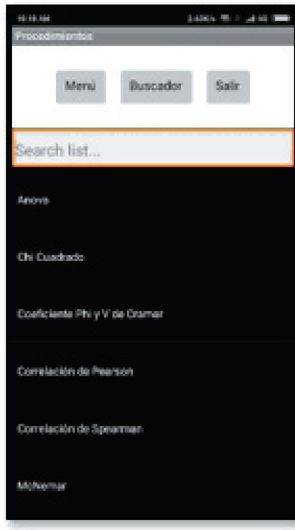
3.4. *Descripción de la aplicación móvil*

Se diseñó una aplicación para dispositivos con sistema operativo Android, cuyo propósito específico fue apoyar el aprendizaje de los estudiantes para el examen final de la asignatura de Estadística Inferencial. Para alcanzar este objetivo fue necesario sistematizar los contenidos que presenta la aplicación, así como también la programación de esta a través de la plataforma web de App Inventor. Cualquier investigador con cuenta en App Inventor puede acceder al código de la aplicación a través del siguiente enlace: ai2.appinventor.mit.edu/?galleryId=5977824540884992.

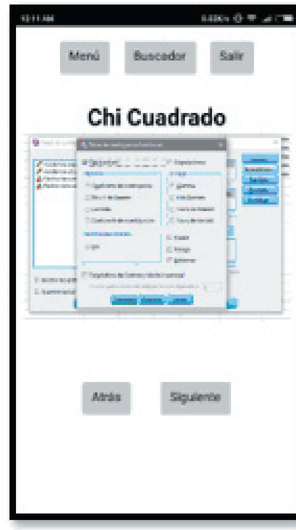
La pantalla Menú constituye la pantalla principal de la aplicación. Tal como se observa en la Figura I(a) en ella se incorporaron cuatro botones; “Glosario”, “Prueba de Hipótesis”, “Procedimientos” y “Trivia”. La programación logra que al iniciarse la pantalla Menú se muestre en la parte inferior un mensaje aleatorio de un repositorio de 36 consejos denominado “¿Sabías qué?”. Una vez que el usuario oprime alguno de los cuatro botones, la aplicación redirige hacia una nueva pantalla de acuerdo con la función seleccionada.

a) Menú principal

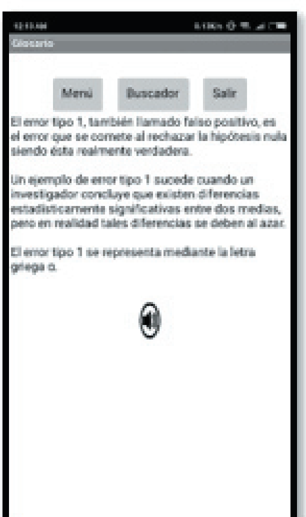
b) Función Procedimiento



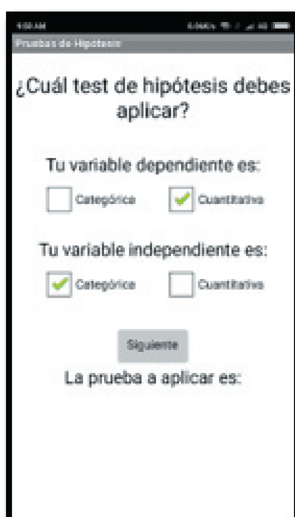
c) Procedimiento Seleccionado



d) Función Glosario Seleccionado



e) Función Prueba de Hipótesis



f) Función Trivia

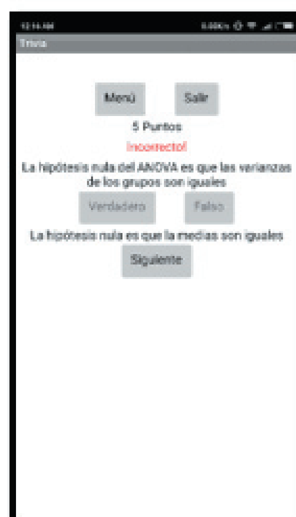


Figura 1. Pantallas principales de la aplicación

3.5. *Función Procedimientos*

La función Procedimientos consiste en mostrar mediante imágenes la ruta por seguir para la ejecución de procedimientos estadísticos en SPSS, principalmente la realización de pruebas de significancia y pruebas para evaluar la fuerza de la asociación. Para ello se construyó una base de datos ficticia y se tomaron un total de 54 capturas de pantalla considerando la realización de 16 procedimientos distintos. Las capturas de pantalla muestran en una secuencia de 3 o 4 imágenes la ruta del procedimiento desde la selección del menú en el editor de datos de SPSS hasta la presentación de los resultados. Algunos ejemplos de procedimientos seleccionados son la prueba ANOVA, pruebas t para una muestra, muestras independientes y muestras relacionadas, correlaciones de Pearson y Spearman, regresión lineal, pruebas no paramétricas como chi cuadrado, prueba de Mc Nemar, prueba U de Mann Whitney, prueba de Z de Wilkoxon y pruebas de normalidad, entre otras. Para la construcción de esta funcionalidad se empleó el componente visor de lista, el cual contiene los procedimientos ordenados en una forma similar a una lista de contactos de un celular. La interfaz, como se demuestra en la Figura I(b), permite al usuario encontrar un procedimiento estadístico usando el motor de búsqueda o por inspección visual mediante la barra de desplazamiento. Una vez seleccionado el procedimiento se desactiva el visor de lista y se muestra un componente de imagen con la primera captura de pantalla que define la ruta por seguir para la realización del procedimiento en SPSS. Con los botones "Siguiente" y "Atrás", ubicados en la parte inferior de la pantalla, el usuario puede avanzar o retroceder a la captura de pantalla que corresponda. En la parte superior de la pantalla se encuentra un botón de acceso directo al menú, otro para volver al buscador y un botón para cerrar la aplicación. Estas funcionalidades se pueden observar en la Ilustración 1(c).

3.6. *Función Glosario*

La segunda función consiste en un glosario virtual que compila 39 conceptos abordados durante las clases. La función Glosarion se inicia con un visor de lista que contiene todos los conceptos definidos. Cuando el usuario selecciona uno de los conceptos, el visor de lista es desactivado y se muestra una etiqueta de texto con la definición del concepto de forma similar a la observada en la Figura I(d). Adicionalmente, se muestra en la parte inferior de la pantalla un botón (ícono de sonido) que tras ser presionado activa la lectura automática del texto, para ello se usó el componente no visible texto a voz. En la parte superior de la pantalla se mantienen los botones de Menú, Buscador y Salir. Todos los conceptos fueron seleccionados siguiendo criterios de importancia y complejidad, atendiendo al hecho de que la adecuada comprensión de los conceptos estadísticos constituye un requisito *sine qua non* para el logro de los objetivos propuestos en la asignatura. La definición de los conceptos fue realizada por el investigador utilizando como referencia manuales y textos de introducción a la estadística (v.g. Brase y Brase, 2018). Un ejemplo de definición conceptual formulada en este trabajo puede leerse en la Tabla I.

TABLA I
Ejemplo de definición conceptual de la función Glosario

Concepto	*Definición*
Homocedasticidad	El término Homocedasticidad significa homogeneidad de varianzas, esto es, la variabilidad de los datos es igual en distintos segmentos de la muestra.
	La homocedasticidad es una condición necesaria para aplicar algunas pruebas paramétricas como el ANOVA, las pruebas t, la regresión lineal y otras.
	El término Homocedasticidad se contrapone al término Heterocedasticidad, el cual implica varianzas distintas.

3.7. *Función Prueba de Hipótesis*

La función Prueba de Hipótesis está basado en un árbol decisional que intenta emular el formato desarrollado en la aplicación StatHand (Allen et al, 2016). Para la construcción de esta función fue necesario elaborar un diagrama que permitiese identificar los argumentos condicionales para la programación. Tal como se muestra en la Figura 1(e) al seleccionar la función Prueba de Hipótesis se activa una serie de preguntas, donde el usuario debe tomar decisiones binarias que conduzcan a la prueba de hipótesis que mejor se ajusta a las características de sus datos y variables. Las primeras dos preguntas determinan el nivel de medida de las variables independiente y dependiente, y, en función de lo respondido por el usuario, se determinan las preguntas sucesivas. Por ejemplo, si el usuario identifica a la variable independiente como categórica y, a su vez, identifica a la variable dependiente como cuantitativa, entonces se procede a consultar por la cantidad de grupos o categorías que tiene la variable independiente e identificar si las muestras son relacionadas o independientes. A partir de las respuestas a estas dos preguntas se configuran cuatro posibles escenarios: Muestras independientes con solo dos grupos; Muestras independientes con más de dos grupos; Muestras relacionadas con solo dos grupos; Muestras relacionadas con más de dos grupos. Finalmente se consultará por las condiciones de homocedasticidad y normalidad, permitiendo al software identificar si la prueba de hipótesis debiese ser paramétrica o no paramétrica. Para contestar las preguntas de elección binaria el usuario debe marcar las casillas de verificación correspondientes y luego presionar el botón siguiente para avanzar a las preguntas restantes.

Una vez que la aplicación recoge toda la información necesaria, en la parte inferior de la pantalla se mostrará el nombre de la prueba de hipótesis sugerida y en la parte superior de la pantalla se mantienen los botones Menú y Salir. Cabe señalar que esta función pretende ser una guía para decisiones metodológicas, pero no constituye un sustituto del juicio crítico que adoptan los investigadores al momento de escoger una prueba de hipótesis, toda vez que éstas dependen de la capacidad del investigador para reconocer la naturaleza de sus variables y las limitaciones de sus datos, ejercicio intelectual que por lo demás se ajusta a criterios pragmáticos.

3.8. *Función Trivia*

La función Trivia consiste en una serie de preguntas bajo modalidad de verdadero y falso presentadas aleatoriamente al usuario, las cuales asignan un puntaje por cada acierto, proporcionando al usuario una experiencia de simulación del examen final de la asignatura. Para llevar a cabo la programación fue necesario previamente la construcción de listas de datos que contuviesen los 80 ítems formulados, con sus respectivas claves de respuestas y retroalimentaciones. Al iniciar la función se presenta al usuario una etiqueta de texto con un ítem aleatorio de la lista, el cual debe ser contestado presionando el botón Verdadero o el botón Falso. En virtud de la respuesta proporcionada el software procede a la comparación con la clave de respuesta predefinida y en caso de que éstas coincidan se sumarán cinco puntos al contador. Cuando la respuesta del usuario no coincide con la clave de respuesta, se descuentan cinco puntos del contador y en una etiqueta de texto se muestra la retroalimentación con la respuesta correcta y su justificación. Una vez que el usuario ha contestado al ítem, se habilita el botón Siguiente, el cual conduce a una nuevo ítem en forma aleatoria. En la Tabla II se pueden observar un ejemplo de ítem y su respectiva retroalimentación.

TABLA II
Ejemplo de ítem y retroalimentación de la función Trivia

Ítem	*Clave*	*Retroalimentación*
La fórmula de Chi Cuadrado se basa en descomponer la varianza en dos fuentes de variación.	Falso	La fórmula de Chi Cuadrado se basa en comparar las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas.

3.9. *Protocolo de investigación*

Tanto los estudiantes de Psicología como de Trabajo Social estuvieron expuestos a un mismo proceso formativo; con idéntica carga horaria y un mismo docente, asegurando así la homogeneidad de la cobertura curricular. La asignatura de Estadística Inferencial fue impartida bajo un régimen semestral y diurno con un tiempo lectivo de 108 horas pedagógicas distribuidas en 72 horas para la modalidad de cátedra y 36 horas para la modalidad de laboratorio. La asignatura fue impartida en el primer semestre del tercer año de las carreras y tuvo por prerrequisito la aprobación de la asignatura de Estadística Descriptiva y Metodología de la Investigación Cuantitativa.

La aplicación móvil fue liberada a los estudiantes con tres semanas de anticipación a la rendición del examen final de la asignatura de Estadística Inferencial, tiempo en el cual se presume los estudiantes hacen más intensivo su estudio. Se les solicitó voluntariamente a los estudiantes que descargaran la aplicación, poniendo énfasis en las posibles ventajas que ésta involucraba. Debido a que la aplicación solo está disponible para dispositivos Android, se les sugirió a los estudiantes que no tenían este sistema instalar la aplicación en el smartphone o alguna persona cercana o descargar un emulador de Android para computador.

Para la instalación de la aplicación se les proporcionó a los estudiantes un enlace para descargar el archivo de instalación APK (Aplicación Empaquetada de Android). A quienes manifestaron problemas con la descarga del archivo APK se les suministró ayuda individualizada para instalar la aplicación a través de la aplicación MIT AI2 Companion, la cual permite instalar aplicaciones creadas con App Inventor escaneando un código QR generado directamente por el administrador de la aplicación.

Se procedió a la recolección de la información 30 minutos antes de la rendición del examen final de la asignatura. Todos los participantes firmaron un consentimiento informado.

3.10. *Análisis de datos*

Se utilizó el test de Chi cuadrado de Pearson para determinar la existencia de asociaciones entre variables categóricas y/o categorizadas. Para el análisis comparativo de las valoraciones de la aplicación en función del tipo de carrera se utilizó la prueba t de Student para muestras independientes. Al momento de testear diferencias significativas entre las valoraciones asignadas a las distintas funciones de la aplicación se utilizó la prueba ANOVA de muestras relacionadas. Esta técnica se ajusta al diseño de la investigación debido a que se utiliza para comparar a los mismos participantes en más de dos variables cuantitativas (Pardo y San Martín, 2012). Una vez constatadas las diferencias mediante el ANOVA de muestras relacionadas se empleó la prueba post-hoc de Bonferroni para identificar los pares de grupos específicos en los que se manifiestan tales diferencias estadísticas. Para el análisis de la prueba ANOVA de muestras relacionadas se testeó el supuesto de esfericidad a través del contraste de esfericidad de Mauchly; frente al incumplimiento de este supuesto se empleó el estadístico multivariado traza de Pillai en vez del estadístico F convencional.

4. Resultados

4.1. *Caracterización socioeducativa*

En sintonía con lo esperado para las carreras de Psicología y Trabajo Social un 85,1% de la muestra fueron mujeres. El promedio de edad fue de 21,39 años con una desviación de 1,59 para el caso de los participantes de la carrera de Psicología y un promedio de 22,41 años con una desviación de 2,32 para el caso de los participantes de la carrera de Trabajo Social. De acuerdo con la dependencia administrativa del establecimiento educativo de origen del estudiantado, un 47,3% reportó egresar de establecimientos municipales, un 51,4% de establecimientos particulares subvencionados y solo un 1,4% de establecimientos particulares pagados. En cuanto a la modalidad de enseñanza de estos establecimientos, un 24,3% correspondió a la tipología técnico-profesional. Más de la mitad de la muestra (55,1%) fueron estudiantes primera generación en acceder a la Educación Superior. No se identificaron diferencias estadísticamente significativas para las variables sexo [X^2 (1, N = 74) = .107, p = .744], tipo de establecimiento [X^2 (1, N = 74) = 1.355, p = .244)], modalidad de enseñanza [X^2 (1, N = 74) = .000, p = 1.000)] y ser primera generación [X^2 (1, N = 69) = .160, p = .689] en función de la carrera.

Un 64,8% de los participantes ingresaron a estudiar sus respectivas carreras con puntajes PSU (Prueba de Selección Universitaria) Matemática inferiores a los 500 puntos, cifra equivalente al percentil 50 de la distribución nacional de la prueba. Al desagregar esta información por carrera se encontró una diferencia estadísticamente significativa [X^2 (1, N = 71) = 4,618, p = .032], constatándose que en Trabajo Social un 77,1% de los estudiantes ingresaron con puntajes bajo el umbral de los 500 puntos PSU, mientras que en Psicología esta cifra fue de un 52,8%. Para el caso de la prueba PSU de Lenguaje un 32,4% de los participantes declaró obtener puntajes bajo los 500 puntos PSU, no habiendo diferencias en función de la carrera que estudian [X^2 (1, N = 71) = .113, p = .737].

4.2. *Acceso a recursos tecnológicos*

En cuanto al acceso a los recursos tecnológicos, un 97,3% de los participantes reportó tener computador en su hogar, no obstante, solo el 54,2% de quienes tienen acceso a un computador han instalado el software SPSS. Por otra parte, un 97,3% de los estudiantes es acreedor de un dispositivo smartphone, predominando aquellos con sistema operativo Android (76,7%), seguido del sistema operativo IOS para IPhone (19,2%).

Del total de consultados, un 93,2% señaló haber descargado la aplicación móvil, en tanto dos participantes no lo hicieron por no tener acceso a dispositivo Android, uno por presentar errores de compatibilidad en la descarga, uno por falta de espacio en la memoria de su smartphone y uno porque no le llamó la atención descargar la aplicación.

De los 68 participantes que descargaron la aplicación un 79,4% lo hizo en su propio dispositivo smartphone, mientras que el 20,6% restante optó por descargarla en el dispositivo smartphone de otra persona, sea ésta un pariente, un amigo u otro cercano. Tan solo un participante señaló haber descargado la aplicación en su computador usando un emulador para Android.

No se encontraron diferencias significativas en función de la carrera para las variables de acceso a computador [X^2 (1, N = 74) 2,056, p = .152], instalación de SPSS [X^2 (1, N = 72) .859, p = .354], tipo de dispositivo smartphone [X^2 (1, N = 71) 1939, p = .164], descarga de la aplicación [X2 (1, N = 73) .186, p = .666] y terminal en donde descargó la aplicación [X^2 (1, N = 68) 1.159, p = .282].

4.3. *Evaluación de la aplicación*

Los usuarios calificaron globalmente la aplicación móvil dentro de una escala de 1 a 10 puntos, resultando una media de 8,57 puntos. Considerando solamente la semana previa a la recogida de los datos, en promedio la aplicación fue utilizada 4,09 días y un 88,1% de los participantes reportó haberlo hecho en tres o más días. De las funciones disponibles en la aplicación, una amplia mayoría de los usuarios señaló a la función de Trivia como la más interesante (77,9%), seguido por la función de Glosario (16,2%). Respecto a la función Trivia es destacable además que un 29,9% de los participantes haya reportado alcanzar un puntaje máximo por sobre los 500 puntos, evento que implicaría haber contestado al menos 100 preguntas de forma correcta. Cabe considerar que el puntaje que alcanza un usuario en la Trivia es reiniciada cada vez que se cierra la pantalla de la función, por lo que se desconoce cuál sería el puntaje acumulado en varias sesiones de uso. Respecto de la función Glosario, un 44,1% y un 52,9% consideró estar de acuerdo y muy de acuerdo respectivamente con que la selección de los conceptos incorporados fue la adecuada.

Por medio de la batería de preguntas de diferencial semántico fue posible analizar las valoraciones asignadas a las cuatro funciones de la aplicación según los atributos consultados. Las medias de valoración obtenidas fueron sistemáticamente altas, situándose en el rango de 1,41 y 2,66 dentro de una escala de -3 a 3 puntos. Todas estas medias fueron significativamente superiores al valor de cero, el cual representa la valoración neutra o punto central de la escala ($p < 0.01$). De acuerdo con la Tabla III se observa que la función Trivia congrega las puntuaciones más altas, particularmente en los atributos de Facilidad ($M = 2{,}66$), Seguridad ($M = 2{,}66$), Utilidad ($M = 2{,}66$) y Eficiencia ($M = 2{,}64$). El atributo de Utilidad en la función Procedimiento ($M = 2{,}62$), así como el atributo de Facilidad de la función Glosario ($M = 2{,}62$) también presentaron medias destacables. Por otra parte, las puntuaciones más bajas se registraron en los atributos de Tecnología ($M = 1{,}41$), Diseño ($M = 1{,}62$) y Perfección ($M = 1{,}69$) de la función Procedimiento.

Con fines comparativos la Tabla III muestra el resultado de las pruebas ANOVA para muestras relacionadas, puesto que una vez ya verificada la valoración positiva de todas las puntuaciones se procedió a determinar si las distintas funciones fueron igualmente valoradas por los participantes.

Se constata que existen diferencias estadísticamente significativas entre las valoraciones medias de las funciones en once de los catorce atributos considerados. Estas diferencias son detalladas a continuación a partir de un análisis de medias por pares con ajuste de Bonferroni.

En el atributo de Tecnología se manifiestan diferencias estadísticamente significativas entre las medias de las funciones Procedimiento y Glosario ($p = 0.016$); Procedimiento y Trivia ($p < 0.001$); Procedimiento y Prueba de Hipótesis ($p < 0.001$) y Glosario y Trivia ($p = 0.007$). En el atributo de Eficiencia las diferencias se hacen notar entre las funciones Procedimiento y Trivia ($p < 0.001$); Glosario y Trivia ($p = 0.004$) y Prueba de Hipótesis y Trivia ($p = 0.001$). En cuanto al atributo de Facilidad las diferencias de medias se manifestaron entre las funciones Glosario y Prueba de Hipótesis ($p = 0.013$), así como entre Trivia y Prueba de Hipótesis ($p = 0.006$). En el atributo de Interés se hallaron diferencias significativas entre las funciones Procedimiento y Trivia ($p = 0.009$), así como también entre Prueba de Hipótesis y Trivia ($p = 0.003$). Solo hubo una diferencia significativa en las valoraciones promedio del atributo Calidad entre las funciones Procedimientos y Glosario ($p = 0.041$). Por otra parte, en el atributo Entretención se hallaron diferencias significativas entre las funciones Procedimiento y Glosario ($p = 0.028$); Procedimiento y Trivia ($p < 0.001$); Glosario y Trivia ($p = 0.041$) y Prueba de Hipótesis y Trivia ($p = 0.003$). En el atributo de Perfección solo hubo una diferencia significativa entre las funciones Procedimiento y Trivia ($p < 0.001$). De igual forma, en el atributo de Diseño solo hubo una diferencia significativa entre las funciones Procedimiento y Trivia (p < 0.001). En el atributo de Suficiencia también se repite que la única diferencia significativa se produce entre las funciones Procedimiento y Trivia (p = 0,037). En el atributo de Seguridad se evidenciaron diferencias significativas entre las funciones Procedimiento y Trivia (p = 0.007); Glosario y Trivia (p = 0.022) y Trivia y Prueba de Hipótesis (p = 0.007).

Finalmente, en los atributos de Accesibilidad, Innovación, Originalidad, Utilidad e Inclusividad no se detectaron diferencias estadísticamente significativas de acuerdo con las funciones de la aplicación.

TABLA III
Estadísticos descriptivos y ANOVA para muestras relacionadas

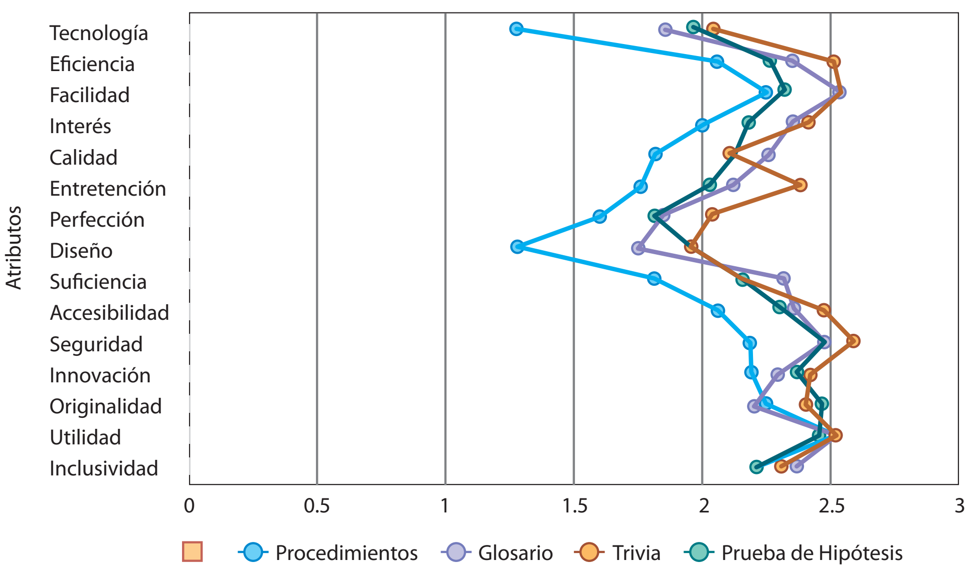
Atributo	*Procedimiento*		*Glosario*		*Trivia*		*Prueba de Hipótesis*		*F traza de PilLai*	*Eta parcial al cuadrado*
	M	DT	M	DT	M	DT	M	DT		
Tecnología	1,41	1,09	1,81	1,14	2,20	1,06	2,05	0,93	12,43***	0,38
Eficiencia	2,23	1,09	2,40	1,03	2,64	0,80	2,34	0,94	10,70***	0,35
Facilidad	2,38	1,04	2,62	0,74	2,66	0,91	2,26	1,06	5,15**	0,20
Interés	2,29	1,01	2,51	0,94	2,58	0,95	2,25	1,08	8,68***	0,30
Calidad	2,05	1,27	2,36	0,97	2,33	1,11	2,20	1,03	3,69*	0,16
Entretención	1,83	1,34	2,13	1,13	2,45	1,03	1,98	1,20	7,31***	0,27
Perfección	1,69	1,03	1,90	1,10	2,20	1,04	2,00	0,98	6,36**	0,24
Diseño	1,62	1,38	1,91	1,33	2,14	1,19	1,94	1,22	5,63**	0,22
Suficiencia	2,00	1,01	2,34	1,05	2,33	1,03	2,17	1,06	3,81*	0,17
Accesibilidad	2,27	1,15	2,44	1,05	2,55	0,94	2,29	1,07	3,01*	0,13
Seguridad	2,36	1,10	2,50	0,99	2,66	0,90	2,45	0,99	6,45**	0,24
Innovación	2,33	1,08	2,36	1,01	2,48	0,99	2,29	1,11	2,07	0,09
Originalidad	2,29	1,16	2,38	1,14	2,50	1,03	2,43	1,02	1,96	0,09
Utilidad	2,62	0,91	2,55	0,97	2,66	0,91	2,39	1,15	1,82	0,08
Inclusividad	2,29	1,12	2,41	1,03	2,34	1,20	2,25	1,10	0,75	0,04

Nota: Frente al incumplimiento del supuesto de esfericidad se reemplazó el valor F tradicional por el F Traza de PilLai.

* p ≤ 0.05; ** p ≤ 0.01; ***p ≤ 0.001

En el Gráfico I se muestra la configuración del perfil valorativo asignado por los estudiantes de psicología a las funciones de la aplicación. En primer término, se constata que, en promedio, todas las funciones se ubican en la banda derecha del eje X, muy por sobre el valor cero que representa al punto central de la escala. En su conjunto la aplicación es evaluada de forma positiva, no obstante, observándose ciertos matices en función de la característica consultada y la función de la aplicación, así, por ejemplo, se puede destacar que la función Trivia obtiene - en diez de catorce características - puntuaciones más altas que las demás funciones. En contraparte, la función Procedimientos obtiene las peores puntuaciones en casi la totalidad de las características, efecto que se hace notar con mayor claridad en los atributos de Tecnología y Diseño y, en un grado menor, en las características de Perfección, Entretención, Calidad y Suficiencia.

Gráfico I
Evaluación de funciones de la aplicación por estudiantes de Psicología

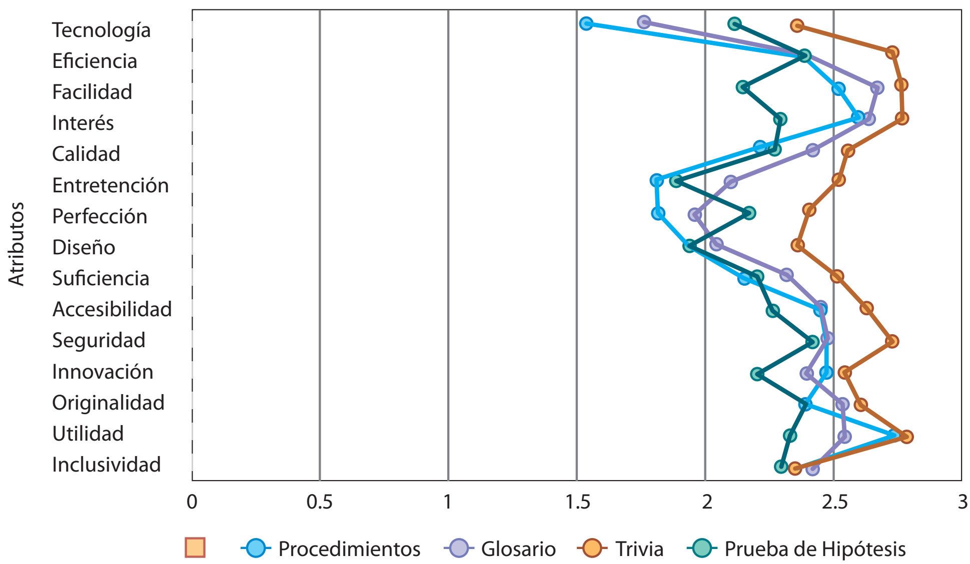


Nota: La valoración de las funciones se manifiesta para cada atributo dentro de una escala continua que va desde los -3 a los +3 puntos. Para efectos de presentación visual el eje de abscisa fue recortado y muestra solamente los valores positivos de la escala.

En el Gráfico II se muestran los resultados de la evaluación de las funciones de la aplicación por parte de los estudiantes de Trabajo Social. Al igual que lo observado a nivel descriptivo en la muestra de estudiantes de Psicología, se constata una valoración general positiva de todas las funciones de la aplicación para cada característica evaluada. De igual forma, se manifiesta como tendencia la obtención de mayores puntuaciones por parte de la función Trivia en prácticamente la totalidad de los atributos evaluados. Por su parte, las peores valoraciones se observan en la función Procedimientos y, en particular, en los atributos de Tecnología, Entretención y Perfección.

GRÁFICO II

Evaluación de funciones de la aplicación por estudiantes de Trabajo Social



Nota: La valoración de las funciones se manifiesta para cada atributo dentro de una escala continua que va desde los -3 a los +3 puntos. Para efectos de presentación visual el eje de abscisa fue recortado y muestra solamente los valores positivos de la escala.

Las puntuaciones expuestas en los Gráficos I y II reflejan valoraciones positivas de las funciones de la aplicación con independencia del tipo de carrera. En efecto, se realizaron pruebas de hipótesis para testear la igualdad de medias entre las puntuaciones de los estudiantes de Psicología y de los estudiantes de Trabajo Social, constatándose que solo existe una diferencia estadísticamente significativa en el puntaje asignado al atributo de Interés en la función de Procedimientos [t (61) = 2,372, p = .021], la cual se manifiesta en una diferencia de 0,58 puntos favorable al grupo de Trabajo Social.

4.4. *Resultados examen de estadística inferencial*

El promedio de respuestas correctas para el examen de Estadística Inferencial fue de 44,75 dentro de un conjunto de 60 preguntas. El rango empírico fue de 20 respuestas correctas, siendo 33 el valor mínimo y 53 el máximo. La distribución de los puntajes tuvo un comportamiento normal, constatándose un coeficiente de curtosis de -0.17 y un coeficiente de asimetría de -0.34. No hubo diferencias estadísticamente significativas entre los promedios de respuestas correctas en función de la carrera [t (64,796) = 0,978, p = 0,332], así como en función del sexo [t (72) = -0.978, p = 0,336]. En términos relativos la proporción promedio de aciertos fue de 0,75.

No hubo correlación entre la cantidad de respuestas correctas en el examen y la cantidad de horas dedicadas al uso de la aplicación [rho = 0,04, p = 0,73]. De igual forma, la cantidad de respuestas correctas en el examen no correlacionó con la cantidad de horas dedicadas a estudiar de forma tradicional, ya sea a través del estudio de las diapositivas de clases [rho = 0,08, p = 0,49], o mediante lecturas obligatorias [rho = 0,14, p = 0,27]. Pese a lo anterior, sí fue posible evidenciar una correlación estadísticamente significativa entre la cantidad de horas dedicadas al uso de la aplicación y las horas dedicadas a estudiar desde las diapositivas de clases [rho = 0,32, p = 0,009].

5. Discusión y conclusiones

Las características sociodemográficas de los participantes se ajustan a un perfil de alumno no tradicional y principalmente femenino, cuya participación en la universidad se encuentra condicionada por factores socioestructurales, tales como ser primera generación en la educación superior y haber obtenido bajos puntajes en las pruebas de selección universitaria, principalmente en el dominio de la Matemática. A su vez, una proporción menor, pero considerable, proviene de zonas rurales. A estas características se suma el hecho de constituir una población egresada principalmente de colegios subvencionados de calidad heterogénea, que congregan a estudiantes y familias provenientes de sectores socioeconómicos medios y medios bajos. Además, un porcentaje importante cursó su enseñanza media bajo la modalidad técnico-profesional, la cual, desde una perspectiva funcionalista, privilegia la inserción laboral de sus egresados por sobre la continuación de estudios, situación que instala mayores requerimientos de adaptación curricular tanto para el estudiantado que decide entrar a la universidad como para los docentes.

Por otra parte, los participantes pueden ser considerados una muestra de estudiantes jóvenes, toda vez que no se registraron edades por sobre los treinta años. Es importante destacar la naturaleza de este perfil etario debido al vínculo existente entre las cohortes más jóvenes y el aprovechamiento tecnológico, puesto que éstas constituyen una generación que ha experimentado el uso de dispositivos smartphones de forma natural. Es evidente, por lo tanto, que este grupo haya recibido una mayor influencia por el proceso digitalización de la sociedad. Este factor debe ser tenido en cuenta si se desea generalizar los resultados de esta investigación a otros grupos etarios, puesto que desarrollar una aplicación para dispositivos smartphones en un curso etariamente más heterogéneo podría inclusive incrementar la brecha entre los mismos estudiantes y desincentivar el aprendizaje de quienes carecen de las herramientas y habilidades digitales avanzadas.

En términos generales no existen diferencias en el perfil socioeducativo de los participantes de Psicología y Trabajo Social, exceptuando en el dominio de la Matemática auto-reportado por los estudiantes sobre la base de sus puntajes PSU. De igual forma los datos indican que no existen diferencias en el acceso a recursos tecnológicos entre los estudiantes de ambas carreras y una proporción mayoritaria es acreedora de computador y smartphone.

En términos sustantivos, la aplicación desarrollada fue positivamente evaluada por los estudiantes, no existiendo mayores diferencias en función de la carrera en que haya sido implementada. Este resultado cobra sentido al considerar que los perfiles de ambas carreras son indistinguibles desde el plano socioeducativo y digital. Un futuro estudio puede incursionar en la implementación de esta aplicación móvil en carreras y universidades diversas, de forma que sea posible demostrar hasta qué punto son generalizables estos resultados.

Por otra parte, sí se encontraron diferencias significativas en las valoraciones de los estudiantes al comparar los atributos de las cuatro funciones consultadas. En efecto, se ha reportado que la función Trivia logró captar más la atención que las otras aplicaciones y alcanzó las valoraciones más altas en la mayoría de los atributos consultados, en particular apreciaron las características de utilidad, facilidad y seguridad. En contraste, la función Procedimientos es la que recibe la peor calificación promedio. Es probable que esta función haya sido más ignorada por los estudiantes al momento de estudiar debido a que en el examen final de la asignatura no se consideró una evaluación práctica en el laboratorio y, en consecuencia, el aporte de esta función pude ser percibido como más reducido.

Aunque no haya sido posible determinar una relación funcional entre el uso de la aplicación móvil y el rendimiento en el examen de Estadística Inferencial, los resultados de esta investigación apoyan la implementación de la aplicación como material de apoyo para la asignatura, toda vez que su uso se encuentra legitimado por la población diana, aspecto que se constata tanto por la valoración que recibe, como por el uso que se le otorga. Por otra parte, fue posible evidenciar que el uso de la aplicación ocupó un rol privilegiado en las estrategias de preparación para el examen, ello debido a que la cantidad de horas dedicadas para estudiar con la aplicación fue significativamente superior a la cantidad de horas dedicadas para estudiar mediante las alternativas más tradicionales, tales como las diapositivas de clases y las lecturas obligatorias.

En consecuencia, esta innovación adquiere importancia por constituir una implementación novedosa que amplía las posibilidades de estudio de los estudiantes. Naturalmente, existen limitaciones que le son propias a cualquier iniciativa poco explorada, no obstante, al tratarse de una herramienta informática, es viable proyectar una serie de actualizaciones que hagan posible el mejoramiento continuo de sus funciones. Además, estos hallazgos están en sintonía con las investigaciones realizadas por otros autores con otras aplicaciones como *StatHand* y contribuyen a sostener la validez externa de este tipo de iniciativas, esto es, que las inferencias obtenidas a partir de este estudio sean generalizables a otras poblaciones, otras condiciones de aplicación y a otras mediciones de impacto.

Referencias bibliográficas

Allen, P., Dorozenko, K., & Roberts, L. (2016). Difficult decisions: a qualitative exploration of the statistical decision making process from the perspectives of psychology students and academics. *Frontiers in psychology, 7*(188). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00188

Allen, P., Roberts, L., & Baughman, F. (2019). An experimental evaluation of StatHand: A Free Application to Guide Student's Statistical Decision Making. *Scholarship of Teaching and Learning in Psychology, 5*(1), 23-36. http://dx.doi.org/10.1037/stl0000132

Allen, P., Roberts, L., Baughman, F., Loxton, N., Van-Rooy, D., Rock, A., & Finlay, J. (2016). Introducing StatHand: A Cross-Platform Mobile Application to Support Student's Statistical Decision Making. *Frontiers in Psychology, 7*, 1-10. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00288

Angel, J., Loch, B., Daradoumis, T., & Ventura, S. (2017). Games and simulation in higher education. *Int J Educ Technol High Educ*, 14-37. https://doi.org/10.1186/s41239-017-0075-9

Arnholt, A. (2019). Using a Shiny app to teach the concept of power. *Teaching Statistics, 41*(3), 79-84. https://doi.org/10.1111/test.12186

Aronin, S., & Floyd, K. (2013). Using an iPad in Inclusive Preschool Classrooms to Introduce STEM Concepts. *Teaching Exceptional Children, 45*(4), 34-39. https://doi.org/10.1177/004005991304500404

Brase, C. H., & Brase, C. P. (2018). *Understandable statistics: Concepts and methods.* Stamford, USA: CENGAGE Learning. https://www.cengagebrain.com.mx/shop/isbn/9781337119917

Calderwood, K. (2012). Teaching inferential statistics to social work students: a decision-maker flow chart. *Journal of Teaching in Social Work*(32), 133-147. http://dx.doi.org/10.1080/08841233.2012.670065

De Paolo, C. (2010). The STAT-ATTIC Website: Links to Statistics Applets for Introductory Courses. *Journal of Statistics Education, 18*(3). https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889589

Doi, J., Potter, G., Wong, J., Alcaraz, I., & Chi, P. (2016). Web Application Teaching Tools for Statistics Using R and Shiny. *Technology Innovations in Statistics Education, 9*(1). https://escholarship.org/uc/item/00d4q8cp

Domínguez, S., Calderón, G., Alarcón, D., & Navarro, J. (2017). Relación entre ansiedad ante exámenes y rendimiento en exámenes universitarios: análisis preliminar de la diferencia según asignatura. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria, 11*(1), 166-176. http://dx.doi.org/10.19083/ridu.11.492

Eudave, D. (2014). Desarrollo y aplicación de nociones estadísticas desde la práctica profesional: el caso de los trabajadores sociales. *Educación Matemática, 26*(1), 288-313. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5987201

Forte, J. (1995). Teaching Statistics without Sadistics. *Journal of Social Work Education, 31*(2), 204-218. https://doi.org/10.1080/10437797.1995.10672258

González, J., López, M., Cobo, E., & Cortés, J. (2018). Assessing Shiny apps through student feedback: Recommendations from a qualitative study. *Computer Applications in Engineering Education, 26*(5), 1813-1824. https://doi.org/10.1002/cae.21932

Harnish, D., Ling, C., & Shehab, R. (2012). Leveraging the Use of Mobile Applications to Increase Knowledge Retention in a Classroom Lecture. *Proc. Hum. Factors Ergon. Soc. Annu. Meet., 56*(1), 610-614. https://doi.org/10.1177/1071181312561127

Huang, M.-H. (2005). Web performance scale. *Information & Management*(42), 841-852. https://doi.org/10.1016/j.im.2004.06.003

Madrid, J. (2008). Aplicación del diferencial semántico para la evaluación de calculadoras. *III Encuentro Latinoamericano de Diseño* (págs. 1-9). Buenos Aires, Argentina: Facultad de Diseño y Comunicación. Universidad de Palermo. https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/encuentro2007/02_auspicios_publicaciones/actas_diseno/articulos_pdf/A7002.pdf

Marson, S. (2007). Three Empirical Strategies for Teaching Statistics. *Journal of Teaching in Social Work, 27*(3-4), 199-213. http://dx.doi.org/10.1300/J067v27n03_13

Merino, E., Cabello, J., & Merino, E. (2017). El teléfono móvil y los estudiantes universitarios: una aproximación a usos, conductas y percepciones. *Revista de Medios y Educación*(51), 81-96. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6054450

Mindak, W. (1961). Fitting the Semantic Differential to the Marketing Problem. *Journal of Marketing, 25*(4), 28-33. https://doi.org/10.1177/002224296102500406

Miranda, S. (2019). Using Shiny to illustrate the probability density function concept. *Teaching Statistics, 41*(1), 30-35. https://doi.org/10.1111/test.12176

Morales, P. (2011). *Guía para construir cuestionarios y escalas de actitudes*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas. http://www.upcomillas.es/personal/peter/otrosdocumentos/Guiaparaconstruirescalasdeactitudes.pdf

Navarro, R., Vega, M., Chiroque, E., & Rivero, C. (2018). Percepción de los docentes sobre las buenas prácticas con un aplicativo móvil para la enseñanza de matemáticas. *Educación, XXVII*(52), 81-97. https://doi.org/10.18800/educacion.201801.005

Ngamjarus, C., Chongsuvivatwong, V., & McNeil, E. (2016). n4Studies: Sample Size Calculation for an Epidemiological. *Siriraj Medical Journal, 68*(3), 160-170. https://he02.tci-thaijo.org/index.php/sirirajmedj/article/view/58342

Ngamjarus, C., Chongsuvivatwong, V., McNeil, E., & Holling, H. (2017). Enhacement of learning of sample size calculation with a smartphone application. A cluster-randomized controlled trial. *Southeast Asian Journal of Tropical Medicine and Public Health, 48*(1), 240-252. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/29645411/

Paez, Y., Burne, C., Mosconi, S., & Montenegro, S. (2017). Actitudes de estudiantes hacia la estadística, antes y después de cursar la asignatura, en una escuela Médica Argentina. *Rev Educ Cienc Salud, 14*(2), 109-114. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6290864

Pardo, A., & San Martín, R. (2012). Análisis de Varianza (III) Un factor con medidas repetidas. En A. Pardo, & R. San Martín, *Análisis de datos en Ciencias Sociales y de la Salud* (Vol. II, págs. 295-325). Madrid, España: Editorial Síntesis. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=570217

Prabowo, A., Rahmawati, U., & Anggoro, R. (2019). Android-based Teaching Material for Statistics Integrated with Social Media WhatsApp. *International Journal on Emerging Mathematics Education, 3*(1), 93-104. http://dx.doi.org/10.12928/ijeme.v3i1.11961

Roberts, L., Van Rooy, D., Rock, A., & Loxton, N. (2017). *StatHand: An Interactive Decision Tree Mobile Application to Guide Students' Statistical Decision Making.* Canberra: Department of Education and Training, Australian Government. https://espace.curtin.edu.au/handle/20.500.11937/62422

Rock, A., Coventry, W., Morgan, M., & Loi, N. (2016). Teaching research methods and statistics in elearning enviroments: Pedagogy, practical examples and possible futures. *Frontiers in Psychology, 7,* 1-11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00339

Schacht, S., & Stewart, B. (1990). What's funny about statistics? A technique for reducing student anxiety. *Teaching Sociology, 18*(1), 52-56. https://www.jstor.org/stable/pdf/1318231.pdf?seq=1

Sesé, A., Jiménez, R., Montaño, J., & Palmer, A. (2015). Can attitudes toward statistics and statistics anxiety explain student's performance? *Revista de Psicodidactica, 20*(2), 285-304. https://dspace.uib.es/xmlui/handle/11201/1706

Sierra-Bravo, R. (1997). *Técnicas de investigación social: teoría y ejercicios (Vol. 12).* Madrid: Parainfo. https://books.google.cl/books/about/T%C3%A9cnicas_de_investigaci%C3%B3n_social.html?id=DEs1SgAACAAJ&redir_esc=y

Smith, A., & Martínez, I. (2012). Techniques in Teaching Statistics: Linking Research Production and Research Use. *Journal of Public Affairs Education, 18*(1), 107-136. https://doi.org/10.1080/15236803.2012.12001674

Vergel, M., Martínez, J., & Zafra, S. (2015). Apps en el rendimiento académico y autoconcepto de estudiantes de ingeniería. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 6*(2), 198-208. https://doi.org/10.22335/rlct.v6i2.21

Williams, I., & Williams, K. (2018). Using an R shiny to enhance the learning experience of confidence intervals. *Teaching Statistics, 40*(1), 24-28. https://doi.org/10.1111/test.12145

Wong, D., & Lam, D. (2007). Problem-Based Learning in Social Work: A Study of Student Learning Outcomes. *Research on Social Work Practice, 17*(1), 55-65. https://doi.org/10.1177/1049731506293364

Xie, Y. (2013). Animation: An R Package for Creating Animations and Demonstrating Statistical Methods. *Journal of Statistical Software, 53*(1), 1-27. https://doi.org/10.18637/jss.v053.i01

Autor

Víctor Castillo Riquelme. Facultad de Ciencias Sociales y Comunicaciones, Universidad Santo Tomás, Los Ángeles, Chile. vcastillo10@santotomas.cl

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 23 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 23, Número 2

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Julio de 2020
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes